北大燕园

考研必备(2001年版)

数学全真模拟经典336题

【理工类】

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

考研必备(2001年版)

数学全真模拟经典336题

(理工类)

主　编　清华大学　李永乐
北京大学　李正元
中国人民大学　袁荫棠

编　者　(以姓氏笔画为序)
北京大学　刘西垣
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
中国人民大学　袁荫棠
天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研必备数学全真模拟经典 336 题:理工类/李永乐,李正元,袁荫棠主编. —北京:国家行政学院出版社.2000.5

ISBN 7-80140-119-0

Ⅰ.考… Ⅱ.①李… ②李… ③袁… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 24018 号

考研必备(2001 年版)

数学全真模拟经典 336 题

[理工类]

李永乐 李正元 袁荫棠 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区厂洼街 11 号

邮政编码:100089

发行部电话:68929037 68929098

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 开本 18.25 印张 420 千字

2000 年 5 月第 1 版 2000 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—10000 册

ISBN 7-80140-119-0/O·10 定价:25.00 元

前　言

本书是《2001 年考研数学复习全书》(理工类)的姊妹篇。为了使考研同学更好地提高数学水平,检查第一阶段对数学基本概念、公式、定理及运算法则的复习效果,查漏补缺,提高应战能力,积累临场经验,作者深入研究了近年来考研命题规律及特点,分析了历年考研试题的考点分布及难易程度,并结合作者多年来数学阅卷以及全国各大城市“考研班”辅导的经验,编写了这本实战训练题集——《2001 年考研数学全真模拟经典 336 题》(理工类)。

本书特点:

1. 每题均全新优化设计,且试题涵盖大纲所有考查知识点

2000 年考研数学试卷一与试卷二共有 42 道题,其中填空题与选择题 20 道题,解答题与证明题 22 道题。为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会,多见一些新题型,多一些针对性,考试中多一份把握,我们特优化设计或改编了 16 套共 336 道模拟试题,这 16 套共 336 道题完全不同,没有重复题,也没有陈题;在内容设计上,每道题均涉及两个以上知识点,有些综合题甚至涉及到 3 个考点或更多,这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这 16 套全新优化设计的试题训练,我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结,力求一题多解

我们在设计这 16 套试题时,无论是填空题、选择题,还是计算题与证明题,每道题都设有①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法;②解答——该题的详细、规范解题过程;③评注——该题所考查的知识点(或命题意图)、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时,在解题过程中,力求一题多解,扩展考生的视野和思路,比较各种解题方法的特点和适用范围,从而提高考生的应试水平。

本书使用说明:

1. 本书是依据最新精神为 2001 年考研读者全新优化设计的一本训练题集,本书中的试题难度略高于 2000 年考研试题,解答题与证明题体现了考试重点、难点内容,综合性比较强;填空题与选择题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解

和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2001年考研数学复习全书》(理工类)，弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2001年考研数学复习全书》(理工类)中所介绍的解题方法、技巧和思路.

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

祝愿同学复习顺利，考试成功，心想事成！

李永乐

2000年5月于清华园

目　录

第一部分　考研数学命题规律与注意事项

一、考研数学入学考试性质及命题的基本原则

根据教育部颁布的“数学考试大纲”，考生应当明确研究生的入学考试是一种“具有选拔功能的水平考试”.这种考试要有利于国家选拔出高层次人才，继续深造攻读硕士学位，同时，又可借助考试这一指挥棒促进高校数学课的教学改革，教学质量的提高.

教育部考试中心制定了命题的基本原则，从中我们可以得到许多重要信息，诸如：严格按照教育部颁布的考试大纲所规定的考试内容与考试要求进行命题，试题以考查三基(基本概念、基本方法和基本原理)为主，要加强对考生的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及综合运用所学知识解决实际问题的能力的考查，…

这些法规性文件已经明确指出命题的依据是考试大纲，而不是同学在本科学习时的教学大纲或某一指定的教材，根据入学考试的性质是具有选拔功能的水平考试，同学也不难理解考研数学考试的要求会略高于教学要求，考试大纲与教学大纲是有差异的.因此，同学在备考阶段要认真看考试大纲，搞清考试内容与考试要求，它是指导考生复习的唯一依据.

二、数学一与数学二的试卷结构以及各类题的考查目标

近年来，试卷的总题量基本上是21道题，其中第一大题为填空题，第二大题是选择题，第三大题至第十三大题为解答题与证明题.其中，填空题与选择题各由5个小题组成，每题都是3分，即客观性试题共10道题总分为30分.而解答题的形式主要是计算题，但必有综合题及应用题，主观性试题共有11道大题，总分为70分.

在数学一的试卷中，高等数学的内容有13道题共60分，其中填空题与选择题各有3道，解答题为7道，线性代数与概率统计部分均各有4道题各为20分，其中填空题与选择题都各有1道题.

在数学二的试卷中，高等数学的内容共有18道题约84分，线性代数部分只有3道题约16分，其中有一道是填空题或者是选择题，另2道题是计算题(尚未考过证明题)，数学二不考概率统计.

填空题考查的目标主要是考查考生在三基以及重要数学性质方面掌握的情况，从认知的角度看，这些题可分为识记、理解、掌握和简单应用三个层次，但从难度上看是以中等难度为主，同时由填空题也可了解同学在简捷、准确运算能力以及简单推理方面的情况.

选择题主要用于考查考生对数学概念、性质、方法的理解与掌握的程度，从理论上讲选择题可以考核各层次的知识和能力，但现阶段主要考查的是中低层次，了解考生在简单推理、比较以及判别能力方面的情况，同时，也可以了解考生在一些常见的概念性、方法性错误方面的状态.

解答题和证明题是数学考试的主要题型，是对考生三基以及数学能力、水平的一个全面评估.通过解答题可考核考生对数学的基本原理、方法、公式和定理掌握及熟练运用的程度，可考查运算能力、抽象概括能力、数学建模解决实际问题的能力，而通过证明题可了解考生对数学主要原理、定理理解和掌握的程度，考查逻辑推理能力.

根据题型的考核要求，我们知道无论是填空题还是选择题，每个题涉及的知识点不会很多，计算的复杂性不应太高(有的题可能会有简便方法)，综合性也不会特别强，推理亦相对简单，这些题

应当好做.但另一方面,一份试卷中安排填空题与选择题必然加大了总题量,因而也就增加了考核的知识点,扩大了考试内容的覆盖面,因此考生在备考阶段一定要全面系统的复习,不能有所偏废,要重视三基,防止眼高手低,华而不实,把基础打扎实了,考试时从填空题入手,由于题目难度适中,会有利于缓解考试时的紧张心情,开头顺了更便于发挥水平.

三、考研数学试题的特点

数学试卷中的大多数题目难易度中等,且区分度合格,一般有 2 至 3 道题较难,但对高分的考生区分能力强,一般没有“太难多数人不会做”及“太易多数人会做”的题目.并且考核知识覆盖面广,例如高等数学的几块内容除去空间解析几何偶尔有一年不考外,其余内容年年考核.同时,考查的各个知识点分布适当,知识结构合理,较好地体现了考试大纲所规定的以考查三基为主,在此基础上加强对考生数学能力的考查的要求.

1.重视考查三基

考试大纲明确指出考试以考基本概念、基本方法、基本原理为主,命题组也确实严格遵循考试大纲命题,但从每年阅卷的情况看,无论是填空题、选择题还是解答题中的基础题均有为数不少的考生失误,这要引起备考同学足够的重视.

【例 1】 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. (2000 年数学一试题)

【分析】 这是一道常见的基本题.其中 f 是二元复合函数,g 是一元复合函数.二元复合函数求二阶偏导数,主要应抓住两件事,一是搞清复合关系,二是不要忘记 f_1' 与 f_2' 仍是二元复合函数,求其二阶偏导时仍要遵循复合函数求偏导数的法则.至于复合关系,画箭头图是一目了然的.由

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[r] \arrow[ddr] & x \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 2 \arrow[r] \arrow[uur] & y
\end{tikzcd}$$

得
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} g'.$$
那么,再利用箭头图求二阶偏导数,有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y(x f_{11}'' - \frac{x}{y^2} f_{12}'') - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y}(x f_{21}'' - \frac{x}{y^2} f_{22}'') - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^2} g' \cdot \frac{1}{x}.$$
注意到 f 有连续的偏导数,有 $f_{12}'' = f_{21}''$,再合并整理就可得到正确答案,即
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' - \frac{1}{y^2} f_2' + xy f_{11}'' - \frac{x}{y^3} f_{22}'' - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''.$$

在这里,g 的中间变量是一元,对 x 求导时 y 应视为常数,对 y 求导时 x 应视为常数,不应当与 f 的求导相混淆,出现 g_1', g_2' 等记号都是不对的,只能是 g'.而对 f 求导时写成 f_x', f_y', f' 等也是不对的.根据复合函数求导法则,若 f 对自变量 x 求偏导数,当 f 有 m 个中间变量时,则
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} f_i' \cdot 第\ i\ 个中间变量对\ x\ 求偏导.$$
f 首先对中间变量求偏导,然后中间变量再对自变量求偏导.另一个问题是求二阶偏导数时丢项,这是忘了 f_1', f_2' 仍是复合函数,一定要按箭头图来复合求导.

【例 2】 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{ax\,dy\,dz + (z+a)^2 dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧,

a 为大于零的常数. (1998 年数学一试题)

【分析】 第二类曲面积分既是教学中的重点,也是历年来考研的热点,本题是常见的基本题.对于第二类曲面积分有两种基本解法,一是坐标法,即将 Σ 投影到相应的坐标平面,然后逐块化为二重积分;二是辅助曲面法,即添加曲面 S 使 $\Sigma + S$ 成为闭曲面,然后用高斯公式化为三重积分.

注意到,$\forall (x,y,z) \in \Sigma$,均有 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,因此首先应将被积函数化简为

$$I = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{(z+a)^2}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若用高斯公式,则应补一块有向平面

$$S^-:\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant a^2 \\ z = 0 \end{cases},$$ 其法向量与 z 轴正方向相反(要与 Σ 的方向一致),从而

$$I = \frac{1}{a}\left[\oiint_{\Sigma + S^-} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S^-} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right].$$

在 S^- 上,$z = 0, \mathrm{d}z = 0$. 后一个曲面积分可用投影到 xOy 平面来解决,由于 S^- 的方向是 z 轴的反方向,故

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{a}\iint_{S^-} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{a}\iint_{S^-} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= a\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$,利用二重积分的几何意义,可知 $I_2 = \pi a^3$.

至于闭曲面 $\Omega = \Sigma + S^-$ 上的积分 I_1,由于 Ω 的方向为曲面的内侧,用高斯公式得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a}\left[-\iiint_{\Omega}(3a + 2z)\mathrm{d}V\right] = \frac{1}{a}\left[-3a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 - 2\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V\right] \\ &= -2\pi a^3 - \frac{2}{a}\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

因此 $$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_{-a}^{0}\mathrm{d}z\iint_{D(z)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{0} z\pi(a^2 - z^2)\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{4}a^4.$$

从而 $$I = I_1 + I_2 = -2\pi a^3 + \frac{\pi}{2}a^3 + \pi a^3 = -\frac{1}{2}\pi a^3.$$

本题中 Σ 是下半球面,并不是闭曲面,有较多的同学不补曲面 S^- 就用高斯公式,这是对公式理解上出了问题,作为第二类曲面积分是依赖于所给定的曲面的侧的,如果考虑不同的侧,法向量的方向正好相反,因而面积投影正好相差一个正负号. 当把 S^- 上的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转换成 D_{xy} 上的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时,$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的正负号应当如何取呢?若本题用坐标法对于 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,如何将 Σ 上的 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 转换成 D_{yz} 上的 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 呢?一些同学不注意对侧的理解,正负号上就会有种种差错,还有些同学在球(极)坐标系确定上下限时也有各种错误或者丢失体积元素中的 r,凡此种种在基本概念、方法、计算上的错误完全是可以避免的,应引起足够的注意. 作为常见的、重要的基础知识一定要学透、要过关.

【例 3】 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解,则 a = ______. (2000 年数学一试题)

【分析】 这是一道含参数的线性方程组何时无解的问题,有解或无解,有解时并求其解是考

研中常见的题型,本题是难度并不大的一个基础题.如果考生很明确 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$,本题不难找出正确答案 $a=-1$.但从随机抽样情况来看,约有 40% 的同学出了错,在诸多错误中,为数较多的是:

从计算行列式 $|\boldsymbol{A}|=(a+1)(3-a)=0$,认为 $a=3$ 或 -1.这是基本理论上出了问题.要注意的是,当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时,方程组没有唯一解,它可能无解亦可能有无穷多解,不加分析地认定无解是不正确的.

【例 4】 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数.$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量. (1997 年数学一试题)

【分析】 矩估计法和极大似然估计法是点估计的两个基本方法.只要考生掌握这两种点估计的基本步骤,而且能够注意到在矩估计中是用样本矩的函数估计总体矩的同一函数,则问题就可迎刃而解.

本题应该首先计算总体矩,以得出被估计参数 θ 与总体矩间的函数关系.为此要先计算 $\boldsymbol{E}X$(记 $\mu=\boldsymbol{E}(X)$).

$$\mu=\boldsymbol{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\frac{2\mu-1}{1-\mu}.$$

因为总体 X 的一阶原点矩 $\boldsymbol{E}(X)$,即 μ 的矩估计量是样本均值 $\overline{X}$ $\left(\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$,所以 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}.$$

对于极大似然估计,正确写出样本的似然函数 $L(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$ 是重要前提,结合高等数学中求函数极值的方法不难求出 θ 的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

矩估计法一方面定义用样本矩估计相应的总体矩.但如果被估的参数不是总体矩,而是总体矩的函数,如本题中 $\theta=\frac{2\boldsymbol{E}(X)-1}{1-\boldsymbol{E}(X)}$,则矩估计法的另一部分内容是定义用样本矩的函数估计总体矩的同一函数.考生如果忽略了矩估计法的这一法则,则本题考查的前一半分数就会拿不到了.

2. 试题的灵活性较强

有些试题设计的比较新颖,不落俗套,考生基本功扎实读懂题意就不难解;有的试题解法灵活,知识融会贯通的同学往往有捷径可节省出宝贵的时间.

【例 5】 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置,求解方程:

$$2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma.$$ (2000年数学二试题)

【分析】 以往考方程组的求解都是给出这一方程组,而本题却需要考生先通过矩阵运算建立起系数矩阵,然后再求解.由于一些考生矩阵运算未过关,不能建立起方程组当然也就无从求解了.

对于 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}^4$ 等运算,往年亦多次在考研题中出现,总有不少同学出错,今年亦是如此.由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 3×1 矩阵,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 1×3 矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 1×1 矩阵.利用矩阵乘法有结合律.可计算出 $\boldsymbol{A}^4 = 8\boldsymbol{A}$,于是方程组化简为

$$8(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}.$$

再用高斯消元就可解出此方程组.

【例6】 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$,且当 $\Delta x \to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0) = \pi$,则 $y(1) = ($ $)$. (1998年数学一试题)

(A) 2π　　(B) π　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

【分析】 本题有两种思路,由于 $\Delta x \to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\alpha}{\Delta x} = 0$.故可对 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$,两边同除以 Δx,再令 $\Delta x \to 0$ 取极限,得到

$$y' = \frac{y}{1+x^2}, \quad \text{又 } y(0) = \pi,$$

问题转换为微分方程的初值问题,就不难求解了.

对于 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$,$\alpha \xrightarrow{\Delta x\to0} 0$.根据微分 $\mathrm{d}y$ 与增量 Δy 的关系,可知

$$\mathrm{d}y = \frac{y}{1+x^2}\Delta x = y'\Delta x, \text{亦有 } y' = \frac{y}{1+x^2}.$$

本题的难点在于一些同学不知从何处入手,可见复习时要注意各知识点的接口,这样才会有灵活的思路.

【例7】 $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x =$ ______. (2000年数学一试题)

【分析】 这是一个容易的题目,如若按通常的三角代换

$$\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4},$$

虽并不算太繁,但若注意到定积分的种种计算技巧,例如,本题用定积分的几何意义来求解,即

$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ 就是求如图1中阴影部分的面积,那么答案立即就可以写出来了.

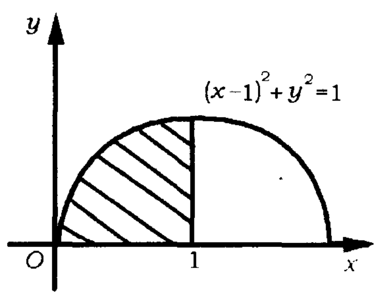

图1

【例8】 确定常数 a, b, c 的值,使

$$\lim_{x\to0}\frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} = c \quad (c \neq 0).$$ (1998年数学二试题)

【分析】 因为当 $x \to 0$ 时,分子 $ax - \sin x \to 0$,而极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t} \qquad ①$$

存在且不为 0，故必有分母

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0. \qquad ②$$

由于被积函数$\frac{\ln(1+t^3)}{t}$在定义域内恒大于零，按定积分的几何意义知$\int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\neq 0$ （如 $b\neq 0$）. 要使 ② 式成立，则必须 $b=0$. 再对 ① 式用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}},$$

用等价无穷小代换，知$\frac{\ln(1+x^3)}{x}\sim x^2$，那么

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c \quad (c\neq 0).$$

如果 $a\neq 1$，则上式极限必为 ∞，与已知不符. 故 $a=1$. 至于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

则是最基本的极限，用重要极限、等价无穷小、洛必达法则都可立即求出 c.

本题无论是灵活性、综合性，还是假设分析推理都对考生提出了较高要求.

3. 试题的综合性强

有些试题考核的知识点较多，既有把前后章节的知识综合起来考核的，又有不同学科的知识联系在一起的，这类题目要求同学要学会分析问题，抓联系抓总结.

【例 9】 设矩阵$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$是满秩的，则直线$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ （ ）. （1998 年数学一试题）

(A) 相交于一点 (B) 重合

(C) 平行但不重合 (D) 异面

【分析】 由于矩阵$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$经初等变换其秩是不变的，故可经初等变换向直线的方向向量靠拢，从中寻找直线方向向量之间的某些联系. 即由

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

后者的秩仍应是 3，得知直线的方向向量 $\boldsymbol{v}_1=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 与 $\boldsymbol{v}_2=(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关，因此排除(B)，(C).

如图 2，在直线 l_1 上任取一点(a_3,b_3,c_3)，在直线 l_2 上任取一点(a_1,b_1,c_1)，构造向量 $\boldsymbol{v}=(a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1)$，那么 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}$ 是否共面就可决定两条直线是相交还是异面了. 为此，既可利

用混合积

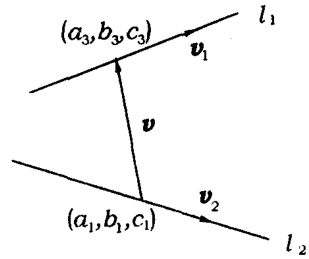

图 2

$$(v_1, v_2, v) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

亦可用线性相关性,因为 $v_1 + v_2 + v = \mathbf{0}$,从而知应选(A).

本题综合运用了线性代数与空间解析几何两个知识点,秩、线性相关的几何意义等.

【例 10】 设曲线 $y = ax^2(a > 0, x \geqslant 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A,过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一个平面图形.问 a 为何值时,该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大?最大体积是多少? (2000 年数学二试题)

【分析】 利用定积分计算几何图形面积或旋转体体积的试题几乎在每年的试卷中都会涉及到,这是重点考核内容之一.围绕参数 a 的取值、曲线的组成等题目可有各种变化.这一类题目先画出平面图形(图 3),然后分析旋转体的体积元素,用微元分析法较方便.对于本题联立 $\begin{cases} y = ax^2, \\ y = 1 - x^2, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$ 可求出交点 A 的坐标$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}, \dfrac{a}{1+a}\right)$,进而可建立直线 OA 的方程 $y = \dfrac{ax}{\sqrt{1+a}}$.

由于旋转体是绕 x 轴旋转,故体积元素为

$$\pi\left[\left(\frac{ax}{\sqrt{1+a}}\right)^2 - (ax^2)^2\right]\mathrm{d}x,$$

从而旋转体的体积

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a} - a^2x^4\right)\mathrm{d}x.$$

计算此定积分,可得 V(依赖于 a 的取值)

$$V = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^{\frac{3}{2}}}.$$

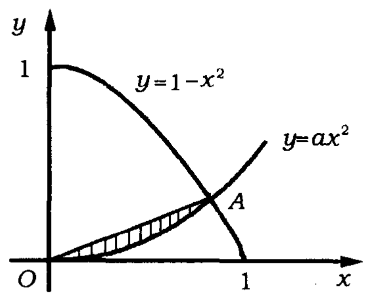

图 3

转为求一元函数的极值问题,通过求驻点及判断可求出 a 的取值与相应的 V 的最大值.

本题涉及一元函数极值、积分计算、定积分几何意义等知识点.

【例 11】 设函数 $y(x)(x \geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$.过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1,区间$[0, x]$上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1,求此曲线 $y = y(x)$ 的方程. (1999 年数学一、数学二试题)

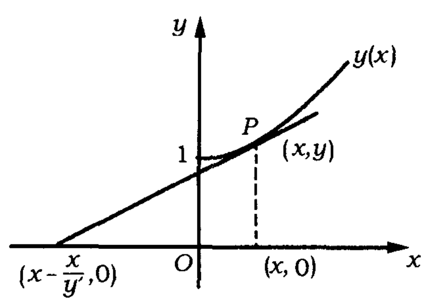

图 4

【分析】 如图 4,如果已知曲线方程 $y(x)$ 来求 S_1 或 S_2 是简单的,现在是求其反问题,即要根据 $2S_1 - S_2 = 1$ 求 $y(x)$,这就要正确写出 S_1 与 S_2 的表达式,其中 S_1 涉及到 $y(x)$ 的切线.由于曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 的切线方程为

$$Y - y = y'(x)(X - x),$$

它与 x 轴的交点是$(x - \frac{x}{y'}, 0)$. 因为 $y' > 0$, $y(x)$ 是增函数, 又因 $y(0) = 1$, 故 $y(x) > 0$. 那么直角三角形的面积 $S_1 = \frac{y^2}{2y'}$, 而曲边梯形的面积 $S_2 = \int_0^x y(t)\mathrm{d}t$. 从而

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\mathrm{d}t = 1, \qquad ①$$

两端对 x 求导, 可得到 $yy'' = (y')^2$. 这样求曲线方程的问题就转换为可降阶的常微分方程求解问题, 令 $p = y'$ 得可分离变量的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

由 $p = c_1 y$ 进而得到 $y = \mathrm{e}^{c_1 x + c_2}$, 最后要确定常数, 根据已知 $y(0) = 1$, 代入到 ① 式, 则有 $y'(0) = 1$, 可知 $c_1 = 1, c_2 = 0$.

本题综合性强, 涉及导数的几何意义、曲边梯形的面积、变上限函数求导、二阶可降阶微分方程的解法、初始条件的确定等诸多知识点. 涉及图形的问题应画图帮助思考.

【例 12】 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 其行列式 $|\boldsymbol{A}| = -1$, 又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, 求 a, b, c 和 λ_0 的值. (1999 年数学一、数学三试题)

【分析】 伴随矩阵是一个重要的考核点, 关于伴随矩阵一个重要公式为 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 对于本题根据特征值与特征向量的定义, 有

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}. \qquad ①$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有较多的参数, 如若先由 $\boldsymbol{A}$ 来求 $\boldsymbol{A}^*$, 再代入到 ① 式求解, 是不明智也是行不通的. 应当注意知识点之间的联系与转换, 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 ① 式, 并将题设 $\boldsymbol{AA}^* = -\boldsymbol{E}$ 代入得

$$\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

问题转化为解方程组

$$\begin{cases} \lambda_0(-a + 1 + c) = 1, & ② \\ \lambda_0(-5 - b + 3) = 1, & ③ \\ \lambda_0(-1 + c - a) = -1. & ④ \end{cases}$$

② - ④ 可知 $\lambda_0 = 1$.

将 $\lambda_0 = 1$ 代入到 ② 和 ③ 可知 $a = c, b = -3$.

最后, 再利用 $|\boldsymbol{A}| = -1$, 有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a - 3 = -1,$$

可完成本题.

此题综合考查了伴随矩阵与原矩阵的关系, 特征值与特征向量、方程组求解、行列式计算等重

要知识点.求参数也是近几年来考研的热点话题之一.

【例 13】 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p\ (0 < p < 1)$,各产品合格与否相互独立,当出现一个不合格产品时即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X,求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$. (2000 年数学一试题)

【分析】 题中仅有一个随机变量 X,欲求其期望与方差,需先求出 X 的分布.这属于用一个离散型随机变量描述一个具体试验的基本问题,很容易解决.记 $q = 1 - p$,有

$$P\{X = n\} = pq^{n-1}, n = 1,2,\cdots,$$

对于取无穷可列值的离散型随机变量 X,其期望和方差的计算属级数求和问题,本题中由于 X 服从参数为 p 的几何分布,因此涉及的是幂级数求和.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty}(q^n)' = p(\sum_{n=1}^{\infty}q^n)' = p(\frac{q}{1-q})' = \frac{1}{p},$$

而

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2pq^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)pq^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1}$$

$$= pq\sum_{n=1}^{\infty}(q^n)'' + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},$$

或

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2pq^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty}[q(q^n)']' = p[q(\sum_{n=1}^{\infty}q^n)']' = \frac{2-p}{p^2},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

本题既考查了概率论中求一个离散型随机变量概率分布及期望、方差的基本概念与基本方法,又考查了幂级数在其收敛区间内的逐项可微性质,是集概率论与高等数学知识于一题的综合应用题,其难度主要在后者,特别是对于 $E(X^2)$ 的计算.

4. 试题的论证性较强

为了考查考生的逻辑推理能力以及抽象思维能力,高等数学部分年年必考论证题.从 1991 年至 2000 年的试卷不难看出,论证题主要分布在极限、零点、不等式、级数收敛等范围,这些试题中涉及中值定理的尤其多.由于一些考生对定理理解不透彻,或审题不严或定理成立的条件不清楚,糊里糊涂或不管三七二十一的乱用定理公式的现象常有发生,要学会从题目已知条件出发进行分析推导逐步向结论靠拢,提高自己的推理能力.

【例 14】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k,使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$,且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$.证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的. (1998 年数学一试题)

【分析】 在线性代数证明题中,线性相关、线性无关是常见的.用定义法证明是一种基本的方法:通常是假设

$$l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2\boldsymbol{A\alpha} + \cdots + l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \quad ①$$

然后设法证明 $l_1, \cdots, l_k$ 必全为 0 ($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关),否则线性相关.为此,需对 ① 式恒等变形.恒等变形的思路有两种,一是拆项重组;一是同乘,究竟用哪种方法要分析已知条件.现在 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,因此可用 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 左乘 ① 式,并利用 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = \boldsymbol{0}$,从而有

$$l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0},$$

进而可知 $l_1 = 0$,类似可证 $l_2 = \cdots = l_k = 0$.

线性代数证明题的方法是基础的,比起微积分的证明题要容易得多.考生应当注意这一现象.

5. 试题注重应用能力的考查

考试大纲规定要考查考生综合运用所学知识解决实际问题的能力,近几年来一直有数学建模

的考题,考生复习时应当注意这一方面,既要会用数学方法描述,求一些几何量与物理量及其极值,也要学会用微元分析法处理问题.

在概率论和数理统计的试题中,也有许多综合题和应用题,既考查基础知识(一般包含多个知识点),又考查综合所学知识分析问题,从实际问题中找出数学模型、最终解决问题的能力.

【例15】 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间[10,30]上均匀分布的随机变量,而经销商店进货数量为区间[10,30]中的某一整数,商店每销售一单位商品可获利500元;若供大于求则削价处理,每处理1单位商品亏损100元;若供不应求,则可从外部调济供应,此时每1单位商品仅获利300元.为使商店所获利润期望值不少于9280元,试确定最少进货量. (1998年数学四试题)

【分析】 对于实际应用题,将实际中涉及的量赋予概率中的数学符号是前提.如本题中应先设进货数量为 a,周利润为 Y(元).在概率的应用题中有时涉及到不止一个随机变量,这就需要根据题意正确建立起有关随机变量的函数关系 $Y=g(X)$.这是对考生解决实际应用问题能力的考查,也是关键的一步,具体到本题

$$Y=g(X)=\begin{cases}500a+300(X-a), & a<X\leqslant 30,\\ 500X-100(a-X), & 10\leqslant X\leqslant a.\end{cases}$$

利润期望值的计算是求一个连续型随机变量 X 的函数期望,可以直接应用公式计算:

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x\\&=-7.5a^2+350a+5250.\end{aligned}$$

最后建立满足实际要求条件的不等式,并求解

$$-7.5a^2+350a+5250\geqslant 9280,$$

解得 $$20\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 26.$$

还要指出的是由于进货数量 a 是一整数,因此正确的答案是21单位,而不是 $20\dfrac{2}{3}$ 单位.

四、考生复习中应注意的问题

1. 要充分重视考试大纲,逐条分析,认真领会,复习要紧扣考试大纲.

2. 要全面系统认真地复习,只想靠猜题碰碰运气是很难成功的.

3. 要注重基本概念、基本方法和基本原理的复习,要做基础题,要防止眼高手低,华而不实.

4. 注意突出重点,全力突破重点难点,对重点题型的思路、方法及计算要过关.

5. 搞清知识之间的内在联系,条理要清晰,知识要成网,提高综合分析能力,认真研读一本复习资料.建议考生在使用该书之前认真研读由**北京大学李正元、清华大学李永乐、中国人民大学袁荫棠**主编、国家行政学院出版社出版的《**2001年考研数学复习全书**》**(理工类)**.