HUA LUO GENG SHU XUE AO LIN PI KE JIAO CAI

# 华罗庚数学

# 奥林匹克教材

初三年级

知識出版社

华罗庚数学系列

华罗庚数学奥林匹克教材编写组

# 华罗庚数学奥林匹克教材

初三年级

知識出版社

策划设计:可一工作室
责任编辑:盛　力　邓　茂

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚数学奥林匹克教材．初三年级/单　墫主编　王巧林编著.—
北京:知识出版社,2002.4
ISBN 7-5015-3385-7

Ⅰ.华...　Ⅱ.①单...②王...　Ⅲ.数学课—初中—教材
Ⅳ.G634.601
中国版本图书馆 CIP 数据核字　(2002)第 025298 号

编　　者:华罗庚数学奥林匹克教材编写组
出版发行:知识出版社
北京阜成门北大街 17 号
电话:88390786　邮编:100037
http://www.ecph.com.cn
印　　刷:南京玄武湖印刷实业有限公司
经　　销:全国新华书店

版　　次:2002 年 5 月第 1 版
印　　次:2002 年 5 月第 1 次印刷
印　　张:9.25
开　　本:850×1168　1/32
字　　数:213 千字
ISBN 7-5015-3385-7/G·1783
定　　价:11.50 元

# 纪念华罗庚先生

# 华罗庚数学奥林匹克教材编委会

总　　编:单　墫　(南京师范大学数学系教授、博士生导师)

一年级主编:韩素珍　中学高级教师　(南京市1-6届“华杯赛”集训队教练)

二年级主编:狄昌龙　小学特级教师　(南京市1-2届“华杯赛”集训队教练)

三年级主编:陈连生　小学高级教师

(金坛市3届、5届、6届、7届“华杯赛”集训队教练,被“华杯赛”组委会授于“金牌教练”称号)

四年级主编:陈连生　小学高级教师

(金坛市3届、5届、6届、7届“华杯赛”集训队教练,被“华杯赛”组委会授于“金牌教练”称号)

五年级主编:冯惠愚　小学特级教师

(中国数学奥林匹克高级教练、南京市1-7届“华杯赛”教练)

六年级主编:潘娉姣　中学高级教师　(南京市1-4届“华杯赛”集训队教练)

初一年级主编:单　墫　教授、博士生导师　(“华杯赛”4-7届的主试委员)

初二年级主编:朱建明　中学高级教师　(南京市4~7届“华杯赛”集训队教练)

初三年级主编:王巧林　(南京市4~6届“华杯赛”集训队教练)

高一年级主编:冯惠愚　小学特级教师

(中国数学奥林匹克高级教练、南京市1-7届“华杯赛”教练)

高二年级主编:潘春雷　中国数学奥林匹克高级教练、南京市数学奥校主教练

*　*　*

本册主编:王巧林

本册编委:王巧林　蒋志君　吴安宝

# 前　言

单墫

华罗庚先生(1910－1984)是本世纪的一位大数学家。他对我国数学界的影响极为巨大，在一定意义上可以说:“没有华罗庚，就没有现代的中国数学”。

华先生不仅在数学研究上具有国际一流的水准，而且热心于数学普及与人才的培养。他亲自撰写了许多通俗的数学读物，发起并主持我国的数学竞赛。他还给青少年作讲座，介绍自己的经验和心得。华先生是青少年学习的楷模,他“精勤不倦、自强不息”的精神,永远激励着广大青少年奋发向上。

为了纪念华罗庚先生，在他的家乡江苏金坛有华罗庚中学，而且自1985年在全国范围内举行了华罗庚金杯少年数学邀请赛(本书简称为“华杯赛”)。我们这套教材称为《华罗庚数学奥林匹克教材》,也正是为了纪念华罗庚先生的科学精神和卓越贡献。

这套教材是由江苏省暨金坛市从事数学竞赛培训的大、中、小学教师编写的,其中有博士生导师、教授、特级教师、校长、教研员及“华杯赛”的教练。它可以为各种数学竞赛提供系统全面的训练,从小提高学生的数学能力,具有很强的针对性与实用性,尤其

适用于“华杯赛”。

本教材，可用于数学兴趣学校和各种奥林匹克学校的课堂教学。每一册供一个年级使用。每册分为上、下两分册，用于上、下两个学期。每一分册约15讲，每讲至少6道例题，用于100分钟（两节课）的教学，内容由浅入深，循序渐进，适合学生的年龄特点与知识结构。每讲配备较多的习题，习题均有详细解答，可供教师及有条件辅导的家长使用。

一、二册，用于小学低年级，目的在培养学生学习数学的兴趣与数学的感觉，力求图文并茂，由较多的图画自然地向较多的数学言语与文学叙述过渡。三、四、五册目的在打好基础，开拓眼界，逐步向“华杯赛”的要求靠拢。六、七两册，完全瞄准数学竞赛，相当于百米比赛的冲刺阶段，其中有较难的问题，并为临赛前的强化训练，各编写了10套综合练习，供培训选手的指导教师选用。八、九、十册是配合现行初中数学教材，既瞄准初中数学奥林匹克竞赛又瞄准各省市重点高中入学考试；十一、十二、十三册则是配合现行高中数学教材，既瞄准高中数学奥林匹克竞赛又瞄准全国高考，难易结合，竞赛和中高考结合，具有很强的实战性。另外，各册既互相联系，又独立成书，内容上略有重叠，这正好形成螺旋式的教学，对学生的学习是十分有益的。

例题、练习尽量选自各种竞赛，并注明出处，这也是本书的特色之一（为适合本书的体例，不少数学题目的文字作了一点修改）。

（单墫总编系南京师范大学数学系教授、博士生导师）

# 目　　录

## 上　　册

# 下　　册

# 上　册

## 第一讲　一元二次方程根的判别式

一元二次方程是初中学生参加中考、竞赛的重要内容.解一元二次方程的重点是掌握一元二次方程的求根公式.

对于字母系数的一元二次方程问题,在解题时需对字母系数加以分析、讨论、判断;设而不求是研究一元二次方程公共解的基本方法;讨论一元二次方程整数根问题是研究一元二次方程的解的永恒内容.

在解决一元二次方程问题的过程中,常常涉及到判别式、根与系数关系、完全平方数、整数性质、因式分解、因数分解等重要的知识与方法.下面分3讲来分别阐述这些问题.

**【例1】** 已知 $a$、$b$、$c$ 是不全为0的3个实数,那么关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)=0$ 的根的情况

是(　　).

(A)有2个负根　　(B)有2个正根

(C)有2个异号的实根　　(D)无实根

(1997年江苏省初中数学竞赛试题)

**分析**　要判断1个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况,首先想到判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

若 $\Delta>0$,方程有2个不相等的实数根;

若 $\Delta=0$,方程有2个相等的实数根;

若 $\Delta<0$,方程无实数根.

**解**　方程 $x^2+(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)=0$ 的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=(a+b+c)^2-4(a^2+b^2+c^2)\\&=-3a^2-3b^2-3c^2+2ab+2bc+2ca\\&=(-a^2+2ab-b^2)+(-b^2+2bc-c^2)+(-c^2+2ca\\&\quad-a^2)-a^2-b^2-c^2\\&=-[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+a^2+b^2+c^2]\end{aligned}$$

$\because a$、$b$、$c$ 不全为0

$\therefore \Delta<0$

$\therefore$ 原方程无实数解

故选D.

**注**　本题在判断 $\Delta$ 的正负过程中,用到了配方的技巧,这也是常用的技巧,同学们务必掌握.

**【例2】**　已知方程 $2x^2-2ax+3a-4=0$ 没有实数根,那么代数式 $\sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|$ 的值是(　　).

(A)2　　(B)5　　(C)$2a-6$　　(D)$6-2a$

(1994年安徽省初中数学竞赛试题)

**分析**　由方程 $2x^2-2ax+3a-4=0$ 没有实数根,首先想到 $\Delta<0$.即

$$\begin{aligned}\Delta&=(-2a)^2-4\times2\times(3a-4)\\&=4a^2-24a+32\end{aligned}$$

$=4(a-2)(a-4)<0$

解得　$2<a<4$

而$\sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|=|a-4|+|2-a|$

$\because 2<a<4$

$\therefore \sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|=4-a+a-2=2$

故选 A.

**【例 3】** 如果方程$(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$只有一个实数根,那么方程$(m+1)x^2-2mx+m-2=0$(　　).

(A)没有实数根　　(B)有 2 个不同的实数根

(C)有 2 个相等的实数根　　(D)实数根的个数不能确定

(第 8 届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题)

**分析**　特别注意:方程$(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$只有 1 个实数根.

若$m+2\neq 0$,则方程要么有 2 个根(相等或不相等),要么没有实数根.条件指明,该方程只有 1 个实数根,所以$m+2=0$,并且$m+1\neq 0$.

**解**　$\because$方程$(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$只有 1 个实数根,$\therefore m+2=0$,得$m=-2$.于是方程$(m+1)x^2-2mx+m-2=0$即为方程

$$-x^2+4x-4=0 \tag{*}$$

(*)的$\Delta=0$　$\therefore$选 C.

**注**　(*)配方得$(x-2)^2=0$,可以得到(*)有 2 个相等的实数根$x_1=x_2=2$.

**【例 4】** 设 $a$、$b$、$c$ 为互不相等的非零实数.

求证:3 个方程

$$ax^2+2bx+c=0$$
$$bx^2+2cx+a=0$$
$$cx^2+2ax+b=0$$

不可能都有 2 个相等的实数根.

（1997 年山东省初中数学竞赛试题）

**分析** 本题若分别考虑 3 个方程的根的情况，则不太容易找到突破口. 于是我们把 3 个方程作为 1 个整体来考虑，问题则容易解决.

**解** 假设题中 3 个方程都有 2 个相等的实数根，则有

$$\begin{cases}\Delta_1=4b^2-4ac=0\\ \Delta_2=4c^2-4ab=0\\ \Delta_3=4a^2-4bc=0\end{cases}$$

三式相加得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \quad ①$$

即

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \quad ②$$

所以 $a=b=c$. 这与已知条件矛盾

所以题中的 3 个方程不可能都有 2 个相等的实数根.

**另解** 设 3 个方程的判别式分别为 $\Delta_1$、$\Delta_2$、$\Delta_3$，由 $a$、$b$、$c$ 不全相等，得 $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0$，$\therefore \Delta_1$、$\Delta_2$、$\Delta_3$ 中至少有 1 个大于 0，即至少有 1 个方程有不等的实数根.

**注** 将①式转化为②式，是常用的技巧. 这个技巧曾在例 1 中运用过.

**【例 5】** 已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq0)$ 有 2 个异号实根 $m$ 和 $n$，且 $m<|m|$，那么二次方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 的根的情况是(　　).

(A)有 2 个负根　　(B)有 2 个正根

(C)2 根异号　　(D)无实根

（1997 年陕西省初中数学联合竞赛试题）

**分析** 本题首先判断方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 是否有根，若有根，再判断是正根还是负根.

**解** $\because$ 方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq0)$ 有 2 个异号实根 $m$ 与 $n$，且 $m<|m|$

$\therefore m<0, n>0$，且 $mn=\dfrac{c}{a}<0, n-m>0$

而方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= a^2(m-n)^2+4ac\\ &= a^2\left[(m-n)^2+4\frac{c}{a}\right]\\ &= a^2\left[(m-n)^2+4mn\right]\\ &= a^2(m+n)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

故必有 2 个实根.

设该方程的 2 个实根为 $x_1, x_2$，则

$x_1+x_2=\dfrac{a}{c}(n-m)<0, x_1x_2=-\dfrac{a}{c}>0$

$\therefore x_1<0, x_2<0$

故选 A.

# 练习一

1. 如果正数 $a$、$b$、$c$ 满足 $b>a+c$，那么关于 $x$ 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是(　　).

(A)有 2 个不相等的实根　　(B)有 2 个相等的实根

(C)没有实根　　(D)无法确定有无实根

(1995 年广州、洛阳、福州、武汉、重庆初中数学联赛试题)

2. 满足 $x^2+7x+c=0$ 有实根的最大整数 $c$ 是(　　).

(A)4　　(B)8

(C)10　　(D)12

(2000 年美国犹他州数学竞赛 7～9 年级试题)

3. 已知二次方程 $(ab-2b)x^2+2(b-a)x+2a-ab=0$ 有 2 个相等的实数根，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$____.

(第 9 届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题).

4. 已知 $x^2-ax+3-b=0$ 有 2 个不相等的实数根；$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有 2 个相等的实数根；$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根，则 $a$，$b$ 的取值范围是(　　).

(A)$2<a<4$，$2<b<5$　　(B)$1<a<4$，$2<b<5$

(C)$1<a<4$，$1<b<5$　　(D)$2<a<4$，$1<b<5$

(1996 年江苏省初中数学竞赛试题)

5. 设 $t$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的 1 个实数根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2at+b)^2$ 的大小关系是(　　).

(A)$\Delta>M$　　(B)$\Delta=M$

(C)$\Delta<M$　　(D)不能确定

(第 8 届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题)

6. 已知关于 $x$ 的方程 $|x^2-2\sqrt{3}x+1|=k$ 有 4 个不同的实根. 求 $k$ 的变化范围.

（1993 年合肥市初中数学竞赛试题）

**7.** 设 $\Delta$ 为整数系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式.

(1)4、5、6、7、8 五个数值中，哪几个能作为 $\Delta$ 的值？分别写出 1 个相应的二次方程.

(2)请你从中导出一般规律——一切整数中，怎样的整数值不能作为 $\Delta$ 的值，并给出证明.

（1993 年浙江省初中数学竞赛试题）

# 第二讲　根与系数的关系(一)

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根为 $x_1$、$x_2$，则有

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a(x-x_1)(x-x_2)\\
&= ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2
\end{aligned}
$$

$$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

这两个式子称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与系数的关系.

根与系数的关系是各类考试的重点，是一元二次方程的灵魂.

**【例1】** 已知关于 $x$ 的二次方程 $2x^2-5x-a=0$(其中 $a$ 为常数).若两根之比 $x_1:x_2=2:3$，则 $x_2-x_1$ 的值为(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)1　　(C)$\frac{3}{2}$　　(D)2

(1999 年江苏省初中数学竞赛试题)

**解**　$\because x_1:x_2=2:3$　$\therefore$可设 $x_1=2k$，$x_2=3k$，由根与系数的关系得

$$x_1+x_2=\frac{5}{2}\quad \therefore 5k=\frac{5}{2}\quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

从而 $x_2-x_1=3k-2k=k=\frac{1}{2}$

故选 A.

**注**　题中的 $a$ 与解题没有关系，千万不要把 $a$ 绕进去.

**【例2】** 已知 $a$ 为整数，方程 $x^2+(2a-1)x+a^2=0$ 的两实根为 $x_1$、$x_2$，则$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=$______.

(1997 年安徽省初中数学竞赛试题)