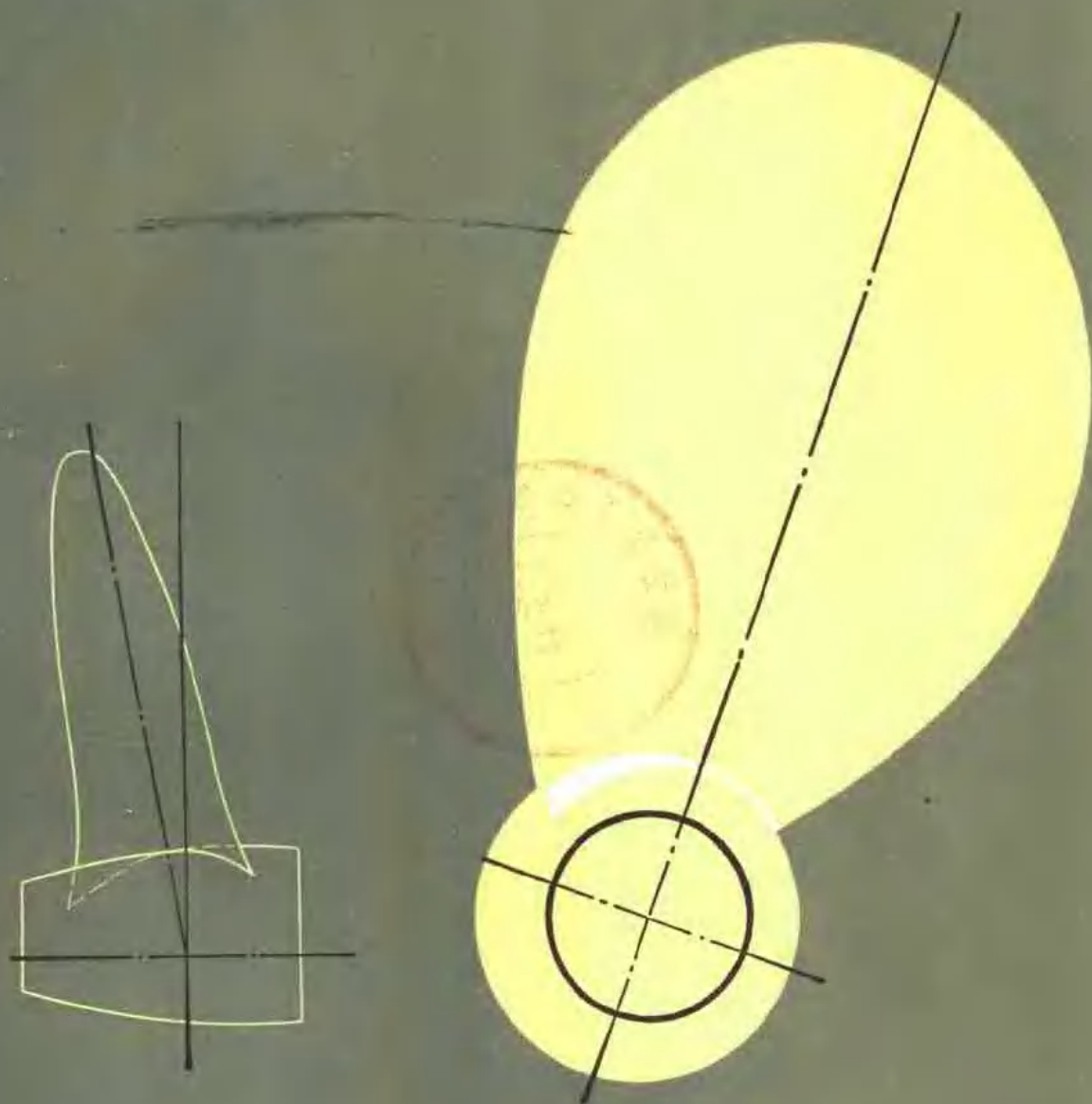


高等学校教学参考书

画法几何在科学技术中的应用

朱 辉 孟嘉庚 主编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

画法几何 在科学技术中的应用

朱 辉 孟嘉庚 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是在中国纺织大学为研究生、本科大学生选修而开设的“图解法在科学技术中的应用”教材基础上，根据教学实践经验，进一步充实收编而成。

本书内容结合实际，涉及有关数学、物理、化学等基础学科和刀具、夹具、机械加工、空间机构等工程实际的应用，将图解法与算法结合在一起，叙述简明扼要，文字通顺，形象直观。有关理论、方法，符合科学性要求，有一定实用价值。各章起点一致，适合青年教师、研究生、有关专业大学生和工程技术人员参考。

本书由高等学校工科画法几何及工程制图教材编审委员会委托南昌航空工业学院刘荣光同志审阅，并在1984年召开的编审委员会重庆会议上评审通过，同意推荐出版。

高等学校教学参考书

画法几何在科学技术中的应用

朱 辉 孟嘉康 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市印刷三厂印装

*

开本787×1092 1/16 印张13 字数289,000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数00,001—36300

书号15010·0762 定价2.20元

前 言

在科学技术中，特别在工程技术中，经过分析可以得知，其中存在着许多空间几何问题。为了解决这些科学技术问题就需要采用适当的方法，而画法几何学就是研究在平面上图示与图解空间几何问题的一种主要方法。由于一般科技人员，特别是工程技术人员对投影概念比较清楚，对画法几何方法是熟悉的，因此也就易于掌握并应用画法几何方法来研究与解决科学技术中空间几何问题。为了提高解题的精确性，在应用画法几何方法的同时，也应用计算方法，这种将图解法与算法相结合的方法，通常称为图解算法，它能使解题简单明了，形象直观，易于掌握，而且具有所需的精确性。

中国纺织大学从1980年起为本科大学生开设“图解法在科学技术中的应用”选修课。后来，1982年开始又为工程图学研究生讲授该课程。为此，我们编写了相应的教材，本书就是在该教材基础上进一步充实收编而成的。

关于画法几何在科学技术中的应用这方面的论文与资料大多还散见于一些科技杂志和交流资料中，系统性的专著还不多见。编写本书时，力求搜集有关论著、资料中的应用实例，同时结合编者的研究心得，经过分析整理，加以系统化，理论化，并且努力反映其实用价值。

参加本书编写的有朱辉、孟嘉庚、童伟昌、鲍家明、王继成、吴大明。由朱辉、孟嘉庚担任主编。

编者对本书所参阅的有关论著的作者表示深切感谢，对热心关怀本书编写的同行专家表示诚挚敬意。

由于我们水平有限，对本书不足之处敬请广大读者提出宝贵意见与建议。

编 者

1985年8月于中国纺织大学

ABK 5/06

目 录

第一章 几何元素的投影与变换	1
§ 1-1 变换投影面时几何元素的投影与变换	1
§ 1-2 几何元素旋转时的投影与变换	7
第二章 画法几何在数学、物理、化学中的应用	13
§ 2-1 在线性规划中的应用	13
§ 2-2 在力学中的应用	17
§ 2-3 在光学中的应用	31
§ 2-4 在晶体结构中的应用	43
§ 2-5 在化学图中的应用	48
第三章 画法几何在图示曲面零件中的应用	52
§ 3-1 在图示螺旋面外形零件中的应用	52
§ 3-2 在图示共轭曲面外形零件中的应用	67
第四章 画法几何在刀具设计中的应用	78
§ 4-1 在车刀设计中的应用	78
§ 4-2 在铣刀设计中的应用	97
§ 4-3 在刨刀设计中的应用	109
§ 4-4 在钻头设计中的应用	113
§ 4-5 在计算机辅助设计成形车刀中的应用	120
第五章 画法几何在夹具设计中的应用	129
§ 5-1 在孔加工夹具设计中的应用	129
§ 5-2 在平面加工夹具设计中的应用	136
第六章 画法几何在机械加工中的应用	156
§ 6-1 在斜孔加工中的应用	156
§ 6-2 在斜面加工中的应用	161
§ 6-3 在技术测量中的应用	169
第七章 画法几何在空间机构中的应用	175
§ 7-1 在空间机构分析中的应用	175
§ 7-2 在空间机构综合中的应用	184
§ 7-3 在求解机械手的直接位置和间接位置中的应用	188

主要参考文献

第一章 几何元素的投影与变换

在图解计算科学技术中的空间问题时，往往需要用“形”与“数”来确定其投影位置与空间位置的关系，即一方面将处于一定空间位置的形体在平面上表达为一定位置的投影，另一方面也需要从已知的投影位置反过来确定空间形体的位置。此外，为了便于求解，往往将形体对投影面体系的一般位置变换为特殊位置，这就是所谓投影变换。投影变换在画法几何中常用的方法是变换投影面法和旋转法。由于工程技术中旋转是常见的一种运动形式，因此旋转法的一些基本性质和投影规律对于研究形体的空间运动亦是十分有用的。

由于形体的基本几何元素是点、直线和平面，因此本章着重说明它们的投影和变换规律。本章所列的一系列公式对以后各章讨论在工程技术各方面的应用都要得到引用。

§ 1-1 变换投影面时几何元素的投影与变换

(一) 点的投影与变换

设已知空间点 A ，其坐标为 (x_A, y_A, z_A) 。其水平投影 a 由坐标 (x_A, y_A) 决定。同样，其正面投影 a' 、侧面投影 a'' ，分别由 (x_A, z_A) 、 (y_A, z_A) 决定(图 1-1)。

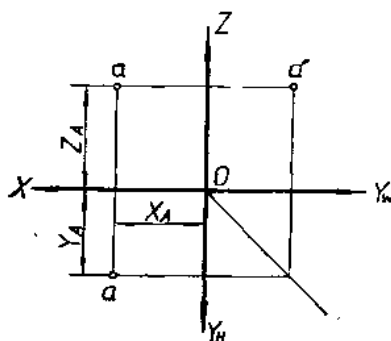


图 1-1 点的投影与坐标

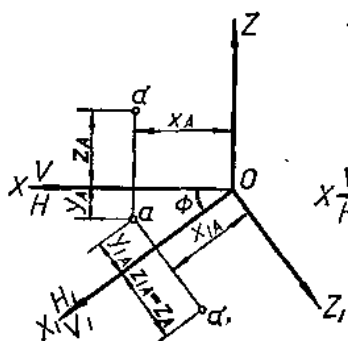


图 1-2 点的变换(一)

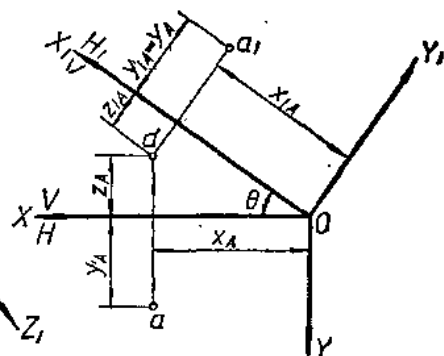


图 1-3 点的变换(二)

如用投影面 V_1 来代替已知投影面 V (图 1-2)，则 A 点在 V_1 面上的投影为 a'_1 ， $a'_1 = a'$ 为不变投影。这时 A 点处于 $O-X_1Y_1Z_1$ 坐标体系中，如 V 、 V_1 面的夹角为 ϕ ，则 A 的新坐标 (x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}) 与原来的坐标关系如下：

$$\left. \begin{aligned} x_{1A} &= x_A \cos \phi + y_A \sin \phi \\ y_{1A} &= x_A \sin \phi - y_A \cos \phi \\ z_{1A} &= z_A \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

同理，如变换 H ，即以投影面 H_1 来代替 H 面(图 1-3)，两投影面的夹角为 θ ，则 A 点在 $O-X_1Y_1Z_1$ 坐标体系中的坐标 (x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}) 与原来的坐标关系如下：

$$\left. \begin{aligned} x_{1,1} &= x_A \cos \theta + z_A \sin \theta \\ y_{1,1} &= y_A \\ z_{1,1} &= x_A \sin \theta - z_A \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

(二)直线的投影与变换

1. 直线的投影与坐标方程 如图 1-4 所示, 已知直线 AB 由两空间点 $A(x_A, y_A, z_A)$ 、 $B(x_B, y_B, z_B)$ 所决定, 其坐标方程为:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A} \quad (1-3)$$

或

$$\frac{x-x_A}{l} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n} \quad (1-4)$$

式中 l 、 m 、 n 分别为直线对 X 、 Y 、 Z 轴的方向数。

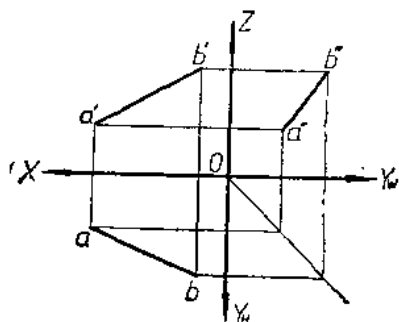


图 1-4 直线的投影

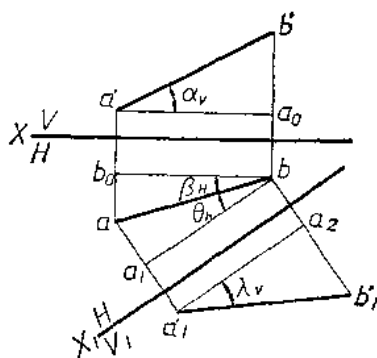


图 1-5 直线变换前后投影角之间的关系

设直线 AB 对 H 、 V 、 W 面的倾角为 α 、 β 、 γ , 则直线的各个投影 ab 、 $a'b'$ 、 $a''b''$ 与线段 AB 的实长关系如下:

$$\left. \begin{aligned} ab &= AB \cos \alpha \\ a'b' &= AB \cos \beta \\ a''b'' &= AB \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

2. 直线的投影变换与空间角度计算 如图 1-5 所示, 直线 AB 在 H 、 V 面上的投影为 ab 、 $a'b'$, 其与 X 轴的夹角分别为 β_H 、 α_V , 这些角度称为直线的投影角。经投影变换后, AB 的投影为 a_1b_1 、 $a_1'b_1'$, 它们与 X_1 轴的夹角分别为 θ_H 、 λ_V 。由于:

$$\operatorname{tg} \alpha_V = \frac{b'a_0}{a'a_0}$$

$$\operatorname{tg} \lambda_V = \frac{b'_1a_2}{a'_1a_2}$$

$$\cos \beta_H = \frac{b_0b}{ab}$$

$$\cos \theta_H = \frac{a_1 b}{ab}$$

由此可得:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_V}{\operatorname{tg} \lambda_V} = \frac{\cos \theta_H}{\cos \beta_H} \quad (1-6)$$

此即为直线投影角的变换公式。

当 $\theta_H = 0$, λ_V 即为直线 AB 对 H 面的倾角 α (图 1-6), 由公式 (1-6) 可推得:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_V \cos \beta_H \quad (1-7)$$

类似地可推得:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_H \cos \alpha_V \quad (1-8)$$

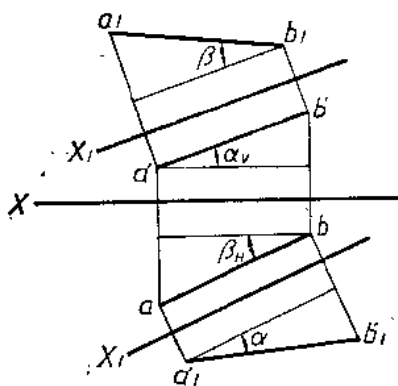


图 1-6 直线的倾角与投影角的关系

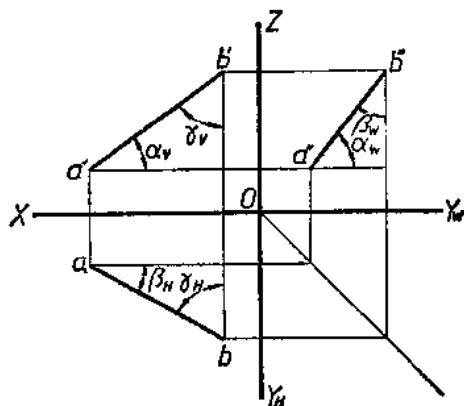


图 1-7 三投影面体系中直线的投影角

如图 1-7 所示为直线在三投影面体系中的情况。投影角分别为 α_V 、 γ_V 、 β_H 、 γ_H 、 α_W 、 β_W 。这些投影角可认为是直线的倾角 α 、 β 、 γ 分别在 H 、 V 、 W 面上的投影。利用上述方法可推得:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_W \cos \gamma_V \quad (1-9)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma_V \cos \beta_H \quad (1-10)$$

公式 (1-7)、(1-8)、(1-9)、(1-10) 即为直线的倾角与投影角的关系公式。

由公式 (1-8)、(1-9) 可推得:

$$\operatorname{tg} \beta_H \cos \alpha_V = \operatorname{tg} \beta_W \cos \gamma_V$$

因

$$\cos \gamma_V = \sin \alpha_V$$

$$\operatorname{tg} \beta_H = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_H}$$

即得:

$$\operatorname{tg} \alpha_V \operatorname{tg} \gamma_H \operatorname{tg} \beta_W = 1 \quad (1-11)$$

此即为直线投影角的正切定理公式。

(三) 平面的投影与变换

1. 平面的投影与方程 平面在空间的一般方程可写为:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1-12)$$

式中 A 、 B 、 C 、 D 为系数。也可写成下列形式:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1-13)$$

此种形式称为截距式, 比较式(1-12)、(1-13), 可见:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

如将平面投影表达为迹线形式, 则 a 、 b 、 c 分别表示迹线集合点 P_x 、 P_y 、 P_z 与 O 点的距离(图 1-8)。

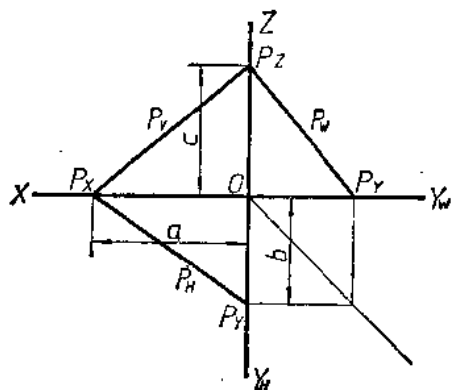


图 1-8 平面的截距式与迹线平面的关系

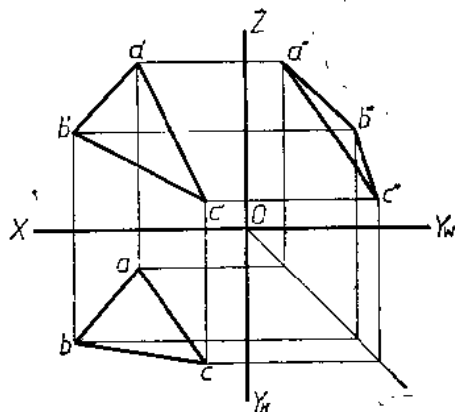


图 1-9 平面的三点式与平面投影的关系

如已知 $A(x_A, y_A, z_A)$ 、 $B(x_B, y_B, z_B)$ 、 $C(x_C, y_C, z_C)$ 三点, 则其平面方程可写成下列形式:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0 \quad (1-14)$$

与公式(1-12)对比, 可知系数 A 、 B 、 C 为:

$$A = \begin{vmatrix} y_B - y_A & z_B - z_A \\ y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} z_B - z_A & x_B - x_A \\ z_C - z_A & x_C - x_A \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$$

$\triangle ABC$ 的各个投影 $\triangle abc$ 、 $\triangle a'b'c'$ 、 $\triangle a''b''c''$ 均可由已知坐标值作出(图 1-9), 设平面对 H 、 V 、 W 面的倾角为 α_1 、 β_1 、 γ_1 , 则各个投影面积与实形面积的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \triangle abc &= \triangle ABC \cos \alpha_1 \\ \triangle a'b'c' &= \triangle ABC \cos \beta_1 \\ \triangle a''b''c'' &= \triangle ABC \cos \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

2. 平面的投影变换与空间角度计算 如图 1-10 所示为平面 P 的迹线表示法, 迹线 P_H 、 P_V 、 P_W 对 X 、 Y 、 Z 轴的夹角为 β_{1H} 、 γ_{1H} 、 α_{1V} 、 γ_{1V} 、 α_{1W} 、 β_{1W} , 这些角度称为迹线投影角。图 1-11 所示为平面经过投影变换后的情况, 由于 X_1 轴垂直 P_H , 因此变换后的迹线 P_{V_1} 与 X_1 轴的夹角即反映平面对 H 面的倾角 α_1 。

由于

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{n_1 n'_1}{P_{X_1} n'_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1V} = \frac{nn'}{P_X n}, \quad \sin \beta_{1H} = \frac{P_{X_1} n_1}{P_X n}$$

则得,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V}}{\sin \beta_{1H}} \quad (1-16)$$

类似地可推得:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_{1H}}{\sin \alpha_{1V}} \quad (1-17)$$

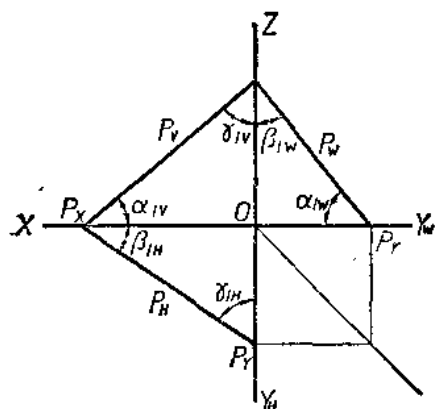


图 1-10 平面的迹线投影角

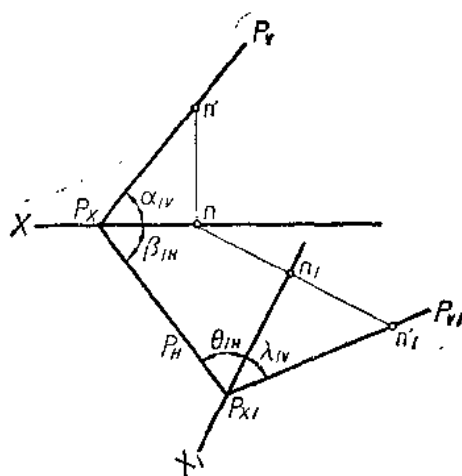


图 1-11 平面倾角与迹线投影角的关系

利用 P_V 、 P_W 的迹线投影角可推得:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\operatorname{tg} \gamma_{1V}}{\sin \beta_{1W}} \quad (1-18)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_{1W}}{\sin \gamma_{1V}} \quad (1-19)$$

以上式(1-16)、(1-17)、(1-18)、(1-19)即为平面倾角与迹线投影角的关系公式。由式(1-17)、(1-19)可得:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_{1H}}{\sin \alpha_{1V}} = \frac{\operatorname{tg} \beta_{1W}}{\sin \gamma_{1V}}$$

由此可推得:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1V} \operatorname{tg} \gamma_{1H} \operatorname{tg} \beta_{1W} = 1 \quad (1-20)$$

此即为平面迹线角的正切定理公式。

如图 1-12 为取 X_1 轴为任一位置, 这时经变换后 P_{V_1} 、 P_H 与 X_1 轴的夹角分别为 λ_{1V} 、 θ_{1H} 。由于 H 面为不变投影面, 因此 P 对 H 面的倾角 α_1 不变。根据公式(1-16)

可得:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \lambda_{1V}}{\sin \theta_{1H}}$$

由此可得变换前后迹线投影角之间的关系式:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V}}{\operatorname{tg} \lambda_{1V}} = \frac{\sin \beta_{1H}}{\sin \theta_{1H}} \quad (1-21)$$

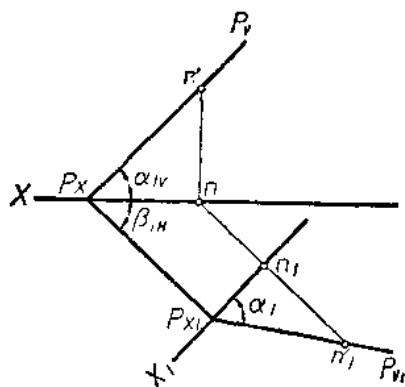


图 1-12 平面变换前后迹线投影角之间的关系

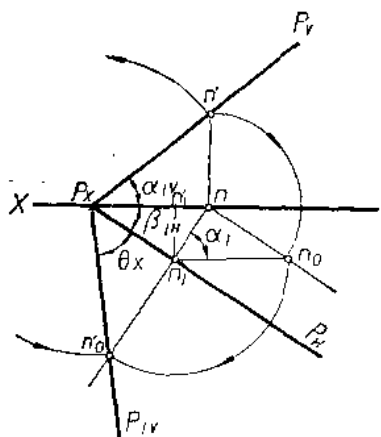


图 1-13 平面迹线角与迹线投影角之间的关系

两迹线在空间的夹角称为迹线角, $P_H P_V$ 、 $P_H P_W$ 、 $P_V P_W$ 的迹线角分别以 θ_X 、 θ_Y 、 θ_Z 表示, 这些迹线角与迹线投影角的关系可推导如下:

如图 1-13 所示, P_V 、 P_H 经投影变换后为 P_{1V} 、 P_{1H} , 后两者的夹角反映迹线角 θ_X 的实形。

由于 $\cos \theta_X = \frac{P_X n_1}{P_X n'_0}$, $\cos \beta_{1H} = \frac{P_X n_1}{P_X n}$, $\cos \alpha_{1V} = \frac{P_X n}{P_X n'}$; 而 $P_X n' = P_X n'_0$, 则得:

$$\cos \theta_X = \cos \alpha_{1V} \cos \beta_{1H} \quad (1-22)$$

类似地可推得:

$$\cos \theta_Y = \cos \gamma_{1H} \cos \alpha_{1W} \quad (1-23)$$

$$\cos \theta_Z = \cos \gamma_{1V} \cos \beta_{1W} \quad (1-24)$$

根据图 1-13 还可推出平面倾角与迹线角的关系式。由于 $\sin \alpha_1 = \frac{nn_0}{n_1 n'_0}$, $\sin \theta_X = \frac{n_1 n'_0}{P_X n'_0}$,

$\sin \alpha_{1V} = \frac{n' n}{P_X n'}$, 同时 $P_X n' = P_X n'_0$, $n' n = n n_0$, $n_1 n_0 = n_1 n'_0$, 则得:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_{1V}}{\sin \theta_x} \quad (1-25)$$

类似地可推出：

$$\sin \beta_1 = \frac{\sin \beta_{1H}}{\sin \theta_x} \quad (1-26)$$

其他平面倾角与迹线角的关系公式可类似地推得，此处不再赘述。

§ 1-2 几何元素旋转时的投影与变换

在研究某些科学技术问题时，往往需要研究其几何元素或形体的空间运动情况。通常基本运动有两种：一为平行移动（简称平移），即在运动过程中，形体上每一点的线位移均系方向相同、长度相等的平行线段；另一种为旋转运动，即在运动过程中，形体内两点恒与空间的固定两点重合，该两点的连线即为旋转轴。显然，形体绕固定轴旋转时，体上任何点的轨迹都是圆弧，其旋转半径一般不相等，但旋转角度必定相等。

由于平行移动比较简单，下面主要论述旋转运动中的几何性质与投影规律。

（一）点绕垂直轴旋转

如图 1-14 所示， A 点绕垂直投影面 H 的 OO 轴旋转到 A_1 位置，其旋转半径为 OA ，圆弧所在平面垂直于旋转轴，圆弧在与轴垂直的投影面上的投影反映实形，在与轴平行的投影面上的投影重影为一直线且与轴线的同面投影垂直。

设 A 点的坐标为 (x_A, y_A, z_A) ，绕铅垂轴逆时针旋转 ϕ 角后为 A_1 点，其坐标为 (x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}) 。旋转前、后两点的坐标关系为：

$$\left. \begin{aligned} x_{1A} &= x_A \cos \phi - y_A \sin \phi \\ y_{1A} &= x_A \sin \phi + y_A \cos \phi \\ z_{1A} &= z_A \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

当 A 点绕铅垂轴顺时针旋转 ϕ 角后为 A_1 点，旋转前、后两点的坐标关系为：

$$\left. \begin{aligned} x_{1A} &= x_A \cos \phi + y_A \sin \phi \\ y_{1A} &= -x_A \sin \phi + y_A \cos \phi \\ z_{1A} &= z_A \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

（二）直线绕垂直轴旋转

1. 直线的旋转规律与性质 如图 1-15 所示为直线 AB 绕垂直投影面 H 的轴 OO 旋转，当直线上 A 点绕 OO 轴旋转 ϕ 角，则直线上其他点也必定按同一旋转方向，绕同一轴旋转同一角度。直线在 H 面上的投影长度是不变的，即 $a_1 b_1 = ab$ ，直线对 H 面的倾角 α 也是不变的。

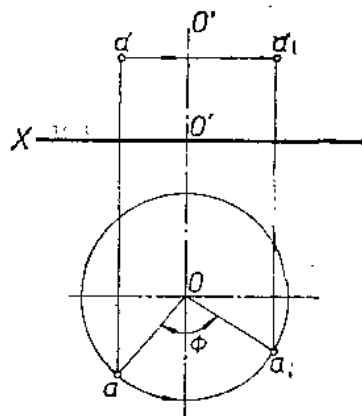


图 1-14 点的旋转

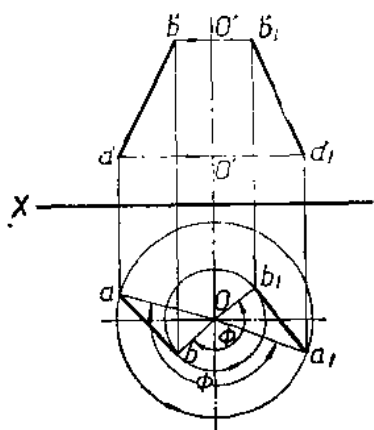


图 1-15 直线的旋转

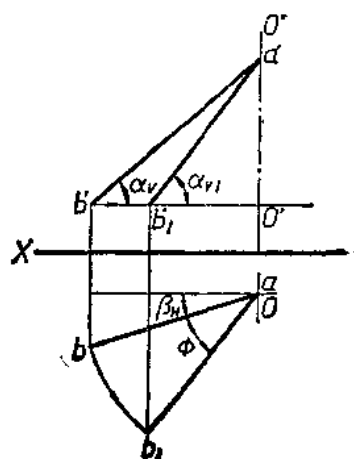


图 1-16 直线旋转时的空间角度计算

2. 直线旋转时的空间角度计算 如图 1-16 所示, 直线 AB 绕 OO 轴旋转 ϕ 角至 A_1B_1 位置, 其前、后投影角为 α_v 、 β_H , α_{v1} 、 $(\beta_H \pm \phi)$ 。式中正、负号由旋转方向决定。由于直线的倾角 α 不变, 即:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha_v \cos \beta_H \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha_{v1} \cos (\beta_H \pm \phi) \end{aligned}$$

因此得到:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{v1}}{\operatorname{tg} \alpha_v} = \frac{\cos \beta_H}{\cos (\beta_H \pm \phi)} \quad (1-29)$$

当 $\beta_H \pm \phi = 0$ 时, 则 α_{v1} 即为直线对 H 面的倾角 α , 即:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_v \cos \beta_H$$

(三) 平面绕垂直轴旋转

1. 平面的旋转规律与性质 如图 1-17 所示为平面 $\triangle ABC$ 绕垂直投影面 H 的轴 OO

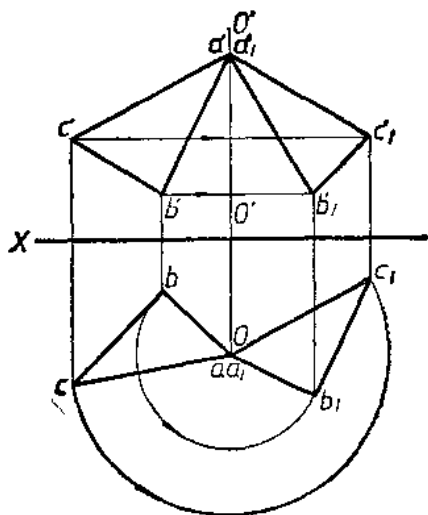


图 1-17 平面的旋转

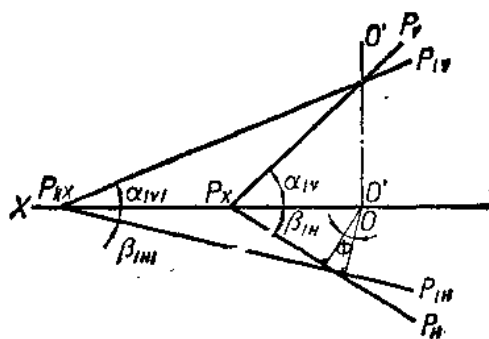


图 1-18 平面旋转时的空间角度计算

旋转, 旋转时同样符合旋转规律, 即按同一旋转方向绕同一轴旋转同一角度。平面在 H 面上的投影形状是不变的, 即 $\triangle a_1b_1c_1 = \triangle abc$, 平面对 H 面的倾角 α_1 也是不变的。

2. 平面旋转时的空间角度计算 如图 1-18 所示为一迹线平面 P 绕铅垂轴旋转 ϕ 角至 P_1 位置, 其迹线投影角分别为 α_{1V} 、 β_{1H} 、 α_{1V_1} 、 β_{1H_1} 。 $\beta_{1H_1} = \beta_{1H} \pm \phi$, 式中正、负号视旋转方向而定;

由于

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V}}{\sin \beta_{1H}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V_1}}{\sin \beta_{1H_1}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V_1}}{\sin(\beta_{1H} \pm \phi)}$$

因此得到,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V_1}}{\operatorname{tg} \alpha_{1V}} = \frac{\sin(\beta_{1H} \pm \phi)}{\sin \beta_{1H}} \quad (1-30)$$

当 $\beta_{1H} \pm \phi = 90^\circ$ 时, 则 α_{1V_1} 即为平面对 H 面的倾角 α_1 , 即

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1V}}{\sin \beta_{1H}}$$

(四) 几何元素绕平行轴旋转

几何元素绕平行轴旋转, 其有关几何性质与绕垂直轴旋转的情况是相同的, 所不同的是其旋转半径要用作图法求出。如图 1-19 所示为 $A(x_A, y_A, z_A)$ 绕水平轴 OO 旋转至与水平轴处于同一高度的位置 A_1 。设 OO 轴为过 $O(x_0, y_0, z_0)$ 与 V 面成 β 角的水平线, 则 A 点转至 A_1 点位置的转角 θ 为:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z_0 - z_A}{(x_0 - x_A) \sin \beta + (y_0 - y_A) \cos \beta} \quad (1-31)$$

绕正平轴旋转时, 其旋转角度为:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_0 - y_A}{(x_0 - x_A) \sin \alpha + (z_0 - z_A) \cos \alpha} \quad (1-32)$$

α 为正平轴与 H 面的倾角。

(五) 旋转的有序性

如图 1-20(a) 所示, 直线 AB 先绕铅垂轴 OO 旋转 θ_1 成为正平线 A_1B_1 , 然后 A_1B_1 直线再绕正垂轴 O_1O_1 旋转 θ_2 角, 成为铅垂线 A_2B_2 。图 1-20(b) 所示为 AB 直线先绕正垂轴 O_1O_1 旋转 θ_2 角, 然后再绕铅垂轴 OO 旋转 θ_1 角, 但旋转后的最后位置 A_2B_2 与图(a)的情况不一样。由此可知, 如果颠倒其旋转顺序, 即使其旋向、转角大小相同, 但最后达到的位置是不同的。这种性质称为旋转的有序性。

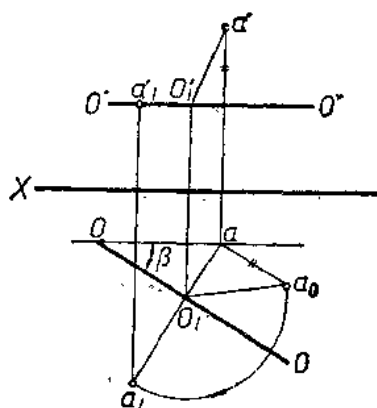


图 1-19 几何元素绕水平轴旋转

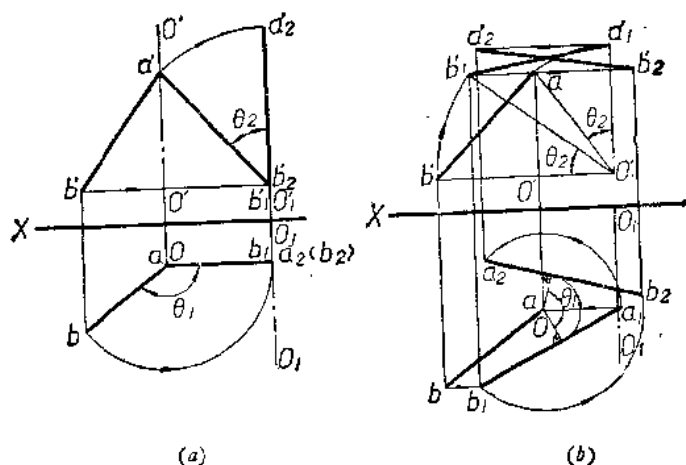


图 1-20 旋转的有序性

(六) 根据已知几何元素的旋转位置求旋转轴

1. 定理 一直线段的两个预定位置, 可以通过一次旋转, 使线段的一个位置转到另一预定位置。线段两端点的两对对应位置点的中垂面的交线为其旋转轴。

由于一对对应点在同一旋转圆周上, 其圆心轨迹为两点连线的中垂面, 直线段有两对对应点, 因此有二个中垂面, 其交线即为直线段的旋转轴。

2. 达朗倍尔定理 若一平面图形的两个预定位置中, 有一个点是两位置图形的重合点 (简称两重点), 则可通过一次旋转使平面图形从一个位置转到另一位置, 其旋转轴为一条过该两重点且为两对对应位置点的中垂面的交线。

设平面图形 $\triangle OAB$ 的两个预定位置是 $\triangle OA_1B_1$ 、 $\triangle OA_2B_2$, O 点为两重点, 则根据上述定理可使 A_1B_1 转到 A_2B_2 , 其中垂面 R 、 Q 的交线即为旋转轴, 由于 $OA_1=OA_2$ $OB_1=OB_2$, 所以 O 点必在旋转轴上, 即旋转轴通过 O 点。

如图 1-21 所示平面图形直角三角形 OAB 的两个预定位置 $\triangle OA_1B_1$ 和 $\triangle OA_2B_2$, $\triangle OA_1B_1$ 在 P 平面上, $\triangle OA_2B_2$ 在 H 面上。

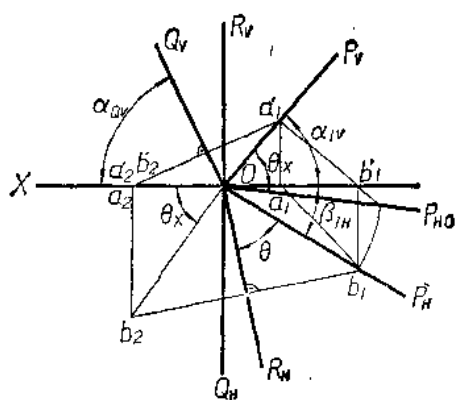


图 1-21 根据平面图形的两预定位置求旋转轴

设取两重点 O 为原点, 各点坐标为: $A_1(x_{A1}, 0, z_{A1})$, $A_2(x_{A2}, 0, 0)$, $B_1(x_{B1}, y_{B1}, 0)$, $B_2(x_{B2}, y_{B2}, 0)$ 。 A_1 、 A_2 为一对对应点, 其中垂面为 Q 平面, 这是一个正垂面, Q_V 的迹线投影角为 α_{QV} 。

$$\sin \alpha_{QV} = \frac{\sqrt{z_{A1}^2 + (x_{A2} - x_{A1})^2}}{2x_{A1}} \quad (1-33)$$

设直角三角形 OAB 的斜边 OB 长度为 l , 因此 $x_{A1} = l \cos \theta_x$, 而 $\cos \theta_x = \cos \alpha_{1V} \cos \beta_{1H}$, 又 $z_{A1} = x_{A1} \sin \alpha_{1V}$, $x_{A1} = x_{A2} \cos \alpha_{1V}$, 以此代入式 (1-33), 此处 x_{A1} 为负值, 则得:

$$\sin \alpha_{QV} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha_{1V}}{2}} \quad (1-34)$$

B_1 、 B_2 为另一对对应点, 其中垂面为 R 平面, R 平面为一铅垂面, R_H 与 X 轴的夹角为 β_{RH} , $\beta_{RH} = \beta_{1H} + \theta$, θ 角值可由下式确定:

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(y_{B2} - y_{B1})^2 + (x_{B2} - x_{B1})^2}{x_{B2}^2 + y_{B2}^2}} \quad (1-35)$$

将坐标有关公式代入式中, 则得:

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{(\sin \theta_x - \sin \beta_{1H})^2 + (\cos \theta_x - \cos \beta_{1H})^2} \quad (1-36)$$

上述的 α_{QV} 、 β_{RH} 即为旋转轴的投影角 α_V 、 β_H 。因 Q 、 R 两平面的交线的正面投影与水平投影分别与 Q_V 、 R_H 相重合。

设旋转角度为 η , 为简便起见, 可以从 A_1 旋转到 A_2 位置的几何关系来推导计算公式。

如图 1-22 所示, 将 V 面放成水平位置的情况。由图可知: O_1 为旋转中心, $\angle A_1 O_1 M = \eta/2$, OO 轴对 V 面的倾角为 β , OO 轴的投影角为 α_V 、 β_H 。由于:

$$OM = X_{A2} \cos \alpha_V$$

$$O_1 M = OM \sin \beta$$

$$A_2 M = X_{A2} \sin \alpha_V$$

所以

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{A_2 M}{OM \sin \beta} = \frac{X_{A2} \sin \alpha_V}{X_{A2} \cos \alpha_V \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_V}{\sin \beta}$$

由于

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_H \cos \alpha_V$$

因此

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_V \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_H \cos^2 \alpha_V}}{\operatorname{tg} \beta_H \cos \alpha_V} \quad (1-37)$$

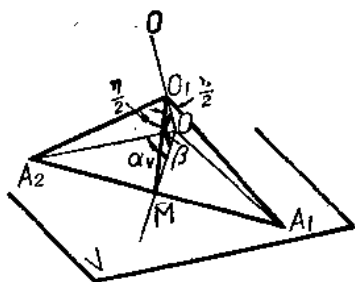


图 1-22 旋转角度的计算

如图 1-23 所示, 平面图形 S 从位于 V 面上的 S_1 位置绕轴 (l, l') 旋转到 H 面上的 S_2 位置, 显然, 这时 $\beta_{1H}=0^\circ, \alpha_{1V}=90^\circ, \theta_X=90^\circ$, 由式 (1-34) 可得:

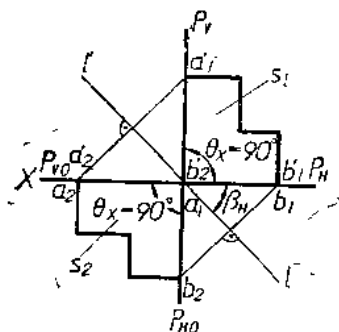


图 1-23 求旋转轴 (l, l') 及旋转角

$$\sin \alpha_{QV} = \sin \alpha_V = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \alpha_V = 45^\circ$$

由式 (1-36) 得

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

$$\beta_H = \beta_{RH} = \beta_{1H} + \theta = 45^\circ$$

由式 (1-37) 得

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\eta}{2} = 60^\circ$$

$$\therefore \eta = 120^\circ$$

3. 沙尔定理 一平面图形的任何两个预定位置, 可以通过二次旋转使平面图形从一个位置转到另一位置。

设平面图形的两个预定位置为 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 、 $\triangle A_2 B_2 C_2$, 可先通过一次旋转使 $A_1 B_1$ 转到 $A_2 B_2$, 这时 C_1 点转至 C_{11} 点, 由于 $\triangle A_2 B_2 C_{11}$ 与 $\triangle A_2 B_2 C_2$ 是全等的且共边, 因此从 C_{11} 、 C_2 向 $A_2 B_2$ 作垂线, 其垂足必为同一点, 该点即为 C_{11} 转至 C_2 的旋转中心, 其旋转轴即为 $A_2 B_2$ 。

推论: 一平面图形的任何两个预定位置可以通过一次移动和一次旋转使平面图形从一个位置转到另一位置。

因为可通过一次移动使两个平面图形的预定位置有一个两重点, 然后再通过一次旋转使平面图形的一个位置转到另一位置。

几何形体在空间的旋转可以简化为平面图形的旋转, 因此它可以由上述一些定理和推论予以保证。