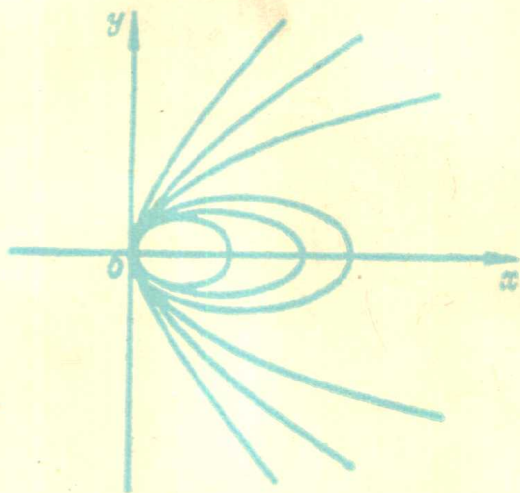


高级中学课本

平面解析几何

(甲种本)

全一册



人民教育出版社

高级中学课本
平面解析几何
全一册
(甲种本)

人民教育出版社数学室编

*

人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷一厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张6.25 字数130000

1984年9月第1版 1991年6月第7次印刷

印数 239,701—255,900

ISBN 7-107-00318-6

G·521(课) 定价 0.60 元

一、本书供六、七、八、九、十、十一、十二等高中二年级选用，每周授课2课时。

二、本书内容包括圆锥曲线、坐标变换、参数方程和极坐标四章。另外第一章中的“二元一次不等式表示的区域”和“直线型经验公式”二节，第二章中的“圆锥曲线的切线和法线”一节和第三章第三节以后的内容，仅供选学(共需14课时左右)。

三、本书习题共分四类：练习、习题、复习参考题以及总复习参考题。

1. 练习 主要供课堂练习用；

2. 习题 主要供课内、外练习用；

3. 复习参考题和总复习参考题这两类都分为A、B两组。复习参考题A组供复习本章知识时使用；总复习参考题A组供复习全书知识时使用；两类题中的B组综合性与灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用。

习题及复习参考题、总复习参考题中的A组题的题量较多，约为学生通常所需题量的1.5倍，教学时可根据情况选用。

四、本书是在中小学通用教材编写组编写的全日制十年制初中课本(试用本)《数学》第六册第六章“直线和圆的方程”和高中课本(试用本)《数学》第二册第六章“二次曲线”的基础

上编写的。初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校征求了意见，并向部分中学教师征求了意见，有的省还进行了试教。他们都提出了许多宝贵的意见。

五、本书由人民教育出版社数学室编写。参加编写的有李慧君、鲍琰、许曼阁等，全书由孙福元校订。

目 录

引言	1
第一章 直线	2
一 有向线段、定比分点	2
二 直线的方程	13
三 两条直线的位置关系	37
第二章 圆锥曲线	60
一 曲线和方程	60
二 圆	72
三 椭圆	81
四 双曲线	91
五 抛物线	103
第三章 坐标变换	128
一 平移和旋转	128
二 一般二元二次方程的讨论	142
第四章 参数方程、极坐标	156
一 参数方程	156
二 极坐标	168

引 言

我们在平面几何和立体几何里，所用的研究方法是以公理为基础，直接依据图形的点、线、面的关系来研究图形的性质。在将要学习的平面解析几何里，所用的研究方法和平面几何、立体几何不同，它是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线(包括直线)，通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质。因此可以说，解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科。

平面解析几何研究的主要问题是：

- (1) 根据已知条件，求出表示平面曲线的方程；
- (2) 通过方程，研究平面曲线的性质。

解析几何的这种研究方法，在进一步学习数学、物理和其他科学技术中经常使用。

在十七世纪，法国数学家笛卡儿创了解析几何。解析几何的产生对数学发展，特别是对微积分的出现起了促进作用，恩格斯对笛卡儿的这一发现给予了高度的评价。

第一章 直 线

一 有向线段、定比分点

1.1 有向线段、两点的距离

在初中,我们学过数轴,它是规定了原点、正方向和长度单位的直线.任意一条直线,都可以规定两个相反的方向.如果把其中一个作为正方向,那么相反的方向就是负方向.规定了正方向的直线叫做有向直线.在图中,有向直线 l 的正方向用箭头表示(图 1-1).例如,初中学过的直角坐标系中的 x 轴、 y 轴都是有向直线.



图 1-1



图 1-2

一条线段也可以规定两个相反的方向.如图 1-2 中的线段 AB ,如果以 A 为起点、 B 为终点,那么,它的方向是从 A 到 B ;相反,如果以 B 为起点、 A 为终点,它的方向就是从 B 到 A .规定了方向,即规定了起点和终点的线段叫做有向线段.表示有向线段时,要将表示起点的字母写在前面,表示终点的字母写在后面.如以 A 为起点、 B 为终点的有向线段记作 \overline{AB} .图 1-2 中,点 C 是线段 AB 上的一点, \overline{AB} 和 \overline{AC} 是方向相同的有向线段, \overline{AB} 和 \overline{BC} 是方向相反的有向线段.

选定一条线段作为长度单位，我们可以量得一条线段的长度，线段 AB 的长度，就是有向线段 \overline{AB} 的长度，记作 $|AB|$ 。如图1-3，设线段 e 是长度单位，那么 $|AB|=3$ 。因为有向线段的长度与它的方向无关，所以 $|AB|=|BA|$ 。

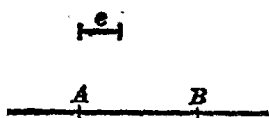


图 1-3

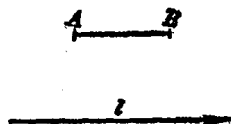


图 1-4

如果有向线段在有向直线 l 上或与 l 平行，那么，它的方向与 l 的正方向可能相同或相反。例如图1-4中的 \overline{AB} 与 l 的方向相同，而 \overline{BA} 与 l 的方向相反。

根据 \overline{AB} 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的数量(或数值)。有向线段 \overline{AB} 的数量用 AB 表示*。显然

$$AB = -BA.$$

数轴 Ox 是有向直线，数轴上点 P 的坐标 x_0 实际上是以有向线段的数量来定义的。点 P 的坐标 x_0 是以原点 O 为起点、 P 为终点的有向线段 \overline{OP} 的数量， $OP = x_0$ 。例如，点 A 、 B 的坐标分别是有向线段 \overline{OA} 、 \overline{OB} 的数量， $OA = 3$ 、 $OB = -2$ (图1-5)。

现在我们来研究，对于数轴上任意一条有向线段，怎样用它的起点坐标和终点坐标表示它的数量。

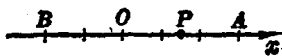


图 1-5

* 在引入有向直线以后，线段 AB 的长度一律用 $|AB|$ 表示。

设 \overline{AB} 是 x 轴上的任意一条有向线段, O 是原点. 先讨论两点 A, B 与 O 都不重合的情形. 如图 1-6, 它们的位置关系只可能有六种不同情形. 点 A, B 的坐标分别用 x_1 和 x_2 表示, 那么 $OA = x_1, OB = x_2$.

在图 1-6(1)中, $AB = |AB|, OA = |OA|, OB = |OB|$, 而 $|AB| = |OB| - |OA|$,

$$\therefore AB = OB - OA,$$

即 $AB = x_2 - x_1.$

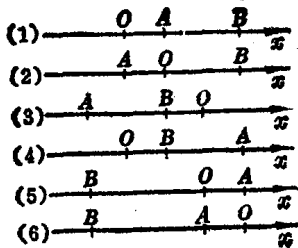


图 1-6

在图 1-6(2)中, $AB = |AB|, OA = -|OA|, OB = |OB|$, 而 $|AB| = |OA| + |OB|$,

$$\therefore AB = OB - OA,$$

即 $AB = x_2 - x_1.$

同样可以证明, 对于其他四种情况, 这个等式也成立. 容易验证, 当点 A 或点 B 与原点 O 重合时这个等式同样成立. 因此, 对于数轴上任意有向线段 \overline{AB} , 它的数量 AB 和起点坐标 x_1 、终点坐标 x_2 有如下关系:

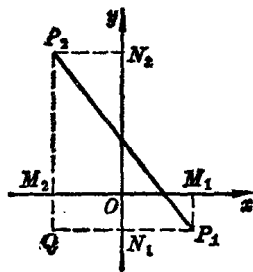
$$AB = x_2 - x_1.$$

根据这个公式可以得到，数轴上两点 A 、 B 的距离公式

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

下面，我们来求平面上任意两点的距离。

在直角坐标系中，已知两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ (图 1-7)。从 P_1 、 P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1 、 P_1N_1 和 P_2M_2 、 P_2N_2 ，垂足分别为 $M_1(x_1, 0)$ 、 $N_1(0, y_1)$ 、 $M_2(x_2, 0)$ 、 $N_2(0, y_2)$ ，其中直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 Q 。



在 $Rt\triangle P_1QP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2.$$

$$\because |P_1Q| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QP_2| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\therefore |P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

图 1-7

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

例 1 已知数轴上三点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 4、-2、-6。求 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的数量和长度 (图 1-8)。

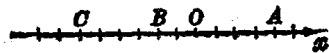


图 1-8

解： $AB = (-2) - 4 = -6$ ， $|AB| = |-6| = 6$ ；

$BC = -6 - (-2) = -4$ ， $|BC| = |-4| = 4$ ；

$CA = 4 - (-6) = 10$ ， $|CA| = |10| = 10$ 。

例2 $\triangle ABC$ 中, AO 是 BC 边上的中线(图 1-9). 求证:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AO|^2 + |OC|^2).$$

证明: 取线段 BC 所在的直线为 x 轴, 点 O 为原点建立直角坐标系. 设点 A 的坐标为 (b, c) , 点 C 的坐标为 $(a, 0)$,

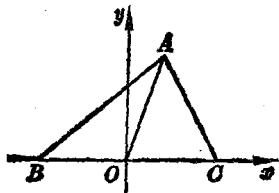


图 1-9

则点 B 的坐标为 $(-a, 0)$. 可得

$$|AB|^2 = (a+b)^2 + c^2, \quad |AC|^2 = (a-b)^2 + c^2,$$

$$|AO|^2 = b^2 + c^2, \quad |OC|^2 = a^2.$$

$$\therefore |AB|^2 + |AC|^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$|AO|^2 + |OC|^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\therefore |AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AO|^2 + |OC|^2).$$

练习

- 数轴上点 A 的坐标为 2, 点 B 的坐标为 -3. 验证公式 $AB = x_2 - x_1$.
- 已知数轴 x 上的点 A, B, C 的坐标分别为 1, 2, 3. (1) 求 $\overline{AB}, \overline{CB}$ 的数量; (2) 如果在 x 轴上还有两个点 D, E , 且 $AD = 2.5, CE = -3$. 求点 D, E 的坐标.
- 求有下列坐标的两点距离:
 - (1) $(6, 0), (-2, 0)$; (2) $(0, -4), (0, -1)$;
 - (3) $(6, 0), (0, -2)$; (4) $(2, 1), (5, -1)$;
 - (5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(6) $(ab^2, 2abc), (ac^2, 0)$.

4. 已知点 $A(a, -5)$ 和 $B(0, 10)$ 的距离是 17, 求 a 的值.

1.2 线段的定比分点

有向直线 l 上的一点 P , 把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$. $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 数量的比叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比, 通常用字母 λ 来表示这个比值,

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2},$$

点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点.

如果点 P 在线段 P_1P_2 上(图 1-10 甲), 点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点. 这时, 无论 l 的方向如何, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相同, 它们的数量的符号也相同, 所以 λ 为正值. 如果点 P 在线段 P_2P_1 或 P_1P_2 的延长线上(图 1-10 乙、丙), 点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点. 这时无无论 l 的方向如何, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相反, 它们的数量的符号也相反, 所以 λ 为负值.

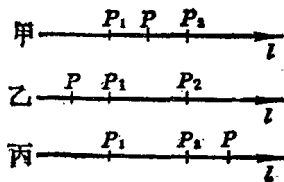


图 1-10

由于点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比与它们所在的直线 l 的方向无关, 为了简便起见, 在以后谈到点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比时, 一般不提它所在的有向直线的方向.

设 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ ($\lambda \neq -1$) (图 1-11), 求分点 P 的坐标 (x, y) .

过点 P_1, P_2, P 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1, P_2M_2, PM , 则垂足分别为 $M_1(x_1, 0), M_2(x_2, 0), M(x, 0)$. 根据平行线分线段成比例定理, 得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

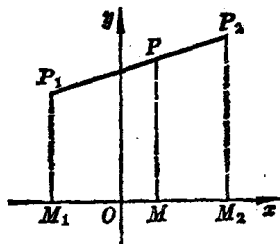
如果点 P 在线段 P_1P_2 上, 那么点 M 也在线段 M_1M_2 上; 如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上, 那么点 M 也在线段 M_1M_2 或 M_2M_1 的延长线上. 因此 $\frac{P_1P}{PP_2}$ 与 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 的符号相同, 所以

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

$$\therefore M_1M = x - x_1,$$

$$MM_2 = x_2 - x,$$

$$\therefore \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$



即 $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$, 当 $\lambda \neq -1$ 时, 图 1-11

得
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

同理可以求得
$$\lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

• 因此, 当已知两个端点为 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 点 $P(x, y)$

分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ 时, 点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} (\lambda \neq -1).$$

当点 P 是线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时, 有 $P_1P = PP_2$, 即 $\lambda = 1$. 因此线段 $\overline{P_1P_2}$ 中点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

例 1 点 P_1 和 P_2 的坐标分别是 $(-1, -6)$ 和 $(3, 0)$, 点 P 的横坐标为 $-\frac{7}{3}$. 求点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 和点 P 的纵坐标 y .

解: 由 λ 的定义, 可得

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-\frac{7}{3} - (-1)}{3 - (-\frac{7}{3})} = -\frac{1}{4}.$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + (-\frac{1}{4}) \cdot 0}{1 + (-\frac{1}{4})} = -8.$$

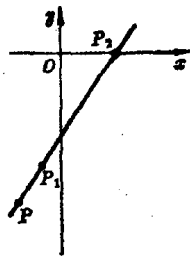


图 1-12

点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比是 $-\frac{1}{4}$, 点 P 的纵坐标是 -8 (图 1-12).

例 2 已知三角形顶点是 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$. 求 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标 (x, y) (图 1-13).

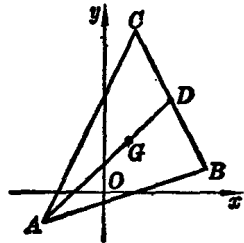
解: 设 BC 边的中点为 D , 则点 D 的坐标是

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2} \right).$$

又因为 AD 是中线, 且 $\frac{AG}{GD}=2$, 所以点 G 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + 2 \times \frac{x_2+x_3}{2}}{1+2},$$

$$y = \frac{y_1 + 2 \times \frac{y_2+y_3}{2}}{1+2},$$



整理后得重心 G 的坐标

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

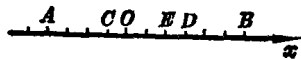
图 1-13

练习

- 已知两点 $P_1(3, -2)$ 、 $P_2(-9, 4)$. 求点 $P(x, 0)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 及 x 的值.
- 点 M 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 的比为 λ , 求点 M 的坐标 (x, y) :
 - 已知: $M_1(1, 5)$ 、 $M_2(2, 3)$, $\lambda = \frac{1}{3}$;
 - 已知: $M_1(1, 5)$ 、 $M_2(2, 3)$, $\lambda = -2$;
 - 已知: $M_1(1, 5)$ 、 $M_2(2, -3)$, $\lambda = -2$.
- 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2, 3)$ 、 $B(8, -4)$ 和重心 $G(2, -1)$. 求点 C 的坐标 (x, y) .

习题一

- 如图, 数轴上每一格等于一个长度单位, 说出有向线段 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 和 \overline{EA} 的长度和数量.



(第1题)

2. 已知数轴上 A, B 两点的坐标 x_1, x_2 分别是:

(1) $x_1=8, x_2=6$; (2) $x_1=5, x_2=-3$;

(3) $x_1=-4, x_2=0$; (4) $x_1=-9, x_2=-11$;

(5) $x_1=2a-b, x_2=a-2b$;

(6) $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=3+\sqrt{2}$.

求 \overline{AB} 和 \overline{BA} 的数量.

3. A, B 是数轴上两点, 点 B 的坐标是 x_2 . 根据下列条件, 求点 A 的坐标 x_1 :

(1) $x_2=3, AB=5$; (2) $x_2=-5, BA=-3$;

(3) $x_2=0, |AB|=2$; (4) $x_2=-5, |AB|=2$.

4. 已知某零件一个面上有 3 个孔, 孔中心的坐标分别为:

$A(-10, 30), B(-2, 3), C(0, -1)$. 求每两孔中心的距离.

5. 已知点 $P(x, 2), Q(-2, -3), M(1, 1)$, 且 $|PQ|=|PM|$. 求 x .

6. (1) 求在 x 轴上与点 $A(5, 12)$ 的距离为 13 的点的坐标;

(2) 已知点 P 的横坐标是 7, 点 P 到点 $N(-1, 5)$ 的距离等于 10, 求点 P 的纵坐标.

7. 设线段 P_1P_2 长 5 cm, 写出点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ :

(1) 点 P 在 P_1P_2 上, $|P_1P|=1$ cm;

(2) 点 P 在 P_1P_2 的延长线上, $|P_2P|=10$ cm;

(3) 点 P 在 P_2P_1 的延长线上, $|PP_1|=1$ cm.

8. 求连结下列两点的线段的长度和中点坐标:

(1) $A(7, 4), B(3, 2)$; (2) $P_1(6, -4), P_2(-2, -2)$;

(3) $M(3, 1), N(2, 1)$;

(4) $E(-2.8, 6.4)$ 、 $F(-2.8, 7.2)$.

9. 一条线段的两个端点 P_1 、 P_2 的坐标及点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比如下, 求分点 P 的坐标:

(1) $(2, 1)$ 、 $(3, -9)$, $\lambda = 4$;

(2) $(5, -2)$ 、 $(5, 3)$, $\lambda = -\frac{2}{3}$;

(3) $(-4, 1)$ 、 $(5, 4)$, $\lambda = \frac{5}{2}$;

(4) $(8, 5)$ 、 $(-13, -2)$, $\lambda = -\frac{4}{3}$.

10. (1) 一条线段的两个端点坐标如下, 求这条线段的两个三等分点的坐标: (i) $(-1, 2)$ 、 $(-10, -1)$; (ii) $(7, 8)$ 、 $(1, -6)$.

(2) 已知点 $A(1, -1)$ 、 $B(-4, 5)$. 将线段 AB 延长至 C , 使 $|AC| = 3|AB|$. 求点 C 的坐标.

11. 三角形的三个顶点是 $A(2, 1)$ 、 $B(-2, 3)$ 、 $C(0, -1)$. 求三条中线的长度.

12. 已知点 P_1 和 P_2 的坐标分别是 $(4, -3)$ 和 $(-2, 6)$, 求适合下列条件的点 P 的坐标:

(1) $\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = 2$, 点 P 在线段 P_1P_2 上;

(2) $\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = 4$, 点 P 在线段 P_1P_2 的延长线上;

(3) $\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{4}{5}$, 点 P 在线段 P_2P_1 的延长线上.

13. (1) 已知三点 $A(x, 5)$ 、 $B(-2, y)$ 、 $C(1, 1)$, 且点 C 平分线段 AB . 求 x, y .