101

高等学校文科教材

中国古代文学史长编

郭预衡 主编

隋唐五代卷

首都师范大学出版社
cnup@mail.cnu.edu.cn www.cnup.cnu.edu.cn

图书在版编目(CIP)数据

辛几何与泊松几何引论/贺龙光著 .—北京:首都师范大学出版社,2001.9

ISBN 7-81064-249-9

Ⅰ.辛… Ⅱ.贺… Ⅲ.微分几何-研究

Ⅳ.0186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 066649 号

XINJIHE YU BOSONG JIHE YINLUN

辛几何与泊松几何引论

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)

北京嘉实印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷

开本 880 × 1230 1/32 印张 9.75

字数 244 千 印数 0,001~1,000 册

定价 20.00 元

前 言

辛几何是以分析力学为背景,于20世纪六七十年代产生并发展起来的一门新兴学科。在此基础上,于80年代又进一步产生了泊松几何。辛流形是泊松流形的一种特殊情形,泊松几何是比辛几何更广泛的一种几何。同时,这两种几何之间又有着极为密切的内在联系。由于辛几何与泊松几何是分析力学的最好的数学框架,并且在几何光学、热力学、量子论等物理分支中都有重要应用,所以受到数学家与物理学家们的高度重视,并在八九十年代得到了飞速的发展,形成一门具有完整理论体系和丰富内容的崭新学科。在数学领域,它与李群李代数、微分拓扑、微分方程、复变函数、同调论等方向都有着紧密的联系。这也使辛几何与泊松几何成为数学领域中具有广阔发展前景的一门新学科。

本书是作者多年来为博士生、硕士生授课的讲稿,经过反复修改、补充而成。全书共分五章,以辛流形与泊松流形的几何理论为主要内容。第一章主要包括辛空间、辛群和辛复结构,这是以后几章所必不可少的基础。而对于线性辛几何的其他内容均未涉及。第二章包括辛流形上的辛向量场、哈米顿向量场,泊松结构,辛流形的各种子流形,余切丛等内容。

在第二章的最后一节(§12),简要介绍了辛容量的概念和局部刚性定理。第三章主要讲述李群在辛流形上的作用,其中包括矩映射及辛约化问题。第四章则转入泊松几何,内容包括泊松流形的局部结构,线性泊松结构,泊松映射,泊松流形的余迷向子流形,泊松流形的辛实现以及泊松上同调等。第五章包括泊松李群,泊松作用,dressing 变换,泊松作用的约化,李群胚,李代数胚,泊松群胚,辛群胚以及李群胚在流形上的作用等等。本书把辛群胚作为泊松群胚的特殊情形来处理,从而避免了叙述上的重复,节约了篇幅。还需说明一点,作者为了使物理专业的学生也可以比较顺利地阅读本书,特别增加了一些有关数学方面的准备知识:第二章的前两节(§5,§6)扼要地介绍了微分流形的基本知识,第三章的前两节(§13,§14)扼要介绍了李群及李群在流形上的作用。对于已具备这些知识的读者,可以略过这部分内容或浏览一下亦可。

最后,作者要特别感谢南开大学的龙以明教授和北京大学的刘张炬教授。他们对本书的完成给予了有力的支持,并对本书的内容提出了宝贵的修改意见。作者据此做了认真的修改。但由于水平所限,仍不免有漏误之处,敬请读者指正。

贺龙光

二〇〇〇年七月

目　录

第一章

辛空间与辛群

§1　向量空间的外形式

实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间是一个集合 V，其中定义了两种运算：

(1)加法：$V\times V\to V,(X,Y)\mapsto X+Y,\ \forall X,Y\in V$；

(2)数乘：$\boldsymbol{R}\times V\to V,(a,X)\mapsto aX,\ \forall a\in\boldsymbol{R},X\in V$.

它们满足以下公理：

(1) V 对于加法构成一个交换群；

(2) $\forall a,b\in\boldsymbol{R},X\in V,(ab)X=a(bX)$；

(3) $\forall a,b\in\boldsymbol{R},X\in V,(a+b)X=aX+bX$；

(4) $\forall a\in\boldsymbol{R},X,Y\in V,a(X+Y)=aX+aY$；

(5) $\forall X\in V,1\cdot X=X,0\cdot X=0\in V$.

向量空间 V 中的元素称为向量. $\forall X\in V,(-1)\cdot X$ 是 X 的逆元，即 $X+(-1)X=0$. X 的逆元记成 $-X$. 因此，可以在 V 中

定义减法：$X-Y=X+(-1)Y$.

我们也可以类似地考虑复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间，它的定义与实数域的情形相同，只要把 $\boldsymbol{R}$ 换成 $\boldsymbol{C}$ 即可．在我们以后的讨论中，除特别声明以外，V 都是指实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间．

设 V 是一个向量空间，$e_1,\cdots,e_m\in V$ 是 m 个向量，如果对于 $a_i\in\boldsymbol{R}$，$i=1,\cdots,m$，使 $a_1e_1+\cdots+a_me_m=0$，则必有 $a_1=\cdots=a_m=0$．这时称这一组向量 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 是线性无关的．否则就称为是线性相关的．如果向量空间 V 中存在一组线性无关的向量 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，使得 $\forall X\in V$ 可以找到惟一一组实数 $x^1,\cdots,x^n$，使得

$$X=\sum_{i=1}^{n}x^ie_i,$$

则称向量空间 V 具有有限维数 n，记成 $\dim V=n$．可以证明，如果向量空间 V 具有有限维数，则它的维数是常数．上述线性无关的向量组 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 称为向量空间 V 的一个基底，简称基．其中每个向量 e_i 称为这个基的一个基向量．数组 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 称为向量 X 在基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 之下的坐标．其中 x^i 称为向量 X 的第 i 个坐标或第 i 个分量．显然，有限维向量空间的基底可以有不同的选择，但它的维数不变．

例 $\boldsymbol{R}^n=\{X=(x^1,\cdots,x^n)\mid x^i\in\boldsymbol{R}\}$ 表示 n 个有序实数构成的 n 维实数空间．这个空间中的加法和数乘是，设 $X=(x^1,\cdots,x^n)$，$Y=(y^1,\cdots,y^n)$，$a\in\boldsymbol{R}$，则

$$X+Y=(x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n),$$

$$aX=(ax^1,\cdots,ax^n).$$

不难验证，$\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维向量空间．以 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$e_n=(0,\cdots,0,1)$ 为基时，$X=(x^1,\cdots,x^n)$ 的坐标就是 $\{x^1,\cdots,x^n\}$．其中 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 通常称为 $\boldsymbol{R}^n$ 的自然基底．

设 V 是一个向量空间，$T\subset V$ 是一个子集，如果对于 V 中的加法和数乘，T 也构成向量空间，即若 $X,Y\in T$，$a\in\boldsymbol{R}$，则有 $X+Y\in T$，$aX\in T$．这时称 T 是 V 的向量子空间，简称 V 的

子空间. 显然, $\{0\}$ 和 V 都是 V 的子空间. 如果 V 是有限维向量空间, T 是 V 的子空间, 自然有 $\dim T \leqslant \dim V$.

设 V 和 W 是两个向量空间, 映射 $f: V \to W$ 使得对任意的 $X, Y \in V, a \in \boldsymbol{R}$

$$f(X+Y)=f(X)+f(Y),$$
$$f(aX)=af(X).$$

则称 f 是向量空间 V 到 W 的**线性映射**, 或**同态**.

$\mathrm{Ker} f=\{X \in V \mid f(X)=0\}$ 称为线性映射 f 的**核**; $\mathrm{Im} f=\{f(X) \mid X \in V\}$ 称为线性映射 f 的**像**. 容易证明, $\mathrm{Ker} f$ 和 $\mathrm{Im} f$ 分别是 V 和 W 的子空间. 当 $\mathrm{Ker} f=0$ 时, f 称为**单射**; $\mathrm{Im} f=W$ 时, f 称为**满射**. 当线性映射 f 既是单射又是满射时, f 称为向量空间的**同构**. 如果在向量空间 V 和 W 之间存在同构 f, 也称 V 和 W 同构, 记成 $V \cong W$.

命题 1.1　任何 n 维向量空间 V 同构于 n 维数空间 $\boldsymbol{R}^n$.

证明　任取 V 的一个基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 则在这个基底之下, 每个向量 X 有惟一的坐标表示 $X=\sum_{i=1}^{n} x^i e_i$. 这样, 我们可以定义一个映射 $f: V \to \boldsymbol{R}^n$, 使得

$$f(X)=(x^1, \cdots, x^n).$$

不难看出, f 是一个线性映射, 而且 $\mathrm{Ker} f=0$, $\mathrm{Im} f=\boldsymbol{R}^n$, 所以 $f: V \to \boldsymbol{R}^n$ 是向量空间的同构. □

从命题 1.1 还可看到:

推论　两个有限维向量空间同构的充分必要条件是它们的维数相等.

设 V 是 n 维向量空间, 实数域 $\boldsymbol{R}$ 是 1 维数空间, 线性映射 $f: V \to \boldsymbol{R}$ 又称为 V 上的线性函数. 现在考虑 V 上的全体线性函数的集合

$$V^*=\{f: V \to \boldsymbol{R} \mid f \text{ 是线性函数}\},$$

在 V^* 中也可以定义加法和数乘: $\forall f, g \in V^*, a \in \boldsymbol{R}, X \in V$, 令

$$(f+g)(X)=f(X)+g(X),$$
$$(a\cdot f)(X)=a\cdot f(X).$$

则 V^* 也构成向量空间，称为向量空间 V 的**对偶空间**.

命题 1.2　$\dim V^*=\dim V$.

证明　设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基，定义映射 $\varphi:V^*\to\boldsymbol{R}^n$，$\forall f\in V^*$

$$\varphi(f)=(f(e_1),\cdots,f(e_n)),$$

因为 $\forall f,g\in V^*, a\in\boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(f+g)&=((f+g)(e_1),\cdots,(f+g)(e_n))\\&=(f(e_1),\cdots,f(e_n))+(g(e_1),\cdots,g(e_n))\\&=\varphi(f)+\varphi(g),\\\varphi(af)&=(af(e_1),\cdots,af(e_n))\\&=a(f(e_1),\cdots,f(e_n))\\&=a\varphi(f).\end{aligned}$$

所以 φ 是向量空间同态. 如果 $\varphi(f)=0$，即 $\forall i=1,\cdots,n$，$f(e_i)=0$，这时 $\forall X=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i\in V$，$f(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_if(e_i)=0$，所以 $f=0$，即 $\mathrm{Ker}\varphi=0$；任给 $(a_1,\cdots,a_n)\in\boldsymbol{R}^n$，可以找到一个线性函数 $f:V\to\boldsymbol{R}$，使 $f(e_i)=a_i$，$i=1,\cdots,n$. 即 $\varphi(f)=(a_1,\cdots,a_n)$，所以 $\mathrm{Im}\varphi=\boldsymbol{R}^n$. 因此，$\varphi$ 是向量空间同构，V^* 的维数也等于 n. □

对于 V 中的任意一个基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，可以在对偶空间 V^* 中定义一组向量 $f^1,\cdots,f^n$，使得 $\forall i,j=1,\cdots,n$

$$f^j(e_i)=\delta_i^j=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

容易证明，$\{f^1,\cdots,f^n\}$ 在 V^* 中线性无关，因此构成 V^* 的基底，称为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的**对偶基**.

命题 1.3　在 V 与 $V^{**}=(V^*)^*$ 之间存在**自然同构**.

证明　定义映射 $\varphi:V\to V^{**}$ 如下：任给 $X\in V$ 和 $f\in V^*$，令 $\varphi(X)(f)=f(X)$. 首先证明 φ 是线性映射. $\forall X,Y\in V$，$a\in\boldsymbol{R}$，$f\in V^*$

$$\begin{aligned}\varphi(X+Y)(f) &= f(X+Y)\\ &= f(X)+f(Y)\\ &= \varphi(X)(f)+\varphi(Y)(f)\\ &= (\varphi(X)+\varphi(Y))(f),\\ \varphi(aX)(f) &= f(aX)\\ &= af(X)\\ &= (a\varphi(X))(f).\end{aligned}$$

再证明 φ 是单射. 设 $X\in \mathrm{Ker}\varphi$, 则 $\varphi(X)(f)=0$, $\forall f\in V^*$. 因此, $f(X)=0$, $\forall f\in V^*$, 这说明 $X=0$. 最后再证明 φ 是满射. 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基, $\{f^1,\cdots,f^n\}$ 是 V^* 中的对偶基. 任给 $\overline{X}\in V^{**}$, 设 $\overline{X}(f^i)=a_i$, $i=1,\cdots,n$. 令 $X=\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i\in V$, 对于任意的 $f\in V^*$, 设 $f=\sum\limits_{j=1}^n b_jf^j$, 则

$$f(X)=\sum_{i=1}^n a_if(e_i)=\sum_{i,j=1}^n a_ib_jf^j(e_i)=\sum_{i=1}^n a_ib_i,$$

$$\overline{X}(f)=\sum_{j=1}^n b_j\overline{X}(f^j)=\sum_{j=1}^n b_ja_j.$$

所以, $f(X)=\overline{X}(f)$, 即 $\varphi(X)=\overline{X}$. 综上所述, φ 是 V 到 V^{**} 的同构. □

根据命题 1.3, 我们可以把 V^{**} 与 V 等同起来, 从而认为 V 和 V^* 是互为对偶的.

考虑映射

$$\alpha:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{r\uparrow}\to \boldsymbol{R}$$

$\forall X_1,\cdots,X_r\in V$, $\alpha(X_1,\cdots,X_r)\in \boldsymbol{R}$, 满足 $\forall i,j=1,\cdots,r$, $a\in \boldsymbol{R}$,

$\alpha(X_1,\cdots,X_i+Y_i,\cdots X_r)=\alpha(X_1,\cdots,X_i,\cdots X_r)+\alpha(X_1,\cdots,Y_i,\cdots,X_r)$,

$\alpha(X_1,\cdots,aX_i,\cdots,X_r)=a\alpha(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_r)$,

$\alpha(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_r)=-\alpha(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_r)$,

则称 α 是向量空间 V 上的 r 重反对称线性函数，也称为 V 上的 **r-形式**. V 上的全体 r-形式构成 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，记成 $\wedge^r(V)$. 其中加法和数乘是

$$(\alpha+\beta)(X_1,\cdots,X_r)=\alpha(X_1,\cdots,X_r)+\beta(X_1,\cdots,X_r),$$

$$(a\alpha)(X_1,\cdots,X_r)=a\alpha(X_1,\cdots,X_r).$$

其中 $\alpha,\beta\in\wedge^r(V),X_1,\cdots,X_r\in V,a\in\boldsymbol{R}$. 显然，$\wedge^1(V)=V^*$. 我们还特别规定 $\wedge^0(V)=\boldsymbol{R}$.

设 V 的基为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\alpha\in\wedge^r(V)$, $\forall X_j=\sum\limits_{i_j=1}^n a_{i_j}e_{i_j}, j=1,\cdots,r$,

$$\alpha(X_1,\cdots,X_r)=\sum_{i_1,\cdots,i_r=1}^n a_{i_1}\cdots a_{i_r}\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}).$$

由 α 的反对称性，不难看出当 $r>n=\dim V$ 时，$\alpha=0$. 即当 $r>n$ 时，$\wedge^r(V)=\{0\}$. 现在考虑直和

$$\wedge(V)=\wedge^0(V)\oplus\wedge^1(V)\oplus\cdots\oplus\wedge^n(V),$$

其中每个 $\wedge^r(V)$ 都是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，所以 $\wedge(V)$ 可以看成是分级的向量空间. 在 $\wedge(V)$ 中定义一种乘法：设 $\alpha\in\wedge^p(V),\beta\in\wedge^q(V)$，则 α 和 β 的外积 $\alpha\wedge\beta$ 是 V 上的一个 $(p+q)$-形式，它作用在 $p+q$ 个向量 $X_1,\cdots,X_{p+q}$ 上的值定义为

$$\begin{aligned}&(\alpha\wedge\beta)(X_1,\cdots,X_{p+q})\\=&\sum_{\tau\in\sigma(p\cdot q)}\mathrm{Sgn}(\tau)\alpha(X_{\tau(1)},\cdots,X_{\tau(p)})\,\beta(X_{\tau(p+1)},\cdots,X_{\tau(p+q)}),\end{aligned}$$

其中 $\sigma(p\cdot q)$ 表示集合 $(1,2,\cdots,p+q)$ 的所有满足下面条件的置换 τ 的全体：

(1) $\tau(1)<\tau(2)<\cdots<\tau(p)$,

(2) $\tau(p+1)<\tau(p+2)<\cdots<\tau(p+q)$;

$\mathrm{Sgn}(\tau)$ 表示置换 τ 的符号：τ 为偶置换时取正，τ 为奇置换时取负. 这样定义的外积满足结合律：

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma);$$

还满足反交换律：$\forall\alpha\in\wedge^p(V),\beta\in\wedge^q(V)$

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

带有这种乘法的$\wedge(V)$,我们称之为向量空间 V 上的外代数.

若取 V 的一个基底$\{e_1,\cdots,e_n\}$, V^*中相应的对偶基为$\{f^1,\cdots,f^n\}$.容易看出$f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r}\in\wedge^r(V)$,其中$1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n$,而且$\forall\alpha\in\wedge^r(V)$,设

$$\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})=a_{i_1\cdots i_r}\in\boldsymbol{R},$$

则

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}a_{i_1\cdots i_r}f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r}(e_{j_1},\cdots,e_{j_r})=a_{j_1\cdots j_r}.$$

所以

$$\alpha=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}a_{i_1\cdots i_r}f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r}.$$

另外,如果$\{b_{j_1\cdots j_r}\in\boldsymbol{R}\mid 0\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n\}$是一组实数,使得

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}b_{j_1\cdots j_r}f^{j_1}\wedge\cdots\wedge f^{j_r}=0,$$

则 $\forall 0\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n$,

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}b_{j_1\cdots j_r}f^{j_1}\wedge\cdots\wedge f^{j_r}(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})=b_{i_1\cdots i_r}=0.$$

所以,$\{f^{j_1}\wedge\cdots\wedge f^{j_r}\mid 0\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n\}$构成向量空间$\wedge^r(V)$的基.显而易见,$\wedge^1(V)$是以$\{f^1,\cdots,f^n\}$为基的 n 维向量空间;$\wedge^n(V)$是以$f^1\wedge\cdots\wedge f^n$为基的1维向量空间;而$\wedge^0(V)=\boldsymbol{R}$是以实数1为基的1维向量空间.一般地,$\wedge^r(V)$是$C_n^r$维向量空间,所以可以得到 V 的外代数$\wedge(V)$的维数

$$\dim\wedge(V)=\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n.$$

例　在 $2n$ 维数空间$\boldsymbol{R}^{2n}$中,$\{e_1,\cdots,e_{2n}\}$为自然基底,设$\{f^1,\cdots,f^{2n}\}$为它的对偶基.设$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{2n}a_if^i$, $\beta=\sum\limits_{j=1}^{2n}b_jf^j$是两个1-形式,则

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{i,j=1}^{2n}a_ib_jf^i\wedge f^j=\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)f^i\wedge f^j.$$

不难看出,$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$.如果$X=\sum\limits_{k=1}^{2n}x^ke_k$, $Y=\sum\limits_{l=1}^{2n}y^le_l$是$V$中的两个向量,则

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{2n} a_i b_j (x^i y^j - y^i x^j),$$

在 $\boldsymbol{R}^2$ 中，取自然基底 $\{e_1, e_2\}$ 和对偶基 $\{f^1, f^2\}$，设 $\underline{\omega_0} = f^1 \wedge f^2 \in \wedge^2(V)$，$\forall X = x^1 e_1 + x^2 e_2, Y = y^1 e_1 + y^2 e_2$，

$$\underline{\omega_0}(X, Y) = x^1 y^2 - x^2 y^1.$$

当我们把 $\boldsymbol{R}^2$ 看成普通的欧氏平面，即 e_1, e_2 构成标准正交基，这时 $\underline{\omega_0}(X, Y) = x^1 y^2 - x^2 y^1$ 正好是以 X, Y 为邻边的平行四边形的有向面积.

如前所述，对于一个 n 维向量空间 V，它的对偶空间 V^* 也是 n 维向量空间，并且 V^* 的对偶空间就是 V. 完全类似于前面的讨论，我们也可以考虑 V^* 上的 r- 形式所构成的 C_n^r 维向量空间 $\wedge^r(V^*)$ 和 V^* 上的外代数 $\wedge(V^*) = \wedge^0(V^*) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(V^*)$. 其中仍规定 $\wedge^0(V^*) = \boldsymbol{R}$. 当 V 的基底为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，在 V^* 中的对偶基为 $\{f^1, \cdots, f^n\}$ 时，不难看出

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n\}$$

构成 $\wedge^r(V^*)$ 的基. 因此，$\wedge^1(V^*)$ 就是以 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为基的向量空间，也就是 V，$\wedge^n(V^*)$ 就是以 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ 为基的 1 维向量空间. 因此，我们可以用另一种记号 $V^k(V)$ 来表示 $\wedge^k(V^*)$，用 $V(V)$ 来表示 $\wedge(V^*)$.

把 n 维向量空间 V 的基表示成列向量形式：

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix};$$

它在对偶空间 V^* 中的对偶基也表示成列向量形式：

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix},$$

则

$$f \cdot e^t = I.$$

其中上标 t 表示矩阵的转置，I 表示 $n\times n$ 单位矩阵. 若在 V 上给出一个基变换 $e\mapsto e'$，其变换矩阵为 A，则

$$e' = Ae.$$

再设 e' 在 V^* 中的对偶基表示成列向量 f'，并设 $f' = Bf$，则由

$$I = f'(e')^{\mathrm{t}} = Bf\cdot e^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = BA^{\mathrm{t}}$$

所以

$$B = (A^{\mathrm{t}})^{-1}.$$

再设 V 上的 1-形式 α 在基 f 与 f' 之下的坐标表示写成列向量为

$$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \text{和} \alpha' = \begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \vdots\\ \alpha'_n\end{pmatrix},$$

则

$$\alpha^{\mathrm{t}}\cdot f = (\alpha')^{\mathrm{t}}\cdot f' = (\alpha')^{\mathrm{t}}\cdot Bf = (\alpha')^{\mathrm{t}}\cdot (A^{\mathrm{t}})^{-1}f.$$

所以

$$\alpha' = A\alpha.$$

因此，我们把 α 称为**协变向量**. 同样地，若 $\alpha\in\wedge^k(V)$，我们也称它为**协变的**.

现在设 $X\in V$ 在基 e 和 e' 之下的坐标表示写成列向量为

$$X = \begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} \text{和} X' = \begin{pmatrix}x^{1'}\\ \vdots\\ x^{n'}\end{pmatrix},$$

类似的推导可得 $X' = (A^{\mathrm{t}})^{-1}X$. 因此，我们把 X 称为 V 上的**逆变向量**. 同样地，如果 $\xi\in\wedge^k(V^*) = V^k(V)$，也称为**逆变的**. 结合代数 $V(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} V^k(V)$ 称为向量空间 V 上的逆变外代数.

§2　辛空间

设 V 是 n 维向量空间，$\omega\in\wedge^2(V)$ 是 V 上的一个 2-形式.

如果 $X, Y \in V$，使得 $\omega(X, Y) = 0$，则称向量 X 与 Y 在 ω 之下正交. 根据 ω 的反对称性，$\forall X \in V, \omega(X, X) = 0$，即任何向量都与自身正交. 若 $E \subset V$ 是 V 的子空间，则

$$E^{\perp} = \{X \in V \mid \omega(X, Y) = 0, \forall Y \in E\}$$

称为子空间 E 在 ω 之下的正交补空间. 容易验证，$E^{\perp}$ 也是 V 的子空间. 2-形式 ω 的核定义为

$$\mathrm{Ker}\omega = \{X \in V \mid \omega(X, Y) = 0, \forall Y \in V\},$$

显然 $\mathrm{Ker}\omega = V^{\perp}$ 也是 V 的子空间. ω 的秩定义为

$$\text{秩}_{\omega} = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\omega).$$

定义 2.1 若 V 是 n 维向量空间，$\omega \in \wedge^2(V)$ 且 $\mathrm{Ker}\omega = \{0\}$，则称 ω 是 V 上的一个**辛形式**或**辛结构**. 带有辛结构 ω 的向量空间 V，称为辛空间(symplectic space)，记成 (V, ω).

命题 2.1 辛空间一定是偶维的.

证明 设 (V, ω) 是辛空间，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一个基底，$\forall i, j = 1, \cdots, n$，

$$\omega(e_i, e_j) = \omega_{ij} \in \boldsymbol{R}$$

构成一个 $n \times n$ 矩阵 (ω_{ij}). $\forall X = \sum x^i e_i$ 和 $Y = \sum y^j e_j$，在 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 这个基之下可以表示成列向量 $X = (x^1, \cdots, x^n)^{\mathrm{t}}$，$Y = (y^1, \cdots, y^n)^{\mathrm{t}}$，其中上标 t 表示矩阵的转置. 这样

$$\omega(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \omega_{ij} = (x^1, \cdots, x^n)(\omega_{ij})(y^1 \cdots y^n)^{\mathrm{t}},$$

由 ω 的反对称性可知矩阵 (ω_{ij}) 是反称的；再由 ω 的非退化性，即 $\mathrm{Ker}\omega = \{0\}$，可知矩阵 (ω_{ij}) 是非奇异的. 因此

$$(\omega_{ij})^{\mathrm{t}} = -(\omega_{ij}), \quad \det(\omega_{ij}) \neq 0.$$

由于

$$\det(\omega_{ij}) = \det(\omega_{ij})^{\mathrm{t}} = \det[-(\omega_{ij})] = (-1)^n \det(\omega_{ij}) \neq 0,$$

若 $n =$ 奇数，必然有 $\det(\omega_{ij}) = 0$，这是不可能的，所以 n 一定是偶数，即辛空间 (V, ω) 是偶维的. □

命题 2.2 若 (V, ω) 是 $2n$ 维辛空间，则在 V 中存在基底

$\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}\}$，使得 $\forall\, i, j = 1, \cdots, n$，

$$\omega(e_i, e_j) = 0, \omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0, \omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij},$$

即在这个基下，辛形式 ω 有矩阵表示

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

其中 I 表示 n 阶单位方阵.

证明　在 V 中任取一基 $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n, \bar{e}_{n+1}, \cdots, \bar{e}_{2n}\}$，在这基下 $\forall\, i, j = 1, \cdots, 2n$

$$\omega(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{\omega}_{ij}$$

设 $A = (a_{ij})^{t}$ 表示 V 到自身的一个线性变换，使基 $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_{2n}\}$ 变成新基 $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$，有如下表示

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{2n} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_{2n} \end{pmatrix},$$

则 $\forall\, X = \sum \bar{x}^i \bar{e}_i,\ Y = \sum \bar{y}^j \bar{e}_j$，有

$$X = (\bar{x}^1 \ \cdots \ \bar{x}^{2n}) \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_{2n} \end{pmatrix} = (\bar{x}^1 \ \cdots \ \bar{x}^{2n})(a_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{2n} \end{pmatrix},$$

$$Y = (\bar{y}^1 \ \cdots \ \bar{y}^{2n}) \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_{2n} \end{pmatrix} = (\bar{y}^1 \ \cdots \ \bar{y}^{2n})(a_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{2n} \end{pmatrix}.$$

所以

$$(\bar{x}^1 \cdots \bar{x}^{2n}) = (x^1 \ \cdots \ x^{2n})(a_{ij}), \quad \begin{pmatrix} \bar{y}^1 \\ \vdots \\ \bar{y}^{2n} \end{pmatrix} = (a_{ij})^{t} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{2n} \end{pmatrix},$$

$$\omega(X, Y) = (\bar{x}^1 \ \cdots \ \bar{x}^{2n})(\bar{\omega}_{ij}) \begin{pmatrix} \bar{y}^1 \\ \vdots \\ \bar{y}^{2n} \end{pmatrix}$$