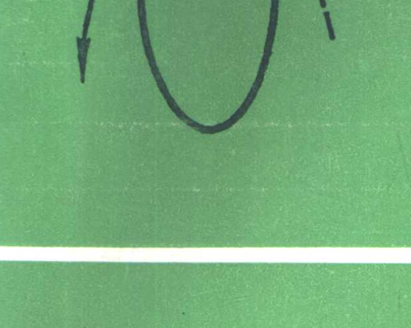
高级中学课本

平面解析几何

PING MIAN JIE XI JIHE

（乙种本）

全一册



人民教育出版社

高级中学课本（试用）
平面解析几何
（乙 种 本）
全 一 册
人民教育出版社数学室编
*
人民教育出版社出版
天津教育出版社重印
天津市新华书店发行
天津新华印刷二厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张4.5 字数95,000
1984年11月第1版 1985年5月第1次印刷
印数1—67,000
书号K7012·0615 定价 0.38元

说　明

一、这套高中用的数学课本(乙种本)是根据教育部颁发的《高中数学教学纲要(草案)》中的基本要求内容编写的，共分四册:《代数》上、下册、《立体几何》全一册、《平面解析几何》全一册，供二　　或三年制高中选用.

二、本书内容包　　线、圆　　　参数方程和极坐标三章.

三、本书习　　　　　　　　复习参考题及总复习参考题.

1. 练

2. 习　　　　外作

3. 　　　　总复　　　　复习参考题供复习本章知识　　　　供复习全书知识时使用.

习题　　参考　　习参考题的题量多于通常所需题量，供教学时根

四、本书由人　教育出版社数学室编写. 参加编写的有李慧君、鲍珑、许缦阁等，全书由孙福元校订。

目　　录

引　　言

我们在平面几何和立体几何里，所用的研究方法是以公理为基础，直接依据图形的点、线、面的关系来研究图形的性质．在将要学习的平面解析几何里，所用的研究方法和平面几何、立体几何不同，它是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线（包括直线），通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质．因此可以说，解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学[redacted]

平面解析几何研究[redacted]

（1）根据已知条件，[redacted]线的方程；

（2）通过方程，研究[redacted].

解析几何的这种研究[redacted]步学习数学、物理和其他科学技术中经常使用.

在十七世纪，法国数学家笛卡儿创始了解析几何．解析几何的产生对数学发展，特别是对微积分的出现起了促进作用，恩格斯对笛卡儿的这一发现给予了高度的评价.

第一章　直　　线

一　有向线段、定比分点

1.1　有向线段、两点的距离

在初中，我们学过数轴，它是规定了原点、正方向和长度单位的直线．任意一条直线，都可以规定两个相反的方向．如果把其中一个作为正方向，那么相反的方向就是负方向．规定了正方向的直线叫做**有向直线**．在图中，有向直线 l 的正方向用箭头表示（图 1-1）．例如，初中学过的直角坐标系中的 x 轴、y 轴都是有向直线．

图　1-1

图　1-2

一条线段也可以规定两个相反的方向．如图 1-2 中的线段 AB，如果以 A 为起点、B 为终点，那么，它的方向是从 A 到 B；相反，如果以 B 为起点、A 为终点，它的方向就是从 B 到 A．规定了方向，即规定了起点和终点的线段叫做**有向线段**．表示有向线段时，要将表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面．如以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overline{AB}$．图 1-2 中，点 C 是线段 AB 上的一点，$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 是方向相同的有向线段，$\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 是方向相反的有向线段．

选定一条线段作为长度单位，我们可以量得一条线段的长度，线段 AB的长度，就是有向线段 $\overline{AB}$ 的长度，记作$|AB|$。如图 1-3，设线段 e 是长度单位，那么$|AB|=3$。因为有向线段的长度与它的方向无关，所以$|AB|=|BA|$。

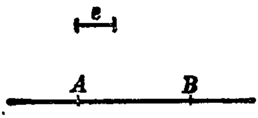


图 1-3

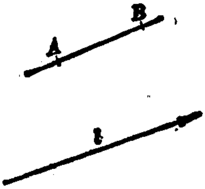


图 1-4

如果有向线段在有向直线 l 上或与 l 平行，那么，它的方向与 l 的正方向可能相同或相反。例如图 1-4 中的 $\overline{AB}$ 与 l 的方向相同，而 $\overline{BA}$ 与 l 的方向相反。

根据 $\overline{AB}$ 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的**数量**（或**数值**）。有向线段 $\overline{AB}$ 的数量用 AB 表示*。显然

$$AB=-BA.$$

数轴 Ox 是有向直线，数轴上点P的坐标 x_0 实际上是以有向线段的数量来定义的。点 P 的坐标 x_0 是以原点 O 为起点、P为终点的有向线段 $\overline{OP}$的数量，$OP=x_0$。例如，点 A、B的坐标分别是有向线段 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 的数量，$OA=3$、$OB=-2$（图 1-5）。

现在我们来研究，对于数轴上任意一条有向线段，怎样用它的起点坐标和终点坐标表示它的数量。

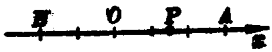


图 1-5

* 在引入有向直线以后，线段 AB 的长度一律用$|AB|$表示。

设$\overline{AB}$是x轴上的任意一条有向线段，O是原点．先讨论两点A、B与O都不重合的情形．如图1-6，它们的位置关系只可能有六种不同情形．点A、B的坐标分别用x_1和x_2表示，那么$OA=x_1$，$OB=x_2$.

在图1-6(1)中，$AB=|AB|$，$OA=|OA|$，$OB=|OB|$，而$|AB|=|OB|-|OA|$，

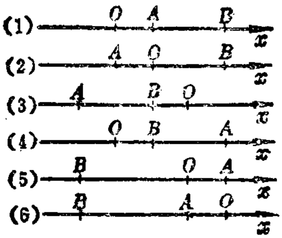


图 1-6

$$\therefore \quad AB=OB-OA,$$

即
$$AB=x_2-x_1.$$

在图1-6(2)中，$AB=|AB|$，$OA=-|OA|$，$OB=|OB|$，

而
$$|AB|=|OA|+|OB|,$$

$$\therefore \quad AB=OB-OA,$$

即
$$AB=x_2-x_1.$$

同样可以证明，对于其他四种情况，这个等式也成立．容易验证，当点A或点B与原点O重合时这个等式同样成立．因此，对于数轴上任意有向线段$\overline{AB}$，它的数量AB和起点坐标x_1、终点坐标x_2有如下关系：

$$\boxed{AB=x_2-x_1.}$$

根据这个公式可以得到，数轴上两点 A、B 的距离公式

$$|AB|=|x_2-x_1|.$$

下面，我们来求平面上任意两点的距离。

在直角坐标系中，已知两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$（图 1-7）。从 P_1、P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1、P_1N_1 和 P_2M_2、P_2N_2，垂足分别为 $M_1(x_1, 0)$、$N_1(0, y_1)$、$M_2(x_2, 0)$、$N_2(0, y_2)$，其中直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 Q。

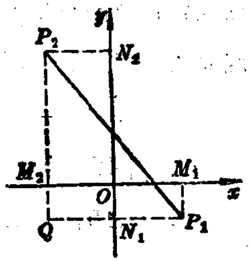


图 1-7

在 $Rt\triangle P_1QP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

$\because$ $|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|$，

$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|$，

$\therefore$ $|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$.

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式：

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

例 1 已知数轴上三点 A、B、C 的坐标分别是 4、-2、-6. 求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的数量和长度（图 1-8）。

图 1-8

解： $AB=(-2)-4=-6$，　$|AB|=|-6|=6$；

$BC=-6-(-2)=-4$，$|BC|=|-4|=4$；

$CA=4-(-6)=10$，　$|CA|=|10|=10$.

例 2 $\triangle ABC$ 中，AO 是 BC 边上的中线(图 1-9)．求证：

$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

证明：取线段 BC 所在的直线为 x 轴，点 O 为原点建立直角坐标系．设点 A 的坐标为 (b, c)，点 C 的坐标为 $(a, 0)$，则点 B 的坐标为 $(-a, 0)$．可得

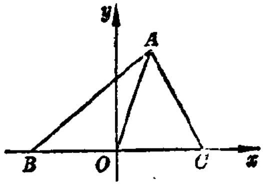


图 1-9

$$|AB|^2=(a+b)^2+c^2,\ |AC|^2=(a-b)^2+c^2,$$

$$|AO|^2=b^2+c^2,\qquad |OC|^2=a^2.$$

$$\therefore\quad |AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

$$|AO|^2+|OC|^2=a^2+b^2+c^2.$$

$$\therefore\quad |AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

练　习

1. 数轴上点 A 的坐标为 2，点 B 的坐标为 -3．验证公式 $AB=x_2-x_1$．

2. 已知数轴 x 上的点 A、B、C 的坐标分别为 1、2、3．(1) 求 $\overline{AB}$、$\overline{CB}$ 的数量；(2) 如果在 x 轴上还有两个点 D、E，且 $AD=2.5$，$CE=-3$．求点 D、E 的坐标．

3. 求有下列坐标的两点距离：

(1) $(6, 0)$、$(-2, 0)$；　　(2) $(0, -4)$、$(0, -1)$；

(3) $(6, 0)$、$(0, -2)$；　　(4) $(2, 1)$、$(5, -1)$；

(5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(6) $(ab^2, 2abc)$、$(ac^2, 0)$.

4. 已知点 $A(a, -5)$ 和 $B(0, 10)$ 的距离是 17，求 a 的值.

1.2 线段的定比分点

有向直线 l 上的一点 P，把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$. $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 数量的比叫做**点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比**，通常用字母 λ 来表示这个比值，

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2},$$

点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**定比分点**.

如果点 P 在线段 P_1P_2 上(图 1-10 甲)，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**内分点**. 这时，无论 l 的方向如何，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相同，它们的数量的符号也相同，所以 λ 为正值. 如果点 P 在线段 P_2P_1 或 P_1P_2 的延长线上(图 1-10乙、丙)，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**外分点**. 这时无论 l 的方向如何，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相反，它们的数量的符号也相反，所以 λ 为负值.

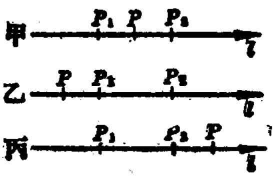


图 1-10

由于点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比与它们所在的直线 l 的方向无关，为了简便起见，在以后谈到点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比时，一般不提它所在的有向直线的方向.

设 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 $\lambda(\lambda\neq-1)$（图 1-11），求分点 P 的坐标 (x, y).

过点 P_1、P_2、P 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1、P_2M_2、PM，则垂足分别为 $M_1(x_1, 0)$、$M_2(x_2, 0)$、$M(x, 0)$. 根据平行线分线段成比例定理，得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

如果点 P 在线段 P_1P_2 上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 上；如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 或 M_2M_1 的延长线上. 因此 $\frac{P_1P}{PP_2}$ 与 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 的符号相同，所以

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

$\because\quad M_1M=x-x_1,$

$\qquad MM_2=x_2-x,$

$\therefore\quad \lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x},$

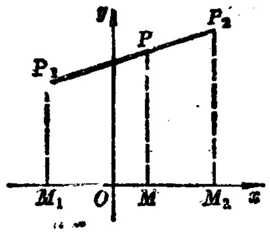


图 1-11

即 $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$，当 $\lambda\neq-1$ 时，

得
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理可以求得 $\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$，

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，当已知两个端点为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$

分$\overline{P_1P_2}$所成的比为λ时，点P的坐标是

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda\neq-1).}$$

当点P是线段$\overline{P_1P_2}$的中点时，有$P_1P=PP_2$，即$\lambda=1$。因此线段$\overline{P_1P_2}$中点P的坐标是

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.}$$

例1　点P_1和P_2的坐标分别是$(-1,-6)$和$(3,0)$，点P的横坐标为$-\frac{7}{3}$. 求点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比λ和点P的纵坐标y.

解：由λ的定义，可得

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{-\frac{7}{3}-(-1)}{3-\left(-\frac{7}{3}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-6+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-8.$$

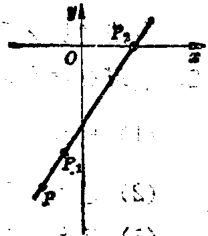


图　1-12

点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比是$-\frac{1}{4}$，点P的纵坐标是-8（图1-12）。

例2　已知三角形顶点是$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$. 求$\triangle ABC$的重心G的坐标(x,y)（图1-13）。

解：设BC边的中点为D，则点D的坐标是

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

又因为 AD 是中线，且 $\frac{AG}{GD}=2$，所以点 G 的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\times\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2},$$

$$y=\frac{y_1+2\times\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2},$$

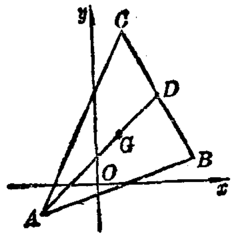


图 1-13

整理后得重心 G 的坐标

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

练　习

1. 已知两点 $P_1(3,-2)$、$P_2(-9,4)$. 求点 $P(x,0)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 及 x 的值.
2. 点 M 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 的比为 λ，求点 M 的坐标 (x,y):

   (1) 已知: $M_1(1,5)$、$M_2(2,3)$, $\lambda=\frac{1}{3}$;

   (2) 已知: $M_1(1,5)$、$M_2(2,3)$, $\lambda=-2$;

   (3) 已知: $M_1(1,5)$、$M_2(2,-3)$, $\lambda=-2$.
3. 已知△ABC 的顶点 $A(2,3)$、$B(8,-4)$ 和重心 $G(2,-1)$. 求点 C 的坐标 (x,y).

习　题　一

1. 如图，数轴上每一格等于一个长度单位，说出有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{EA}$ 的长度和数量.

(第1题)

2. 已知数轴上 A、B 两点的坐标 x_1、x_2 分别是:

(1) $x_1=8, x_2=6$;　　(2) $x_1=5, x_2=-3$;

(3) $x_1=-4, x_2=0$;　　(4) $x_1=-9, x_2=-11$;

(5) $x_1=2a-b, x_2=a-2b$;

(6) $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=3+\sqrt{2}$.

求 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的数量.

3. A、B 是数轴上两点, 点 B 的坐标是 x_2. 根据下列条件, 求点 A 的坐标 x_1:

(1) $x_2=3, AB=5$;　　(2) $x_2=-5, BA=-3$;

(3) $x_2=0, |AB|=2$;　　(4) $x_2=-5, |AB|=2$.

4. 已知某零件一个面上有 3 个孔, 孔中心的坐标分别为: $A(-10, 30)$、$B(-2, 3)$、$C(0, -1)$. 求每两孔中心的距离.

5. 已知点 $P(x, 2)$、$Q(-2, -3)$、$M(1, 1)$, 且 $|PQ|=|PM|$. 求 x.

6. (1) 求在 x 轴上与点 $A(5, 12)$ 的距离为 13 的点的坐标;

(2) 已知点 P 的横坐标是 7, 点 P 到点 $N(-1, 5)$ 的距离等于 10, 求点 P 的纵坐标.

7. 设线段 P_1P_2 长 5 cm, 写出点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ:

(1) 点 P 在 P_1P_2 上, $|P_1P|=1$ cm;

(2) 点 P 在 P_1P_2 的延长线上, $|P_2P|=10$ cm;

(3) 点 P 在 P_2P_1 的延长线上, $|PP_1|=1$ cm.

8. 求连结下列两点的线段的长度和中点坐标:

(1) $A(7, 4)$、$B(3, 2)$; (2) $P_1(6, -4)$、$P_2(-2, -2)$;

(3) $M(3, 1)$、$N(2, 1)$;

(4) $E(-2.8, 6.4)$、$F(-2.8, 7.2)$.

9. 一条线段的两个端点 P_1、P_2 的坐标及点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比如下，求分点 P 的坐标:

(1) $(2, 1)$、$(3, -9)$, $\lambda=4$;

(2) $(5, -2)$、$(5, 3)$, $\lambda=-\dfrac{2}{3}$;

(3) $(-4, 1)$、$(5, 4)$, $\lambda=\dfrac{5}{2}$;

(4) $(8, 5)$、$(-13, -2)$, $\lambda=-\dfrac{4}{3}$.

10. (1) 一条线段的两个端点坐标如下，求这条线段的两个三等分点的坐标: (i) $(-1, 2)$、$(-10, -1)$; (ii) $(7, 8)$、$(1, -6)$.

(2) 已知点 $A(1, -1)$、$B(-4, 5)$. 将线段 AB 延长至 C，使 $|AC|=3|AB|$. 求点 C 的坐标.

11. 三角形的三个顶点是 $A(2, 1)$、$B(-2, 3)$、$C(0, -1)$. 求三条中线的长度.

12. 已知点 P_1 和 P_2 的坐标分别是 $(4, -3)$ 和 $(-2, 6)$，求适合下列条件的点 P 的坐标:

(1) $\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=2$, 点 P 在线段 P_1P_2 上;

(2) $\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=4$, 点 P 在线段 P_1P_2 的延长线上;

(3) $\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=\dfrac{4}{5}$, 点 P 在线段 P_2P_1 的延长线上.

13. (1) 已知三点 $A(x, 5)$、$B(-2, y)$、$C(1, 1)$，且点 C 平分线段 AB. 求 x、y.

(2) 已知两点 $A(3,-1)$、$B(2,1)$，求点 A 关于点 B 的对称点的坐标.

14. 已知三点 $A(1,-1)$、$B(3,3)$、$C(4,5)$. 求证：三点在一条直线上.

15. (1) 证明：直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

(2) 证明：三角形中位线等于底边的一半.

二 直线的方程

1.3 一次函数的图象与直线的方程

初中研究一次函数时，在直角坐标系中，画出的一次函数图象是一条直线. 例如函数 $y=2x+1$ 的图象是直线 l（图 1-14）. 这时，满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x、y 的值都是直线 l 上的点的坐标，如数对 $(0,1)$ 满足函数式，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是 $(0,1)$；而直线 l 上每一点的坐标都满足函数式，如直线 l 上点 P 的坐标是 $(1,3)$，数对 $(1,3)$ 就满足函数式.

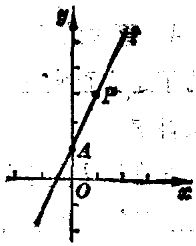


图 1-14

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x、y 的值为坐标的点构成的. 由于函数 $y=kx+b$ 也可以看作二元一次方程，因此，我们也可以说，这个方程的解和直线上的点也存在这样的一一对应关系.