内容提要

本书是根据原国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，并结合东南大学多年教学改革实践经验编写而成的教材. 书中更加注重对基本概念、基本定理和重要公式的几何意义与背景的介绍；突出微积分的基本思想和方法；加强教学方法的分析与指导. 在本书下册中，无穷级数增强了函数逼近的思想；多元函数微积分融进了向量与矩阵方法，为进一步学习现代数学打下了一定的基础；并在最后一章集中介绍微积分中常用的近似计算方法，增强了近似计算结果的思想方法.

本书分上、下两册，下册的内容为无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、多元数量值函数的积分、向量场的积分、微积分中的近似计算，书后并附有习题答案.

本书可供高等工业院校各专业使用，也可供自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/罗庆来等主编. —北京：高等教育出版社，2001
ISBN 7-04-010166-1

Ⅰ. 高... Ⅱ. 罗... Ⅲ. 高等数学 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 071729 号

责任编辑 王 强 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 吴文信
版式设计 马静如 **责任校对** 俞声佳 **责任印制** 韩 刚

高等数学(下册)
罗庆来 宋柏生 主编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号　　邮政编码 100009
电 话 010-64054588　　传 真 010-64014048
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×1092 1/16　　版 次 2001 年 12 月第 1 版
印 张 17.75　　印 次 2001 年 12 月第 1 次印刷
字 数 430 000　　定 价 15.30 元

目　录

第 6 章　无 穷 级 数

无穷级数与极限有着十分密切的关系，它是表示函数、函数逼近及数值计算的一种重要的数学工具．本章介绍无穷级数的基本知识和一些应用．

§6.1　数 项 级 数

6.1.1　无穷级数的概念

定义 1　设有无穷实数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，称表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为**数项级数**，简称为**级数**，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$．　$u_1, u_2, \cdots, u_n \cdots$ 称为这个级数的**项**，u_n 称为级数的**通项**（**或一般项**）．

例如　$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$ 是个级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$，通项为 $\frac{1}{10^n}$．

我们知道，有限多个实数相加有确定的意义，其和仍然是一个实数．那么无穷多个实数相加是否也有"和"？现在采用"由有限认识无限"的方法讨论这个问题．

定义 2　称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**前 n 项部分和**，若部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即 $\lim_{n \to \infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 S 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**．级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性与发散性统称为**敛散性**．

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，部分和 S_n 可以作为和 S 的近似值，称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

为该级数的**余项**，S_n 与 S 之间的误差可由 $|r_n|$ 去衡量，由于 $\lim_{n \to \infty} S_n = S$，所以 $\lim_{n \to \infty} |r_n| = 0$，这

表明，n 越大，S_n 与 S 之间的误差越小.

例 1 讨论**等比级数(几何级数)** $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n\ (a \neq 0)$ 的敛散性.

解 部分和 $S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} a\dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$

当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$；

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ 不存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在；

当 $q = 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na$ 不存在；

当 $q = -1$ 时，$S_n = \begin{cases} a, n \text{ 为奇数}, \\ 0, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

综上分析知，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n\ (a \neq 0)$ 当 $|q| < 1$ 时收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

例 2 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

且 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

所以此级数收敛，其和为 1.

例 3 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$，

故部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1), \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

所以此级数发散.

例 4 考察**调和级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解 考虑该级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{2^k}\}$，有

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_{2^3} = S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$= S_{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$> 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

一般地,由数学归纳法可得

$$S_{2^k} = S_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

$$> 1 + (k-1) \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{项}} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

由于$\lim\limits_{k \to \infty}\left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = +\infty$,所以$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 不存在,从而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

6.1.2 数项级数收敛的条件

定理 1 **(级数收敛的必要条件)** 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

证 设收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$,因为通项 u_n 与部分和S_n 有关系式$u_n = S_n - S_{n-1}$,所以

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

由定理 1 可知,如果$\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 5 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n}$.

解 (1) 通项 $u_n = (-1)^n$,$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty}(-1)^n$ 不存在,不满足级数收敛的必要条件,故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

(2) 通项 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$,

由于

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 发散.

(3) 通项 $u_n = n \sin \frac{\pi}{n}$,

由于
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi = \pi \neq 0,$$
故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$ 发散.

值得注意的是:通项 u_n 趋于零仅是级数收敛的一个必要条件,而不是级数收敛的充分条件.换句话说,即使 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也不一定收敛.例如前面例 3 中,$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$,但级数发散;例 4 中,$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$,但调和级数发散.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛是指其部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 当 $n\to\infty$ 时存在极限.而极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使当 $n>N$ 时,对任意正整数 p,有 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.又 $S_{n+p}-S_n = \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$,于是我们得到级数收敛的充分必要条件.

定理 2 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使当 $n>N$ 时,对 $\forall p\in\mathbf{N}_+$,总有
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}| < \varepsilon.$$

例 6 应用柯西收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证 $\forall\varepsilon>0$,对 $\forall n,p\in\mathbf{N}_+$,由于
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| &= \left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right| \\ &< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},\end{aligned}$$
所以,可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对 $\forall p\in\mathbf{N}_+$,都有
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$
根据柯西收敛准则,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

6.1.3 数项级数的基本性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 S,则对任意常数 k,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,且其和为 kS.

证　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$的部分和分别为$S_n$与$\sigma_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = S$，$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}kS_n = k\lim_{n\to\infty}S_n = kS,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$收敛，且其和为$kS$.

由性质1不难推出：若k为非零常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$同敛散.

性质2　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，其和分别为$S$，$T$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛，且其和为$S \pm T$.

证　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$的部分和分别为$S_n$，$\sigma_n$，$w_n$，则有

$$\lim_{n\to\infty}S_n = S,\ \lim_{n\to\infty}\sigma_n = T,$$

$$\begin{aligned}w_n &= (u_1 \pm v_1) \pm (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n)\\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)\\ &= S_n \pm \sigma_n,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}w_n = \lim_{n\to\infty}S_n \pm \lim_{n\to\infty}\sigma_n = S \pm T.$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛，且其和为$S \pm T$.

性质3　在级数中去掉或添加有限多项，不改变级数的敛散性.

证　考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}u_n$，设它们的前$n$项部分和分别为$S_n$与$S'_n$，则有

$$\begin{aligned}S'_n &= u_{m+1} + \cdots + u_{m+n} = (u_1 + \cdots + u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+n}) - (u_1 + \cdots + u_m)\\ &= S_{m+n} - S_m,\end{aligned}$$

其中S_m为一常数.

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和为$S$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = S$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_{m+n} = S$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S'_n = \lim_{n\to\infty}(S_{m+n} - S_m) = S - S_m,$$

所以$\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}u_n$收敛，其和为$S - S_m$.

反之，若$\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}u_n$收敛，其和为$S'$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}S'_n = S'$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{m+n} = \lim_{n\to\infty}(S'_n + S_m) = S' + S_m,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛，其和为$S' + S_m$.

性质4 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则不改变它的各项次序任意添加括号后构成的新级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}v_m$仍然收敛且和不变.

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = S, v_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}, v_2 = u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}, \cdots, v_m = u_{n_{m-1}+1} + \cdots + u_{n_m}, \cdots$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{m=1}^{\infty}v_m$的部分和分别为$S_n$与$\sigma_n$,则$\sigma_1 = S_{n_1}, \sigma_2 = S_{n_2}, \cdots, \sigma_k = S_{n_k}, \cdots$,故$\{\sigma_n\}$是$\{S_n\}$的子列,从而当$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$必存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = S$,因此性质4成立.

性质4表明:对收敛的数项级数,也有结合律.但性质4的逆命题不成立,即加括号后的级数收敛,不能保证原级数收敛.例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散,而加括号后的级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛.

例7 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{n(n+1)} + \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}\right)$;

(2) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{19} + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$;

(3) $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{11^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+9)^2} + \cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{4^n}\right)$.

解 (1) 由例2和性质1可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n(n+1)}$收敛,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}$是公比为$-\dfrac{2}{3}$的等比级数,收敛,所以由性质2知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{n(n+1)} + \dfrac{(-1)^n 2^n}{3^n}\right)$收敛.

(2) 级数$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{19} + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$是由级数$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$添加了19项$\left(1, \dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{19}\right)$后所构成的,而$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$是以2为公比的等比级数,发散,所以由性质3知原级数也发散.

(3) 级数$\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{11^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+9)^2} + \cdots$是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$去掉了前面9项而得到的,由例6知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,故原级数收敛.

(4) 调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$是发散的,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{4^n}$是以$\dfrac{1}{4}$为公比的等比级数,收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{4^n}\right)$必发散.这是因为若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{4^n}\right)$收敛,则由性质2知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{4^n}\right) - \dfrac{3}{4^n}\right)$也收敛,矛盾!

习　题　一

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$.

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$;　　(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}+\cdots$.

3. 根据级数收敛的定义和性质判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\frac{3^4}{2^4}+\cdots$;

(5) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\cdots$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

4. 利用柯西收敛准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

5. 证明 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2$.

6. 已知级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots(u_n>0)$ 收敛，证明级数 $u_1+u_3+u_5+\cdots+u_{2n+1}+\cdots$ 也收敛.

6.1.4　数项级数判敛法

从定义出发判断一个级数是收敛还是发散，就必须先求出级数前 n 项部分和 S_n 的表达式，这只有对某些特殊的级数才可以做到，而对一般的级数来说，无法求出 S_n 的表达式，也就无法用定义判断级数的敛散性，更无法讨论级数和的问题. 但是，如果能断定所论级数是收敛的，那么部分和 S_n 就可作为和 S 的近似值，而且只要 n 取得足够大，S_n 与 S 的误差就可以小于任意指定的精确程度. 因此，级数求和的问题相对来讲就不如判断级数的敛散性来得重要. 为此，下面我们将介绍级数敛散性的判定法.

1) 正项级数及其判敛法

所谓**正项级数**，是指级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots).$$

显然，正项级数的部分和数列$\{S_n\}$是单调递增的，即$S_n \leqslant S_{n+1}$. 于是若$\{S_n\}$有界，则根据单调有界原理，$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 存在；若$\{S_n\}$ 无界，则$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$. 由此得到下列定理.

定理 3 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有界.

例 8 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$的敛散性.

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} < 1, \end{aligned}$$

据定理 3 知级数收敛.

在定理 3 的基础上，我们可以得到正项级数的一些重要判敛法.

定理 4 （比较判别法）

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$，则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 (1) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则由定理 3 的必要性知其部分和数列$\{S_n\}$有界，即存在 $M>0$，使 $S_n \leqslant M$. 由于 $u_n \leqslant v_n$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和$\sigma_n \leqslant S_n \leqslant M$，因此$\{\sigma_n\}$有界，由定理 3 的充分性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用反证法. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则由(1) 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散矛盾，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

注意：由级数的性质 3 可知，比较判别法中的条件 $u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$ 可改为 $u_n \leqslant v_n (n>N)$，其中 N 为某一正整数.

例 9 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{3^n+4}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$($p$ 为实数)；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+(\ln n)^n}$.

解 (1) 由于$\frac{4^n}{3^n+4} \geqslant \frac{4^n}{3^n+3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n (n = 2,3,\cdots)$，而等比级数$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n$发散，故由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+4}$发散.

(2) $p < 0$时，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$，故级数发散；

$0 < p \leqslant 1$时，$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$，而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$发散；

$p > 1$时，由$\frac{1}{k^p} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x (k = 2,3,\cdots)$，知部分和

$$\begin{aligned}S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^n \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1},\end{aligned}$$

故$\{S_n\}$有界，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$收敛.

级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$称为**$p$级数**.由上面的讨论知，当$p > 1$时，级数收敛；当$p \leqslant 1$时，级数发散.

(3) 由于$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n} \leqslant \frac{2}{n^2}$，而由上知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$收敛.

(4) 当$n \geqslant 8$时，$\ln n > 2$，故

$$\frac{1}{1+(\ln n)^n} \leqslant \frac{1}{(\ln n)^n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (n \geqslant 8),$$

而等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\ln n)^n}$收敛.

应用比较判别法判定一个正项级数的敛散性时，需要找一个已知敛散性的正项级数作为比较对象，一般常用等比级数与p级数作为比较对象.但建立通项之间的不等式往往需要一定的技巧，因此我们常用下面的比较判别法的极限形式判定正项级数的敛散性.

定理4′ (比较判别法的极限形式)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数，且$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，则

(1) 当$0 < l < +\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$具有相同的敛散性；

(2) 当$l = 0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

(3) 当$l = +\infty$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也发散.

证 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,故对 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}>0$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,使当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\frac{l}{2},$$

即

$$-\frac{l}{2}<\frac{u_n}{v_n}-l<\frac{l}{2},\quad \frac{l}{2}<\frac{u_n}{v_n}<\frac{3}{2}l,$$

从而

$$\frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n\quad(n>N),$$

由比较判别法知结论成立.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$,故对 $\varepsilon=1$,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,使当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right|<1,$$

即

$$-v_n<u_n<v_n(n>N),$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=0$,由反证法及(2)即知结论成立.

例 10 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+2)}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{n}(x>0)$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+2)}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}=1$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散$\left(p=\dfrac{2}{3}\text{ 的 } p \text{ 级数}\right)$,

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+2)}}\text{ 发散.}$$

(2) 对任意 $x>0$,只要 n 充分大,总有 $\dfrac{x}{n}\in(0,\pi)$,所以可以把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{n}$ 作为正项级数处理. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{n}}{\dfrac{x}{n}}=1$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n}(x>0)$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{n}(x>0)$ 发散.

定理 5 (比值判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,则

(1) 当 $\rho<1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证 (1) 当 $\rho < 1$ 时，取 $\varepsilon > 0$，使 $r = \rho + \varepsilon < 1$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，所以对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，使得当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon,$$

从而有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + \rho = r(n > N),$$

即

$$\begin{aligned}
&u_{N+2} < ru_{N+1},\\
&u_{N+3} < ru_{N+2} < r^2 u_{N+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{N+k} < ru_{N+k-1} < r^{k-1} u_{N+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

而 $ru_{N+1} + r^2 u_{N+1} + \cdots + r^{k-1} u_{N+1} + \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{N+1} r^k$ 是公比为 $r < 1$ 的等比级数，收敛. 于是由比较判别法及级数性质 3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 时，取 $\varepsilon > 0$，使 $\rho - \varepsilon = r > 1$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，所以对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，使得当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon(n > N),$$

于是当 $n > N$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon = r > 1.$$

上式表明，当 $n > N$ 时级数的通项 u_n 是递增的，从而

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

比值判别法也称为达朗贝尔(D'Alembert)判别法. 需要注意的是：比值判别法对 $\rho = 1$ 的情形没有给出明确的结论，这意味着 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散. 例如 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$，$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}} = 1$，而 p 级数当 $p > 1$ 时收敛；当 $p \leqslant 1$ 时发散. 所以对 $\rho = 1$ 的情形，比较判别法失效，必须用其它方法判定.

例 11 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^4}$；　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n(x>0)$.

解　(1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$,所以级数收敛.

(2) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{3^n}{n^4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4}{(n+1)^4}=3>1$,所以级数发散.

(3) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{x}{\mathrm{e}}$,所以当$0<x<\mathrm{e}$时,级数收敛;当$x>\mathrm{e}$时,级数发散;当$x=\mathrm{e}$时,由于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$,所以

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!\left(\frac{\mathrm{e}}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,n=1,2,\cdots,$$

即

$$u_{n+1}>u_n,n=1,2,\cdots,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0,$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$发散.

综上可知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n(x>0)$当$0<x<\mathrm{e}$时收敛;当$x\geqslant\mathrm{e}$时发散.

定理 6　(根值判别法)

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$,则

(1) 当$\rho<1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2) 当$\rho>1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

根值判别法的证明思路与比值判别法的证明思路相同,证明留给读者完成.

根值判别法也称柯西(Cauchy)判别法.该判别法对$\rho=1$的情形同样失效,仍然考虑p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,　$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{-p}=1$,而$p$级数当$p>1$时收敛;当$p\leqslant 1$时发散.

例 12　判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^{n+1}}$.

解 (1) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-1}{n^2} = 3 > 1$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n^2-1)^n}{n^{2n}}$发散.

(2) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n+(-1)^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}2^{-1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \dfrac{1}{2} < 1$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^{n+1}}$收敛.

对此例中的(2),由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-(n+1)+(-1)^{n+2}}}{2^{-n+(-1)^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty}2^{-1+2(-1)^{n+2}}$不存在,故用比值判别法不能判定该级数的敛散性.可以证明:凡是能用比值判别法判定其敛散性的级数必能用根值判别法判定其敛散性,反之未必.不过在很多场合比值判别法更便于使用.

从对前面例9(2)的处理可以得到另一个有用的判别法.

定理7 (积分判别法)

设 (1) 函数f在$[1,+\infty)$上非负连续且单调递减;

(2) $u_n = f(n) \quad (n = 1,2,\cdots)$,

则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

证 当$k\leqslant x\leqslant k+1$时

$$u_{k+1} = f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k) = u_k,$$

故

$$u_{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant u_k \quad (k = 1,2,\cdots),$$

$$\sum_{k=1}^{n}u_{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

即

$$S_{n+1}-u_1\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant S_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$存在,从而$\left\{\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right\}$有界.而$S_{n+1}\leqslant u_1+\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$,故$\{S_n\}$有界,于是由定理3知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散,由于$f(x)$非负,故必有$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x = +\infty$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x = +\infty$,又$S_n\geqslant\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = +\infty$,故正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

例13 判别级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$的敛散性.

解 取$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$,则$f(x)$在$[1,+\infty)$上非负连续且单调递减,满足$f(n) = u_n$,又

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\mathrm{d}x$$