

内 容 提 要

本书是根据原国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》,并结合东南大学多年教学改革实践经验编写而成的教材.书中更加注重对基本概念、基本定理和重要公式的几何意义与背景的介绍;突出微积分的基本思想和方法;加强教学方法的分析与指导.在本书下册中,无穷级数增强了函数逼近的思想;多元函数微积分融进了向量与矩阵方法,为进一步学习现代数学打下了一定的基础;并在最后一章集中介绍微积分中常用的近似计算方法,增强了近似计算结果的思想方法.

本书分上、下两册,下册的内容为无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、多元数量值函数的积分、向量场的积分、微积分中的近似计算,书后并附有习题答案.

本书可供高等工业院校各专业使用,也可供自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/罗庆来等主编. —北京:高等教育出版社,2001

ISBN 7-04-010166-1

I. 高... II. 罗... III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 071729 号

责任编辑	王 强	封面设计	于文燕	责任绘图	吴文信
版式设计	马静如	责任校对	俞声佳	责任印制	韩 刚

高等数学(下册)

罗庆来 宋柏生 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×1092 1/16

版 次 2001 年 12 月第 1 版

印 张 17.75

印 次 2001 年 12 月第 1 次印刷

字 数 430 000

定 价 15.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第 6 章 无穷级数	(1)	第 7 章 向量代数与空间解析几何	(61)
§ 6.1 数项级数	(1)	§ 7.1 向量及其运算	(61)
6.1.1 无穷级数的概念	(1)	7.1.1 向量的概念	(61)
6.1.2 数项级数收敛的条件	(3)	7.1.2 向量的线性运算	(62)
6.1.3 数项级数的基本性质	(4)	7.1.3 向量的数量积与向量积	(63)
习题一	(7)	习题一	(67)
6.1.4 数项级数判别法	(7)	§ 7.2 空间直角坐标系及向量 运算的坐标表示	(68)
习题二	(16)	7.2.1 空间直角坐标系	(68)
§ 6.2 反常积分判别法	(18)	7.2.2 向量运算的坐标表示	(71)
6.2.1 无穷区间反常积分判别法	(18)	习题二	(76)
6.2.2 被积函数有无穷型间断点的 反常积分的判别法	(19)	§ 7.3 平面与直线	(77)
6.2.3 Γ 函数	(20)	7.3.1 平面的方程	(77)
习题三	(22)	7.3.2 直线的方程	(80)
§ 6.3 幂级数	(22)	7.3.3 有关平面、直线的几个基本 问题	(82)
6.3.1 函数项级数的基本概念	(22)	习题三	(86)
6.3.2 函数项级数的一致收敛性	(24)	§ 7.4 空间曲面与空间曲线	(87)
6.3.3 一致收敛级数的性质	(25)	7.4.1 球面与柱面	(88)
习题四	(27)	7.4.2 空间曲线	(89)
6.3.4 幂级数	(28)	7.4.3 锥面	(91)
习题五	(34)	7.4.4 旋转曲面	(92)
6.3.5 函数展开为幂级数	(34)	7.4.5 几个常见的二次曲面	(93)
习题六	(41)	7.4.6 曲面的参数方程	(95)
6.3.6 幂级数应用举例	(41)	习题四	(96)
习题七	(43)	§ 7.5 向量函数	(97)
§ 6.4 傅里叶(Fourier)级数	(43)	7.5.1 向量函数的极限和连续	(98)
6.4.1 三角函数系的正交性	(44)	7.5.2 向量函数的导数	(98)
6.4.2 函数展开为傅里叶级数	(44)	7.5.3 向量函数的积分	(99)
6.4.3 正弦级数和余弦级数	(49)	总习题	(99)
6.4.4 以 $2l$ 为周期的函数的 傅里叶级数	(52)	第 8 章 多元函数及其微分法	(101)
6.4.5 傅里叶级数的复数形式	(55)	§ 8.1 多元函数概念	(101)
习题八	(57)	8.1.1 n 维欧几里得空间的简单	
总习题	(58)		

知识	(101)	习题十	(150)
8.1.2 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的映射、 n 元函数 与向量值函数	(103)	总习题	(150)
习题一	(105)	第 9 章 多元数量值函数的积分	(154)
§ 8.2 多元函数的极限与连续	(106)	§ 9.1 多元数量值函数积分的 概念和性质	(154)
8.2.1 多元函数的极限	(106)	9.1.1 积分的概念	(154)
8.2.2 多元函数的连续性	(107)	9.1.2 积分的性质	(156)
习题二	(108)	§ 9.2 二重积分的计算	(157)
§ 8.3 偏导数	(109)	9.2.1 直角坐标系中二重积分 的计算	(157)
8.3.1 偏导数概念	(109)	9.2.2 极坐标系下二重积分的计算	(162)
8.3.2 偏导数的几何意义	(111)	9.2.3 二重积分的一般换元法则	(165)
8.3.3 高阶偏导数	(111)	习题一	(169)
习题三	(113)	§ 9.3 三重积分的计算	(171)
§ 8.4 全微分与梯度	(114)	9.3.1 直角坐标系中三重积分 的计算	(171)
习题四	(118)	9.3.2 柱面坐标系下三重积分的 计算	(175)
§ 8.5 复合函数微分法	(119)	9.3.3 球面坐标系下三重积分的 计算	(176)
8.5.1 全导数	(119)	9.3.4 三重积分的一般换元法则	(178)
8.5.2 复合函数微分法	(121)	习题二	(179)
习题五	(125)	§ 9.4 重积分的应用	(181)
§ 8.6 隐函数微分法	(127)	9.4.1 曲面的面积	(181)
8.6.1 由一个方程确定的隐函数	(127)	9.4.2 重积分在物理学中的应用 举例	(183)
8.6.2 由方程组确定的隐函数	(130)	习题三	(187)
习题六	(131)	§ 9.5 反常重积分	(188)
§ 8.7 方向导数	(132)	习题四	(191)
习题七	(134)	§ 9.6 第一型曲线积分的计算	(191)
§ 8.8 微分法的几何应用	(135)	习题五	(193)
8.8.1 空间曲线的切线与法平面	(135)	§ 9.7 第一型曲面积分的计算	(194)
8.8.2 曲面的切平面与法线	(136)	习题六	(196)
习题八	(137)	总习题	(197)
§ 8.9 多元函数的泰勒公式与 极值	(138)	第 10 章 向量场的积分	(200)
8.9.1 多元函数的泰勒公式	(138)	§ 10.1 向量场	(200)
8.9.2 极值	(141)	10.1.1 向量场的概念	(200)
8.9.3 最大值和最小值	(143)	10.1.2 向量线	(201)
8.9.4 条件极值——拉格朗日乘数法	(144)	§ 10.2 第二型曲线积分	(202)
习题九	(146)	10.2.1 第二型曲线积分的概念	(202)
* § 8.10 向量值函数的微分法	(147)		
8.10.1 向量值函数的微分	(147)		
8.10.2 向量值复合函数的求导法	(149)		

10.2.2 第二型曲线积分的计算	(205)	10.6 2 旋度	(235)
习题一	(209)	10 6 3 斯托克斯(Stokes)公式	(235)
§ 10.3 格林公式及其应用	(210)	10 6.4 空间曲线积分与路径无关 的条件	(239)
10.3.1 格林(Green)公式	(210)	习题五	(240)
10.3.2 平面曲线积分与路径无关 的条件	(213)	§ 10.7 有势场与无源场	(241)
10.3.3 全微分方程	(218)	10 7.1 有势场	(241)
习题二	(218)	10 7 2 无源场	(242)
§ 10.4 第二型曲面积分	(220)	10.7 3 算符 ∇	(242)
10.4 1 曲面侧的概念	(220)	习题六	(243)
10.4 2 第二型曲面积分的概念	(221)	总习题	(244)
10.4.3 第二型曲面积分的计算	(223)	第 11 章 微积分中的近似计算	(247)
10.4.4 两类曲面积分的关系	(226)	§ 11.1 方程求根	(247)
习题三	(226)	习题一	(249)
§ 10.5 散度与高斯公式	(227)	§ 11.2 定积分的近似计算	(249)
10.5 1 散度	(227)	习题二	(253)
10.5 2 高斯(Gauss)公式	(228)	§ 11.3 最小二乘法	(253)
习题四	(233)	习题三	(256)
§ 10.6 旋度与斯托克斯公式	(234)	习题答案	(257)
10 6.1 环量与环量面密度	(234)		

第6章 无穷级数

无穷级数与极限有着十分密切的关系,它是表示函数、函数逼近及数值计算的一种重要的数学工具.本章介绍无穷级数的基本知识和一些应用.

§ 6.1 数项级数

6.1.1 无穷级数的概念

定义 1 设有无穷实数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 称表达式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

为**数项级数**, 简称为**级数**, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 称为这个级数的**项**, u_n 称为级数的**通项** (或一般项).

例如 $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$ 是个级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$, 通项为 $\frac{1}{10^n}$.

我们知道, 有限多个实数相加有确定的意义, 其和仍然是一个实数. 那么无穷多个实数相加是否也有“和”? 现在采用“由有限认识无限”的方法讨论这个问题.

定义 2 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和, 若部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收

敛, 并称 S 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性与发散性统称为**敛散性**.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, 部分和 S_n 可以作为和 S 的近似值, 称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

为该级数的**余项**, S_n 与 S 之间的误差可由 $|r_n|$ 去衡量, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| = 0$, 这

表明, n 越大, S_n 与 S 之间的误差越小.

例 1 讨论等比级数(几何级数) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a \neq 0$) 的敛散性.

解 部分和 $S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} a \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$

当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ 不存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在;

当 $q = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na$ 不存在;

当 $q = -1$ 时, $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在.

综上分析知, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a \neq 0$) 当 $|q| < 1$ 时收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时发散.

例 2 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$,

所以此级数收敛, 其和为 1.

例 3 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$,

故部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty, \end{aligned}$$

所以此级数发散.

例 4 考察调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 考虑该级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{2^k}\}$, 有

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \\
S_2^3 &= S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&= S_2^2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&> 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

一般地,由数学归纳法可得

$$\begin{aligned}
S_2^k &= S_2^{k-1} + \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\
&> 1 + (k-1) \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1} \text{ 项}} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = +\infty$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 从而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

6.1.2 数项级数收敛的条件

定理 1 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证 设收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 因为通项 u_n 与部分和 S_n 有关系式 $u_n = S_n - S_{n-1}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

由定理 1 可知, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 5 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n; \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n}.$$

解 (1) 通项 $u_n = (-1)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在, 不满足级数收敛的必要条件, 故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 发散.

$$(2) \text{ 通项 } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 发散.

$$(3) \text{ 通项 } u_n = n \sin \frac{\pi}{n},$$

由于
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \pi = \pi \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n}$ 发散.

值得注意的是:通项 u_n 趋于零仅是级数收敛的一个必要条件,而不是级数收敛的充分条件.

换句话说,即使 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也不一定收敛.例如前面例 3 中, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$,但级数发散;例 4 中, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,但调和级数发散.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛是指其部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时存在极限.而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在的充分必要条件是: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时,对任意正整数 p ,有 $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$. 又 $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$,于是我们得到级数收敛的充分必要条件.

定理 2 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时,对 $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 总有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

例 6 应用柯西收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

证 $\forall \epsilon > 0$, 对 $\forall n, p \in \mathbf{N}_+$, 由于

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| &= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

所以,可取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时,对 $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

根据柯西收敛准则,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

6.1.3 数项级数的基本性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 S ,则对任意常数 k ,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛,且其和为 kS .

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, $\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} kS_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = kS,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛, 且其和为 kS .

由性质 1 不难推出: 若 k 为非零常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 同敛散.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 其和分别为 S, T , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $S \pm T$.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n, σ_n, w_n , 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = T, \\ w_n &= (u_1 \pm v_1) \pm (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= S_n \pm \sigma_n, \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm T.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 且其和为 $S \pm T$.

性质 3 在级数中去掉或添加有限多项, 不改变级数的敛散性.

证 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$, 设它们的前 n 项部分和分别为 S_n 与 S'_n , 则有

$$\begin{aligned} S'_n &= u_{m+1} + \cdots + u_{m+n} = (u_1 + \cdots + u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+n}) - (u_1 + \cdots + u_m) \\ &= S_{m+n} - S_m, \end{aligned}$$

其中 S_m 为一常数.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S , 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m+n} = S$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{m+n} - S_m) = S - S_m,$$

所以 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 $S - S_m$.

反之, 若 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S' , 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n + S_m) = S' + S_m,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 其和为 $S' + S_m$.

性质4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则不改变它的各项次序任意添加括号后构成的新级数 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ 仍然收敛且和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, $v_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}$, $v_2 = u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}$, $\cdots$, $v_m = u_{n_{m-1}+1} + \cdots + u_{n_m}$, $\cdots$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n , 则 $\sigma_1 = S_{n_1}$, $\sigma_2 = S_{n_2}$, $\cdots$, $\sigma_k = S_{n_k}$, $\cdots$, 故 $\{\sigma_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子列, 从而当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ 必存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 因此性质4成立.

性质4表明: 对收敛的数项级数, 也有结合律. 但性质4的逆命题不成立, 即加括号后的级数收敛, 不能保证原级数收敛. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散, 而加括号后的级数 $(1-1) + (1-1) + \cdots$ 收敛.

例7 判别下列级数的敛散性:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{(-1)^n 2^n}{3^n} \right)$;
- (2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{19} + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$;
- (3) $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{(n+9)^2} + \cdots$;
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{4^n} \right)$.

解 (1) 由例2和性质1可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$ 是公比为 $-\frac{2}{3}$ 的等比级数, 收敛, 所以由性质2知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{(-1)^n 2^n}{3^n} \right)$ 收敛.

(2) 级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{19} + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$ 是由级数 $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$ 添加了19项 $\left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{19}\right)$ 后所构成的, 而 $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$ 是以2为公比的等比级数, 发散, 所以由性质3知原级数也发散.

(3) 级数 $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{(n+9)^2} + \cdots$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 去掉了前面9项而得到的, 由例6知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

(4) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为公比的等比级数, 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{4^n} \right)$ 必发散. 这是因为若 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{4^n} \right)$ 收敛, 则由性质2知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{4^n} \right) - \frac{3}{4^n} \right)$ 也收敛, 矛盾!

习 题 一

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \cdots; \quad (2) 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \cdots.$$

3. 根据级数收敛的定义和性质判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{6}{7}\right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}); \quad (4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \frac{3^4}{2^4} + \cdots;$$

$$(5) 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \cdots; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

4. 利用柯西收敛准则判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$5. \text{ 证明 } \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2.$$

6. 已知级数 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots (u_n > 0)$ 收敛, 证明级数 $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n+1} + \cdots$ 也收敛.

6.1.4 数项级数判敛法

从定义出发判断一个级数是收敛还是发散, 就必须先求出级数前 n 项部分和 S_n 的表达式, 这只有对某些特殊的级数才可以做到, 而对一般的级数来说, 无法求出 S_n 的表达式, 也就无法用定义判断级数的敛散性, 更无法讨论级数和的问题. 但是, 如果能断定所论级数是收敛的, 那么部分和 S_n 就可作为和 S 的近似值, 而且只要 n 取得足够大, S_n 与 S 的误差就可以小于任意指定的精确程度. 因此, 级数求和的问题相对来讲就不如判断级数的敛散性来得重要. 为此, 下面我们将介绍级数敛散性的判定法.

1) 正项级数及其判敛法

所谓正项级数, 是指级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots).$$

显然,正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增的,即 $S_n \leq S_{n+1}$.于是若 $\{S_n\}$ 有界,则根据单调有界原理, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在;若 $\{S_n\}$ 无界,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.由此得到下列定理.

定理 3 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

例 8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ 的敛散性.

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} < 1, \end{aligned}$$

据定理 3 知级数收敛.

在定理 3 的基础上,我们可以得到正项级数的一些重要判敛法.

定理 4 (比较判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,且 $u_n \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$,则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则由定理 3 的必要性知其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界,即存在 $M > 0$,使

$S_n \leq M$. 由于 $u_n \leq v_n$,故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $\sigma_n \leq S_n \leq M$,因此 $\{\sigma_n\}$ 有界,由定理 3 的充分性知

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用反证法.若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则由(1)知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,这与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散矛盾,故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

注意:由级数的性质 3 可知,比较判别法中的条件 $u_n \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$ 可改为

$u_n \leq v_n (n > N)$,其中 N 为某一正整数.

例 9 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 4}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p \text{ 为实数});$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\ln n)^n}.$

解 (1) 由于 $\frac{4^n}{3^n+4} \geq \frac{4^n}{3^n+3^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ ($n=2,3,\dots$), 而等比级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 发散, 故

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+4}$ 发散.

(2) $p < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, 故级数发散;

$0 < p \leq 1$ 时, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散;

$p > 1$ 时, 由 $\frac{1}{k^p} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx$ ($k=2,3,\dots$), 知部分和

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^p} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = 1 + \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^n \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1}, \end{aligned}$$

故 $\{S_n\}$ 有界, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 **p 级数**. 由上面的讨论知, 当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散.

(3) 由于 $\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{2}{n^2}$, 而由上知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

(4) 当 $n \geq 8$ 时, $\ln n > 2$, 故

$$\frac{1}{1 + (\ln n)^n} \leq \frac{1}{(\ln n)^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 8),$$

而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\ln n)^n}$ 收敛.

应用比较判别法判定一个正项级数的敛散性时, 需要找一个已知敛散性的正项级数作为比较对象, 一般常用等比级数与 p 级数作为比较对象. 但建立通项之间的不等式往往需要一定的技巧, 因此我们常用下面的比较判别法的极限形式判定正项级数的敛散性.

定理 4' (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性;

(2) 当 $l = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 故对 $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \frac{l}{2},$$

即

$$-\frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} - l < \frac{l}{2}, \quad \frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2}l,$$

从而

$$\frac{l}{2}v_n < u_n < \frac{3l}{2}v_n \quad (n > N),$$

由比较判别法知结论成立.

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, 故对 $\varepsilon = 1$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| < 1,$$

即

$$-v_n < u_n < v_n \quad (n > N),$$

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$, 由反证法及(2)即知结论成立.

例 10 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+2)}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} \quad (x > 0).$$

解 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+2)}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散 ($p = \frac{2}{3}$ 的 p 级数),

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+2)}} \text{ 发散.}$$

(2) 对任意 $x > 0$, 只要 n 充分大, 总有 $\frac{x}{n} \in (0, \pi)$, 所以可以把 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}$ 作为正项级数处

理. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \quad (x > 0)$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} \quad (x > 0)$ 发散.

定理 5 (比值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证 (1) 当 $\rho < 1$ 时, 取 $\epsilon > 0$, 使 $r = \rho + \epsilon < 1$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 所以对上述 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \epsilon,$$

从而有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon + \rho = r (n > N),$$

即

$$\begin{aligned} u_{N+2} &< r u_{N+1}, \\ u_{N+3} &< r u_{N+2} < r^2 u_{N+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ u_{N+k} &< r u_{N+k-1} < r^{k-1} u_{N+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

而 $ru_{N+1} + r^2 u_{N+1} + \dots + r^{k-1} u_{N+1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{N+1} r^k$ 是公比为 $r < 1$ 的等比级数, 收敛. 于

是由比较判别法及级数性质 3 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 取 $\epsilon > 0$, 使 $\rho - \epsilon = r > 1$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 所以对上述 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \epsilon (n > N),$$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \epsilon = r > 1.$$

上式表明, 当 $n > N$ 时级数的通项 u_n 是递增的, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

比值判别法也称为达朗贝尔 (D'Alembert) 判别法. 需要注意的是: 比值判别法对 $\rho = 1$ 的情形没有给出明确的结论, 这意味着 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散. 例如 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1, \text{ 而 } p \text{ 级数当 } p > 1 \text{ 时收敛; 当 } p \leq 1 \text{ 时发散. 所以}$$

对 $\rho = 1$ 的情形, 比较判别法失效, 必须用其它方法判定.

例 11 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n (x > 0).$$

解 (1) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, 所以级数收敛.

(2) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{3^n}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4}{(n+1)^4} = 3 > 1$, 所以级数发散.

(3) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e}$, 所以当 $0 < x < e$ 时,

级数收敛; 当 $x > e$ 时, 级数发散; 当 $x = e$ 时, 由于 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, 所以

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{e}{n}\right)^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1, n = 1, 2, \dots,$$

即

$$u_{n+1} > u_n, n = 1, 2, \dots,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$ 发散.

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n (x > 0)$ 当 $0 < x < e$ 时收敛; 当 $x \geq e$ 时发散.

定理 6 (根值判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

根值判别法的证明思路与比值判别法的证明思路相同, 证明留给读者完成.

根值判别法也称柯西 (Cauchy) 判别法. 该判别法对 $\rho = 1$ 的情形同样失效, 仍然考虑 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{-p} = 1, \text{ 而 } p \text{ 级数当 } p > 1 \text{ 时收敛; 当 } p \leq 1 \text{ 时发散.}$$

例 12 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2 - 1)^n}{n^{2n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}.$

解 (1) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(3n^2 - 1)^n}{n^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2} = 3 > 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2 - 1)^n}{n^{2n}}$ 发散.

(2) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \frac{1}{2} < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n+1}}$ 收敛.

对此例中的(2), 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-(n+1)+(-1)^{n+2}}}{2^{-n+(-1)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1+2(-1)^{n+2}}$ 不存在, 故用比值判别法

不能判定该级数的敛散性. 可以证明: 凡是能用比值判别法判定其敛散性的级数必能用根值判别法判定其敛散性, 反之未必. 不过在很多场合比值判别法更便于使用.

从对前面例 9(2) 的处理可以得到另一个有用的判别法.

定理 7 (积分判别法)

设 (1) 函数 f 在 $[1, +\infty)$ 上非负连续且单调递减;

(2) $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$),

则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

证 当 $k \leq x \leq k+1$ 时

$$u_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = u_k,$$

故

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq u_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\sum_{k=1}^n u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n u_k,$$

即

$$S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx$ 存在, 从而 $\left\{ \int_1^{n+1} f(x) dx \right\}$ 有界. 而 $S_{n+1} \leq u_1 + \int_1^{n+1} f(x) dx$, 故 $\{S_n\}$ 有界, 于是由定理 3 知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 由于 $f(x)$ 非负, 故必有 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$, 又 $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 13 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 的敛散性.

解 取 $f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负连续且单调递减, 满足 $f(n) = u_n$, 又

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)} dx$$