鞅分析及其应用

胡必锦 朱自清

华中科技大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

鞅分析及其应用

胡必锦　朱自清

华中科技大学出版社
（华中理工大学出版社）

图书在版编目(CIP)数据

鞅分析及其应用/胡必锦 朱自清
武汉:华中科技大学出版社, 2001 年 1 月
ISBN 7-5609-1999-5

Ⅰ. 鞅…
Ⅱ. ①胡… ②朱…
Ⅲ. 鞅分析-高等学校-教材
Ⅳ. O211.6

鞅分析及其应用 胡必锦 朱自清

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:张 欣 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印 刷:华中科技大学出版社印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:5.875 字数:136 000
版次:2001 年 1 月第 1 版 印次:2001 年 1 月第 1 次印刷 印数:1—1 200
ISBN 7-5609-1999-5/O · 211 定价:12.00 元

前　言

鞅论是概率论的重要分支，它是建立随机微积分学的主要基础之一，同时它本身就具有广泛的应用，在数量经济学、最优决策论、随机最优控制、随机最优滤波、分布参数估计等领域中鞅分析的应用极大地促进了这些学科的发展．本书介绍的鞅分析属经典鞅论，目的在于为那些有一定自学能力而又需要鞅分析知识的科技工作者以及工科院校的研究生和高年级学生提供一种入门性的参考材料，并力求适应那些手边缺乏资料的读者能够顺利地阅读本书的内容．我们在编写过程中尽可能讲清概念的来龙去脉，对于那些比较重要的结论和结果尽可能给出完整的证明．

本书共分七章，第一～六章由胡必锦编写，第七章由朱自清编写，第一～三章介绍必须的基础知识，第四～五章介绍半鞅，第七章介绍鞅论的某些应用．

本书编写过程中考虑各个方面的需要，因此，在材料的选择和连接等方面难免错漏，敬请专家和读者批评指正．

作者

1999 年 11 月

第一章　σ-代数

§1　定义和例

定义 1.1.1　设 Ω 为一基本事件空间．$\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个非空子集类．若

(i) $\forall A\in\mathscr{A}$，有 $A^c=\Omega\backslash A\in\mathscr{A}$；

(ii) $\forall A_i\in\mathscr{A}(i=1,2)$，有 $A_1\cup A_2\in\mathscr{A}$；

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个代数．

若将(ii)改为

(iii) $\forall A_i\in\mathscr{A}, i=1,2,\cdots$，有 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{A}$，

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个 σ-代数．

注 1　在上面的定义中，"$\mathscr{A}$ 非空"可以代之以"$\Omega\in\mathscr{A}$"或"$\varnothing\in\mathscr{A}$"或"$A_0\in\mathscr{A}$"($A_0$ 为 Ω 某个子集)．

注 2　σ-代数必封闭于可数交运算，即若 $A_i\in\mathscr{A}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{A}$．这是因为

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Big)^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^c\in\mathscr{A}.$$

例 1.1.1　设 $\mathscr{A}=\{\varnothing,A,A^c,\Omega\}$，其中 $A\in\Omega$，则 $\mathscr{A}$ 为一个 σ-代数．

显然对 $\mathscr{A}$，条件(i)、(ii)或(iii)均成立．这表明若一个代数只有有限个元素，则它同时也是一个 σ-代数．

例 1.1.2　设 $A_0=\varnothing, A_i\subset\Omega, i=1,2,\cdots, A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，则

$$\mathscr{A}=\{A: A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{k_i}, k_i\in\mathbf{N}\}$$

为一个 σ-代数，其中 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

σ-代数理论在概率论、过程论及随机微(积)分学中经常被涉及到. 因此，了解 σ-代数的结构特征是很有必要的. 从定义 1.1.1 中可以看出，代数的结构比 σ-代数的结构简单.

定义 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 中的一个子集类，记

$$G=\{\mathscr{G}:\mathscr{A}\subset\mathscr{G},\mathscr{G}\text{ 为 }\Omega\text{ 上的 }\sigma\text{-代数}\}.$$

令
$$\sigma(\mathscr{A})=\bigcap\mathscr{G},\text{其中 }\mathscr{G}\in G,$$

则称 $\sigma(\mathscr{A})$ 为 Ω 上包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-代数.

例如，在例 1.1.1 中的 σ-代数 $\mathscr{A}$ 就可以看成是由只具有一个元素 A 的集类产生的 σ-代数.

在 σ-代数的结构中，单调性是重要的特征之一.

定义 1.1.3 设 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一个非空子集类. 若对 $\mathscr{A}$ 中的任意单调序列 $\{A_n,n\geqslant 1\}$，即 $A_n\subseteq A_{n+1}$ 或 $A_n\supseteq A_{n+1}(n\geqslant 1)$，有

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A\in\mathscr{A},$$

则称 $\mathscr{A}$ 为一个单调类.

例 1.1.3 设 $A_n\subset\Omega,\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A$，且 $A_n\neq A,n=1,2,\cdots$则集类 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$不是一个单调类，这是因为 $A\overline{\in}\mathscr{A}$.

引理 1.1.1 任意 σ-代数为单调类，任意单调的代数必为 σ-代数.

证 假定 $\mathscr{A}$ 为 σ-代数，$A_n,n\geqslant 1$，为 $\mathscr{A}$ 的一个单调子列，比如，$A_n\subset A_{n+1},n\geqslant 1$，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}.$$

于是，$\mathscr{A}$ 为单调类.

现设 $\mathscr{A}$ 为单调代数，那么$\forall\ A_k\in\mathscr{A},k=1,2,\cdots$，令 $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k,n\geqslant 1$，则 $B_n\in\mathscr{A}$，且 $B_n\subset B_{n+1},n\geqslant 1$. 由 $\mathscr{A}$ 为单调类知：$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{A}$，从而 $\mathscr{A}$ 为一个 σ-代数.

定义 1.1.4 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的非空子集类，记

$$M=\{\mathscr{E}:\mathscr{A}\subset\mathscr{E},\mathscr{E}\text{ 为 }\Omega\text{ 上的单调类}\}.$$

令 $m(\mathscr{A})=\bigcap\mathscr{E}$，其中 $\mathscr{E}\in M$，则称 $m(\mathscr{A})$ 为 Ω 上包含 $\mathscr{A}$ 的最小单调类.

例如，按引理 1.1.1，由代数产生的 σ-代数就是包含此代数的最小单调类.

§2 π-类和 λ-类

在 σ-代数的定义中要求集类封闭于可数并交运算. 这个条件一般难以验证. Dynkin 利用单调类的性质提出了一种有效的判断方法.

定义 1.2.1 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个非空子集类. 若

$$A,B\in\mathscr{A}\Longrightarrow A\cap B\in\mathscr{A},$$

则称 $\mathscr{A}$ 为一个 π-类.

定义 1.2.2 如果 Ω 上的子集类 $\mathscr{A}$ 满足下列条件：

(i) $\Omega\in\mathscr{A}$；

(ii) 若 $A,B\in\mathscr{A}$，且 $A\supset B$，则必有 $A-B\in\mathscr{A}$；

(iii) 若 $A,B\in\mathscr{A}$，且 $A\cap B=\varnothing$，则必有 $A\cup B\in\mathscr{A}$；

(iv) 若 $A_n\in\mathscr{A}$，且 $A_n\uparrow$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{A}$；

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个 λ-类.

引理 1.2.1 λ-类必是单调类.

证 按定义 1.2.2 中的条件 (i) 和 (ii)，有

$$A\in\mathscr{A}\Longrightarrow A^c\in\mathscr{A}.$$

现设 $A_n\in\mathscr{A}$，且 $A_n\downarrow$，记 $A=\bigcap A_n=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$，则

$$A^c=\bigcup_n A_n^c.$$

注意，$A_n^c\in\mathscr{A}$，且 $A_n^c\uparrow$，因此，$A^c=\lim\limits_{n\to\infty}A_n^c\in\mathscr{A}$. 从而，$A\in\mathscr{A}$，故集类 $\mathscr{A}$ 为一个单调类.

引理 1.2.2 若一个 λ-类同时又是一个 π-类，则它必为一个

σ-代数.

证 设集类 $\mathscr{A}$ 既为 λ-类又为 π-类，那么，按引理 1.2.1，$\mathscr{A}$ 为一个单调类. 若能证明 $\mathscr{A}$ 是一个代数，则按引理 1.1.1，$\mathscr{A}$ 为一个 σ-代数.

让 $A,B\in\mathscr{A}$，且 $A_1=A-A\cap B$. 因 $A\cap B\in\mathscr{A}$，且 $A\cap B\subset A$，而有 $A_1\in\mathscr{A}$. 注意：$A\cup B=A_1\cup B$，且 $A_1\cap B=\varnothing$，从而，$A_1\cup B\in\mathscr{A}$，于是，$A\cup B\in\mathscr{A}$，故 $\mathscr{A}$ 为一个代数.

例 1.2.1 设 $A,B\subset\Omega$，$A\cap B\neq\varnothing$，$A-B\neq\varnothing$，$B-A\neq\varnothing$，则

$$\mathscr{A}=\{\varnothing,\Omega,A,B,A^c,B^c\}$$

为一个 λ-类，但 $\mathscr{A}$ 不包含 A,B 之交.

定理 1.2.1 若 λ-类 $\mathscr{A}$ 包含 π-类 $\mathscr{D}$，则

$$\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A},$$

其中，$\sigma(\mathscr{D})$ 表示由 $\mathscr{D}$ 产生的 σ-代数.

证 设 $\mathscr{G}$ 是含 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类，于是

$$\mathscr{D}\subset\mathscr{A}\Longrightarrow\mathscr{G}\subset\mathscr{A}.$$

若 $\mathscr{G}$ 又为 π-类，则按引理 1.2.2，$\mathscr{G}$ 为 σ-代数，故 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}$. 从而，$\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A}$.

以下分二步来证明 $\mathscr{G}$ 为 π-类.

第一步，令 $\mathscr{G}_1=\{A:A\subset\Omega,A\cdot D\in\mathscr{G}\text{ 对一切 }D\in\mathscr{D}\}$，则 $\mathscr{G}_1$ 具有下列性质：

(i) $\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_1$（$\because\mathscr{D}$ 为 π-类）；

(ii) $\mathscr{G}_1$ 为 λ-类（$\because\mathscr{G}$ 是 λ-类）.

注意，$\mathscr{G}$ 是含 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类，从而，有 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_1$，故对任意 $A\in\mathscr{G}$，$D\in\mathscr{D}$，按 $\mathscr{G}_1$ 之定义，有

$$A\cdot D\in\mathscr{G}. \tag{1.2.1}$$

第二步，令

$$\mathscr{G}_2=\{B:B\subset\Omega,A\cdot B\in\mathscr{G}\text{ 对一切 }A\in\mathscr{G}\},$$

则 $\mathscr{G}_2$ 具有下列性质：

(i) $\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_2$（由 (1.2.1) 式）；

(ii)$\mathscr{G}_2$ 为 λ-类(由 $\mathscr{G}$ 是 λ-类);

于是,$\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_2$. 按 $\mathscr{G}_2$ 之定义,对$\forall$ $A,B\in\mathscr{G}$,有

$$A\cap B\in\mathscr{G}.$$

这表明:$\mathscr{G}$ 为一个 π-类.

推论 1.2.1 若 $\mathscr{A}$ 为包含 π-类 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类,则

$$\mathscr{A}=\sigma(\mathscr{D}).$$

§3 单调系和 λ-系

(一)乘积 σ-代数

定理 1.3.1 设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ-代数,则称$(\Omega,\mathscr{F})$为一个可测空间. 若 Ω 中的子集 $A\in\mathscr{A}$,则称 A 为 $\mathscr{F}$-可测集.

定理 1.3.2 设$(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$为可测空间,其中 $i=1,2,\cdots,n$.

记
$$\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n):\omega_i\in A_i\subset\Omega_i\},$$
$$\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i=\sigma(\{B:B=\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i\}).$$

则称 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i$ 为 n-维乘积 σ-代数;称 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$ 为 n-维乘积空间;称 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathscr{F}_i)=(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i,\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i)$为 n-维乘积可测空间.

注意,即使 $\mathscr{F}_i$ 是 σ-代数,集类$\{B:B=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i\}$也不一定是 σ-代数,因此,关于此集类的 σ 化是必要的. 例如,设 $\Omega_i=\overline{R}=[-\infty,\infty],i=1,2$. 又设

$$A_1=[-\infty,0],\quad A_2=[0,\infty],$$
$$\mathscr{F}_i=\{\varnothing,\Omega_i,A_1,A_2\}(i=1,2),$$

则集类

$$\{B:B=A^{(1)}\times A^{(2)},A^{(i)}\in\mathscr{F}_i,i=1,2\}$$

就不包含下列元素:

$$B_k=\Omega_1\times\Omega_2-(k),\quad k=1,2,3,4,$$

其中(k)表示第 k 象限．

定理 1.3.3 设

$$G=\{A:A=\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i\};$$

$$\mathscr{A}=\{B:B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i,m\geqslant1,B_i\in G,B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)\};$$

则集类 $\mathscr{A}$ 为含 G 的最小代数．

证 显然，对$\forall\ C_1,C_2\in G$，有 $C_1\cdot C_2\in G$. 从而，G 为 π-类．假定 $\mathscr{A}_0$ 是含 G 的最小代数，则必有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}_0$. 事实上对$\forall\ B\in\mathscr{A}$，存在 $m\geqslant1,B_i\in G$，使得：$B=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i$. 于是，$B\in\mathscr{A}_0$. 因此，为使定理真，仅需证明 $\mathscr{A}$ 为一个代数．

$\forall\ A_i\in\mathscr{A}(i=1,2)$，存在 $m\geqslant1,B_i,C_i\in G,i=1,2,\cdots,m$，使得 $B_i\cdot B_j=\varnothing=C_i\cdot C_j(i\neq j),i,j=1,2,\cdots,m$ 且

$$A_1=\bigcup_{i=1}^{m}B_i,A_2=\bigcup_{i=1}^{m}C_i.$$

于是

$$A_1\cdot A_2=\bigcup_{i,j=1}^{m}B_i\cdot C_j=\bigcup_{k=1}^{l}D_k,\text{其中 }D_k\in G,D_i\cdot D_j=\varnothing(i\neq j),$$

从而，$A_1\cdot A_2\in\mathscr{A}$，此即表明：$\mathscr{A}$ 是 π-类．

假定如下命题成立：

命题(＊)：若 $B\in G$，则 $B^c\in\mathscr{A}$.

注意：$\forall\ A\in\mathscr{A}$，存在 $m\geqslant1$ 及 $B_i\in G,B_iB_j=\varnothing(i\neq j),i,j=1,2,\cdots,m$，使得 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i$. 从而，$A^c=\bigcap\limits_{i=1}^{m}B_i^c$. 利用命题(＊)，可得：$A^c\in\mathscr{A}$. 由此推出 $\mathscr{A}$ 为封闭于补运算的 π-类，从而，$\mathscr{A}$ 为一个代数.

现在仅就 $n=2$ 来证明命题(＊). 一般情形可用归纳法证之. $B\in G$ 及 $n=2$ 表明：存在 $A_i\in\mathscr{F}_i,i=1,2$，使得：$B=A_1\times A_2$. 于是

$$B^c=A_1^c\times A_2\cup A_1\times A_2^c\cup A_1^c\times A_2^c.$$

此式右边的三项互不相交，且均为 G 的元素，故 $B^c\in\mathscr{A}$.

定义 1.3.1 设 $A\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{m}\mathscr{F}_i(m\leqslant n)$，则形如 $A\times\mathop{\times}\limits_{m+1}^{n}\Omega_l$ 的集叫做具有 m-维基 A 的柱集.

定义 1.3.2 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i),i=1,2,\cdots$，为可测空间. 记

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots):\omega_i\in A_i\subset\Omega_i,i\geqslant 1\};$$

$$\mathscr{G}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{A:A=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i,1\leqslant i\leqslant m;A_i=\Omega_i,i>m\};$$

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{F}_i=\sigma(\mathscr{G});$$

则称 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}(\Omega_i,\mathscr{F}_i)=(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\Omega_i,\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{F}_i)$ 为无穷维可测空间.

(二)可测函数

定义 1.3.3 设 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，则有

$$\mathscr{A}=\{A:A=(a,b],a,b\in\mathbf{R},\text{或 }A=(-\infty,b],b\in\mathbf{R}\}.$$

$$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A}).$$

则称 $\mathscr{B}$ 为 Borel σ-代数. $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 为 1-维 Borel 可测空间. $\mathscr{B}$ 中的元素 B 叫做 $\mathbf{R}$ 中的 Borel 子集.

定义 1.3.4 若 $\xi:(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 为可测映射，即

$$\{\omega:\xi(\omega)\in B,\omega\in\Omega\}\in\mathscr{F}(\forall\ B\in\mathscr{B}),$$

则称 ξ 是 $\mathscr{F}$-可测的.

若 ξ 是从 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 到其自身的可测映射，则称 ξ 为 Borel 可测函数或简称为 Borel 函数.

定义 1.3.5 设 H 为非负函数族. 如果

(i) $1\in H$;

(ii) $x_n\in H$，且 $x_n\uparrow x\Longrightarrow x\in H$;

(iii) $x_i\in H$，c_i 为有限实数，$i=1,2$，且 $c_1x_1+c_2x_2\geqslant 0$，$\Longrightarrow c_1x_1+c_2x_2\in H$;

则称 H 为 λ-系.

定义 1.3.6 设 M 为非空非负函数族．若

(i) $x_n\in M$，且 $x_n\uparrow x\Longrightarrow x\in M$，

(ii) $x_i\in M$，C_i 为有限非负实数，$i=1,2$，

$\Longrightarrow C_1x_1+C_2x_2\in M$，

则称 M 为单调系．

定理 1.3.4 λ-系必为单调系．其逆不真．

定理 1.3.5 设 $\mathscr{D}$ 是 Ω 的子集类，H 是 Ω 上的非负函数族，且

$$\{x:x=\chi_A,A\in\mathscr{D}\}\subset H, \tag{1.3.1}$$

其中，
$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\overline{\in}A.\end{cases}$$

若 (i) $\mathscr{D}$ 为 π-类，H 为 λ-系，

(ii) $\mathscr{D}$ 为 σ-代数，H 为单调系，

则 H 包含所有非负 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数．

证 设 x 为任意非负 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数，则

$$A_{k,n}=\left\{\omega:\frac{k}{2^n}\leqslant x(\omega)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\in\sigma(\mathscr{D}),\forall\ n\geqslant 1,0\leqslant k\leqslant 4^n-1;$$

$$A_{4^n,n}=\{\omega:2^n\leqslant x(\omega)\}\in\sigma(\mathscr{D}).$$

令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{4^n}\frac{k}{2^n}\chi_{A_{k,n}}(\omega)$，则 $x_n\forall\ n\geqslant 2$ 是 $\sigma(\mathscr{D})$-可测的，且 $x_n\uparrow x$. 如果 $x_n\in H(n\geqslant 2)$，则因 H 在条件(i)或(ii)下均为单调系，必有 $x\in H$. 从而得到结论．

令 $\mathscr{G}=\{A:\chi_A\in H,A\subset\Omega\}$，则按(1.3.1)式有 $\mathscr{D}\subset\mathscr{G}$.

若 $\mathscr{D}$ 为 σ-代数，则有 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}$. 从而，$A_{k,n}\in\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}$. 于是，$\chi_{A_{k,n}}\in H$. 注意：$\frac{k}{2^n}\geqslant 0$ 及 H 为单调系，而有 $x_n\in H(n\geqslant 2)$，故在条件(ii)下得到所要求的结论．

现设条件(i)成立．如果 $\mathscr{G}$ 为 λ-类，则由 $\mathscr{D}$ 为 π-类及定理 1.2.1 可知：$\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}$. 从而，$x_n\in H(n\geqslant 2)$. 因此，剩下的问题是验证 $\mathscr{G}$ 为 λ-类．

(i)$\Omega\in\mathscr{G}$($\because\chi_\Omega=1\in H$).

(ii)$A,B\in\mathscr{G},A\cdot B=\varnothing\Rightarrow\chi_A,\chi_B\in H$. 取 $c_1=1=c_2$,则 $\chi_A+\chi_B\geqslant0$. 由 H 为 λ-系,有 $\chi_A+\chi_B\in H$,故

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B\Longrightarrow\chi_{A\cup B}\in H\Longrightarrow A\cup B\in\mathscr{G}.$$

(iii)$A,B\in\mathscr{G},A\supset B\Longrightarrow\chi_A$、$\chi_B\in H$,取 $c_1=1,c_2=-1$,则 $\chi_A-\chi_B=\chi_{A-B}\geqslant0\Longrightarrow\chi_{A-B}\in H\Longrightarrow A-B\in\mathscr{G}$.

(iv)$A_n\in\mathscr{G},(n\geqslant1)$且 $A_n\uparrow\Longrightarrow\chi_{A_n}\uparrow,\chi_{A_n}\in H$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}\in H\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{G},$$

故 $\mathscr{G}$ 为 λ-类.

(三)可测函数的表现

设 ξ 为定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的实值可测函数. 记

$$\xi^{-1}(\mathscr{B})=\{A:A=\{\omega:\xi(\omega)\in B\},B\in\mathscr{B}\}\subset\mathscr{F},$$

则 $\xi^{-1}(\mathscr{B})$亦为 σ-代数,通常记为 $\sigma(\xi)=\xi^{-1}(\mathscr{B})$,有时也称它是由 ξ 产生的 σ-代数.

定义 1.3.7 设 T 为任一有序集. $\{x_t,t\in T\}$为定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的实可测函数族,让

$$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\{\omega:x_t(\omega)\in B\},B\in\mathscr{B},t\in T\}),\tag{1.3.2}$$

则称 $\sigma(x_t,t\in T)$为由此可测函数族产生的 σ-代数.

例 1.3.1 设 $T=\{1,2,\cdots\}$,则

$$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\{x_i\leqslant\lambda_i\},i\in T,\lambda_i\in\mathbf{R}\}),$$

$$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i\leqslant\lambda_i\},n\geqslant1,\lambda_i\in\mathbf{R}\}),$$

或 $$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i\in B_i\},n\geqslant1,B_i\in\mathscr{B}\}).$$

例 1.3.2 设 $T=[0,\infty)$,让

$$\mathscr{A}=\{A:A=\{\omega;x_{t_1}(\omega),\cdots,x_{t_n}(\omega)\},\in B_n\},n\geqslant1;t_i\in T,t_1<\cdots<t_n,B_n\in\mathscr{B}^n\},$$

则 $\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\mathscr{A})$,其中,$\mathscr{B}^n$ 为 n-维 Borel σ-代数.

假定 $\mathscr{X}_T$ 为一切定义在 T 上的函数集，让

$$\mathscr{B}_T=\sigma(\{B:B=\bigcap_{k=1}^{n}\{x:x_{t_k}\leqslant\lambda_k\},$$
$$n\geqslant 1;t_k\in T,t_1<\cdots<t_n,\lambda_k\in\mathbf{R}\}),$$

则 $$\sigma(x_t,t\in T)=\{A:A=\{\omega:x.(\omega)\in B\},B\in\mathscr{B}_T\}.$$

定理 1.3.6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是定义于可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的实值可测函数，则定义于 Ω 上的实值函数 $\xi(\omega)$ 是 $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$-可测的充要条件是：存在 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 函数 f，使得：$\xi(\omega)=f(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$.

证 充分性显然．下证必要性．

注意到任意可测函数均可作如下分解

$$\xi(\omega)=\xi^+(\omega)-\xi^-(\omega),$$

其中，$\xi^{\pm}(\omega)$ 为非负可测函数，因此，不妨假定：$\xi(\omega)$ 为非负可测函数，即 $\xi(\omega)\geqslant 0,(\forall\ \omega\in\Omega)$.

定义下列集：

$\mathscr{G}=\{f:f:(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)\longrightarrow(\mathbf{R},\mathscr{B})\}$（即 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 函数类）.

$H=\{\xi:\xi(\omega)=f(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)),f\in\mathscr{G},\omega\in\Omega$，且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\}$.

$$\mathscr{D}=\{D:D=\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k(\omega)\leqslant\lambda_k\},\lambda_k\in\mathbf{R}\}.$$

显然 $\mathscr{D}$ 为 π-类，且 $\sigma(\mathscr{D})=\sigma(\underline{X})$，其中 $\underline{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

对 $\forall\ D\in\mathscr{D}$，有 $D=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\{X_k(\omega)\leqslant\lambda_k\}$. 令

$$B^{\underline{\lambda}}=\bigcap_{k=1}^{n}\{\underline{X}:X_k\leqslant\lambda_k\},\tilde{\chi}_{\underline{\lambda}}(x)=\begin{cases}1, & \underline{X}\in B^{\underline{\lambda}},\\ 0, & \underline{X}\notin B^{\lambda},\end{cases}$$

则 $\chi_D(\omega)=\tilde{\chi}_{\underline{\lambda}}(\underline{X}(\omega))(\omega\in\Omega)$. 因 $\tilde{\chi}_{\lambda}\in\mathscr{G}$ 而有 $\chi_D\in H$.

于是，$$\{\xi:\xi=\chi_D,D\in\mathscr{D}\}\subset H.$$

如果 H 为 λ-系，则由定理 1.3.5，一切 $\sigma(X)$-可测的函数属于 H. 再由 H 之定义即得结论.

下面来验证 H 为 λ-系．

(i)$1\in H$(按 H 之定义).

(ii)$\xi_i\in H$,c_i 为有限实数 ($i=1,2$),且 $c_1\xi_1+c_2\xi_2\geqslant 0$,则

$$c_1\xi_1+c_2\xi_2\in H.$$

事实上,$\xi_i\in H\Longrightarrow\exists\ f_i\in\mathscr{G}$,使得

$\xi_i(\omega)=f_i(\underline{X}(\omega)),f_i(\underline{x})\geqslant 0(\forall\ \underline{x}\in\mathbf{R}^n),i=1,2.$

注意:$B^c\triangleq\{c_1f_1=-c_2f_2=\pm\infty\}\cup\{c_1f_1+c_2f_2<0\}\in\mathscr{B}^n$. 令

$f(\underline{x})=(c_1f_1(\underline{x})+c_2f_2(\underline{x}))\tilde{\chi}_B(\underline{x}),(\forall\ \underline{x}\in\mathbf{R}^n),$

则显然有 $f\in\mathscr{G}$,且

$$f(\underline{X}(\omega))=c_1\xi_1(\omega)+c_2\xi_2(\omega)\quad(\omega\in\Omega),$$

$$f(\underline{x})\geqslant 0\quad(\underline{x}\in\mathbf{R}),$$

故
$$c_1\xi_1(\cdot)+c_2\xi_2(\cdot)\in H.$$

(iii)若 $\xi_k\in H$,且 $\xi_k\uparrow\xi$,则 $\xi\in H$.

事实上,$\xi_k\in H\Longrightarrow\exists\ f_k\in\mathscr{G}$,使得 $f_k(\underline{x})\geqslant 0\quad(\underline{x}\in\mathbf{R}^n)$,

$$\xi_k(\omega)=f_k(\underline{X}(\omega)).$$

从而,有 $f_k(\underline{X}(\omega))\uparrow\xi(\omega)$. 令

$$g_m(\underline{x})=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{f_i(\underline{x})\}\quad(\underline{x}\in\mathbf{R}^n),$$

则 $g_m\uparrow g\in\mathscr{G}$,且 $g(\underline{x})\geqslant 0(\underline{x}\in\mathbf{R}^n)$,

$$0\leqslant f_m(\underline{X}(\omega))=g_m(\underline{X}(\omega))\leqslant f_{m+1}(\underline{X}(\omega))\quad(\omega\in\Omega),$$

故 $g(\underline{X}(\omega))=\xi(\omega)\quad(\omega\in\Omega)$,从而 $\xi\in H$.

按定义 1.3.5,H 为 λ-系.

定理 1.3.7 设$\{X_t,t\in T\}$为定义在$(\Omega,\mathscr{F})$上的一族实值可测函数,则 $\xi(\omega)$是 $\sigma(X_t,t\in T)$-可测的充要条件是:存在无穷维空间上的 Borel 函数 f 及$(t_i,i\geqslant 1)\subset T$,使得

$$\xi(\omega)=f(X_{t_1}(\omega),X_{t_2}(\omega),\cdots),t_i\in T,i=1,2,\cdots$$

证 充分性显然,现证必要性.

定义下列集:

$$\mathscr{G}=\{f:f:(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)\longrightarrow(\mathbf{R},\mathscr{B})\}.$$

$H=\{\xi:\xi(\omega)=f(\underline{X}(\omega)),\omega\in\Omega;f\in\mathscr{G}$ 且 $f(\underline{x})\geqslant 0,\underline{x}\in\mathbf{R}^\infty,$

其中，$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots)$，$\underline{X}=(X_{t_1},X_{t_2},\cdots)$，$t_i\in T$，$i=1,2,\cdots\}$.

$\mathscr{D}=\{D:D=\{\omega:X_{t_k}(\omega)\leqslant\lambda_k,1\leqslant k\leqslant n\};n\geqslant 1;\lambda_i\in R,t_i\in T,1\leqslant i\leqslant n\}$.

显然，$\mathscr{D}$ 是 Ω 上的 π-类；$\sigma(\mathscr{D})=\sigma(X_t,t\in T)$，让

$$\chi_D(\omega)=\chi_{B_D}(\underline{X}_n(\omega)),$$

其中，$\underline{X}_n(\omega)=(X_1,\cdots,X_n)$，$B_D=\{\underline{x}_n:x_i\leqslant\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n\}$. 令

$$f(\underline{x}_n)=\chi_{B_D}(\underline{x}_n)\geqslant 0,$$

则 $f\in\mathscr{G}$，从而，$\chi_D\in H$，于是得到

$$\{\xi:\xi=\chi_D,D\in\mathscr{D}\}\subset H.$$

类似于定理 1.3.6 之证明可验证：H 为 λ-系．从而，利用定理 1.3.2 即知：H 包含一切 $\sigma(\mathscr{D})=\sigma(X_t,t\in T)$-可测的非负函数．

对于一般的 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数 $\xi(\omega)$，可有分解式：

$$\xi(\omega)=\xi^+(\omega)-\xi^-(\omega)\quad(\omega\in\Omega),$$

其中，$\xi^\pm(\omega)$ 均为非负 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数. 由上述证明知：存在 $\{t_i\}$ 和 $\{t'_i\}\subset T$ 及 $f^\pm\in\mathscr{G}$，使得

$$\xi^+(\omega)=f^+(X_{t_1}(\omega),X_{t_2}(\omega),\cdots),$$
$$\xi^-(\omega)=f^-(X_{t'_1}(\omega),X_{t'_2}(\omega),\cdots).$$

让 $\{\bar{t}_k\}=\{t_i\}\cup\{t'_i\}$，则必有

$$\xi(\omega)=\bar{f}(X_{\bar{t}_1}(\omega),X_{\bar{t}_2}(\omega),\cdots),\omega\in\Omega,$$

其中，
$$\bar{f}^-(X_{\bar{t}_1},X_{\bar{t}_2},\cdots)=f^-(X_{t'_1},X_{t'_2},\cdots),$$
$$\bar{f}^+(X_{\bar{t}_1},X_{\bar{t}_2},\cdots)=f^+(X_{t_1},X_{t_2},\cdots).$$

这就完成了此定理的证明．

第二章　条件期望

鞅分析是在条件期望理论的基础上发展起来的一个数学分支，因此，条件期望理论在随机分析中是重要基础之一．本章将介绍条件期望的概念及其基本性质．

设 Ω 为基本事件空间，$\mathscr{A}$ 是 Ω 上的非空子集类，μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的实值集函数．

若对 $\forall A \in \mathscr{A}$，有 $|\mu(A)| < \infty$，则说 μ 在 $\mathscr{A}$ 上是有限的．

若 $A \in \mathscr{A}$，且 $\exists \{A_i, i \geqslant 1\} \subset \mathscr{A}$，$\ni A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 且 $|\mu(A_i)| < \infty$，$i \geqslant 1$，则说 $\mu(A)$ 是 σ-有限的．

若 $\Omega \in \mathscr{A}$，且 $\exists$ 集列 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathscr{A}$，$\ni \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ 且 $|\mu(A_n)| < \infty$，$n \geqslant 1$，则说 μ 在 $\mathscr{A}$ 上 σ-有限．

例如，在可测空间 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上定义的 Lebesque 测度 λ 就是 σ-有限的．定义在其上的概率测度 μ 是全有限的．本章所指的测度均是非负 σ-可加集函数．

§1　Radon-Nikodym 定理

定理 2.1.1　设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为一测度空间，T 为任一非空实数集，$\{g_t, t \in T\}$ 是从 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathscr{F}$-可测的函数族．若函数 $g: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ 满足下列条件：

(i) g 是 $\mathscr{F}$ 可测的；

(ii) $g \geqslant g_t \pmod{\mu}$，$t \in T$；

(iii) 若 h 是满足条件(i)、(ii)的任意 $\mathscr{F}$-可测函数，则必有 $h \geqslant g \pmod{\mu}$，那么，称 g 为 $\{g_t, t \in T\}$ 的本质上确界．记为