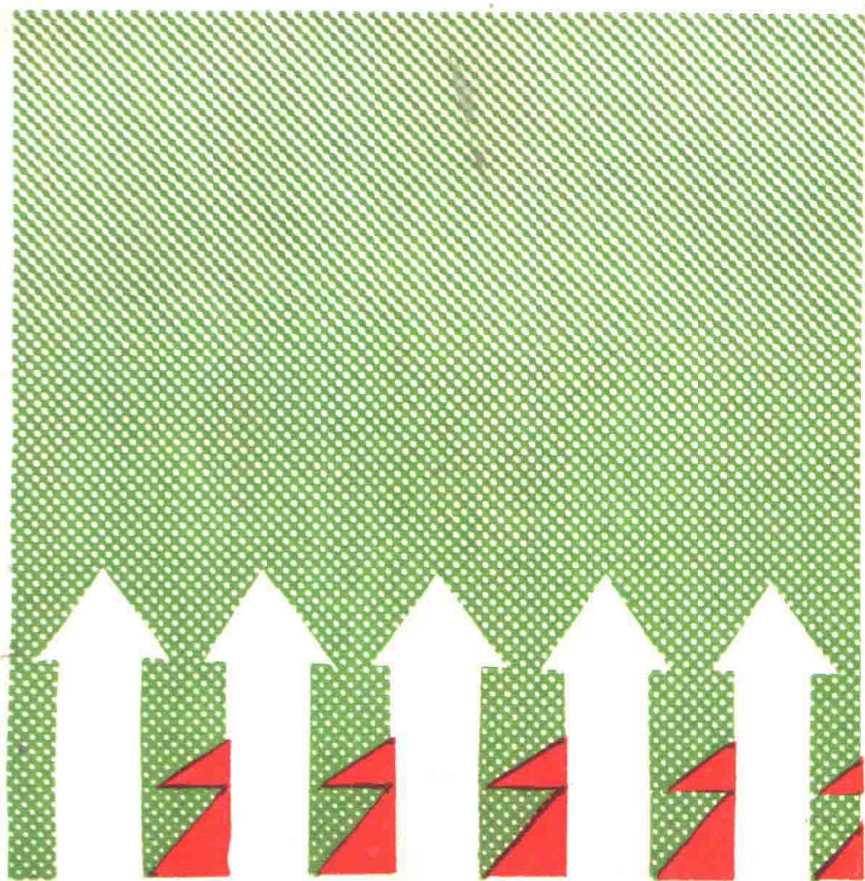


高等学校教学参考书



矢量投影

李春甫 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

矢 量 投 影

李春雨 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

矢量投影

李春南 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

开本 850×1168 1/32 印张5.5 字数130 000

1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷

印数 0001—1 822

ISBN 7-04-001099-2/TH·172

定价 1.40 元

前 言

矢量投影是用正投影和斜投影相结合的方法，将空间几何要素向一个单一投影面(水平面)上进行投影的一种投影方法。这种投影法既有正投影的准确和便于测量的优点，又有斜投影的富于立体感可以统观全貌的优点。这种投影方法在近代科学研究及工程应用中，都有较大的实用价值和广阔的发展前景，例如用矢量投影可解空间静力学问题以及解决四维空间基本几何体的画法；用矢量投影还可以绘制合金元素平衡图、建筑结构图、矿山工程图，还可解线性方程组及矢量分析的某些问题等。若用矢量投影解传统画法几何题时，能使作图简化，图形富于直观性且度量性好。总之，矢量投影在各种实用科学领域中可获得广泛的应用，这是一门应引起我国图学理论工作者关注的既古老又全新的投影理论。以前，在国内没有看到系统介绍矢量投影基本理论的著作，1959年我国出版的《画法几何方法及其应用》一书中，也只有片断的介绍，这给矢量投影在我国的推广应用带来一定困难。

本人经过多年研究，将俄国学者霍多罗夫提出的基本理论加以系统地阐述，写成了本书。此书包括用矢量投影法解决传统画法几何中的点、线、平面、立体、投影变换、截交、相贯等问题的内容，也收入了少量应用实例。

本书初稿曾在云南省图学会举办的制图进修班上进行试讲，并根据大家的意见又作了进一步的修改补充，经云南省图学会学术组组织有关同志进行过审阅，定稿时又得到昆明工学院方士刚老师进行最后审校。成书过程中，对给予本人支持和鼓励的各位同志，在此一并致谢。

限于本人水平，文中定有谬误，敬望读者不吝赐教。

编者

一九八六年六月

目 录

前言

第一章 点的投影	1
§ 1 矢量投影及其与传统画法几何的区别	1
§ 2 点的矢量投影的作法	3
§ 3 各种位置点的矢量投影	4
第二章 直线的投影	8
§ 1 直线在空间的各种位置	8
§ 2 各种位置直线的投影及其特性	9
§ 3 点和直线的相对位置	13
§ 4 直线的迹点	14
§ 5 两直线的相对位置及其投影特性	15
第三章 平面的投影	22
§ 1 平面的表示法	22
§ 2 平面在空间的各种位置及其投影	22
§ 3 平面内的点和直线	31
§ 4 平面上图形投影的画法	38
§ 5 直线与平面的相对位置	45
§ 6 二平面的相对位置	56
第四章 投影变换	71
§ 1 旋转法	71
§ 2 换面法	80
第五章 曲线曲面	90
§ 1 曲线投影的一般作法	90
§ 2 平面曲线的投影	91
§ 3 空间曲线投影的作法	94
§ 4 曲面的投影	96

第六章 立体的投影	103
§ 1 平面立体的投影	103
§ 2 曲面立体的投影	110
§ 3 立体表面取点	119
§ 4 结论	124
第七章 平面和立体相交	125
§ 1 垂直面和立体相交	125
§ 2 普通一般位置面与立体相交	133
§ 3 求作切口几何体的投影	140
第八章 相贯	142
§ 1 直线与立体相交	142
§ 2 二立体相贯	146
第九章 矢量投影的应用	155
§ 1 用矢量投影绘制矿山巷道系统立体图	155
§ 2 用矢量投影法绘制露天采矿场的立体图	158
§ 3 用矢量投影绘制地形面的立体图	160
§ 4 用矢量投影绘制建筑物立柱基础的投影	160
§ 5 用矢量投影绘制多元合金平衡图	163
§ 6 矢量投影在地质勘探方面的应用	165
§ 7 用矢量投影法绘制机械模型图	166

第一章 点的投影

§ 1 矢量投影及其与传统画法几何的区别

一、传统的投影分类法

众所周知，在传统的画法几何中，按照投影中心与投影面间相对距离的远近，投影法可分为中心投影和平行投影两大类。其中，中心投影法的投影面只有一个，而平行投影法的投影面则可有一个或多个。在常用工程图中，根据这个特点，平行投影法又衍生出多面正投影（图 1）、标高投影（图 2）、单面正轴测投影（图 3）、单面斜轴测投影（图 4）等；而中心投影法又衍生出透视投影（图 5）、球心投影（图 6）和球极投影（图 7）等。

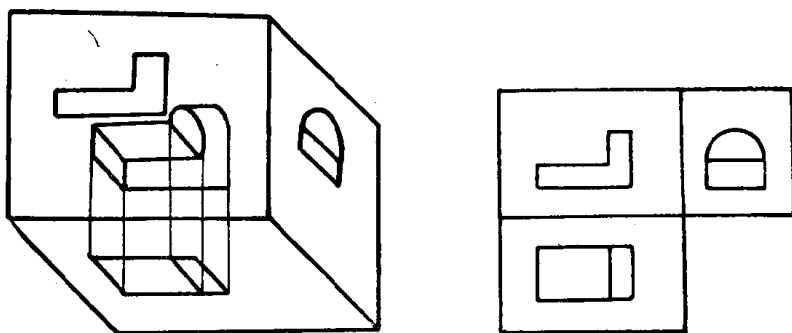


图 1

二、矢量投影

用正投影和斜投影相结合的方法，将空间几何要素向一个单一投影面（水平面）上进行投影的一种混合投影法。用这种投影法所得投影图形状与斜投影的方向有密切关系，而斜投影的方向又可根据需要任意选定，所以，对同一空间几何要素，当斜投影方

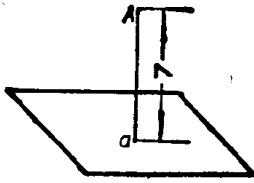


图 2

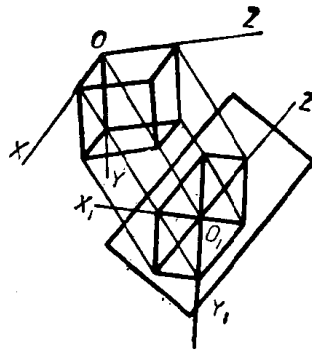
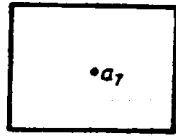


图 3

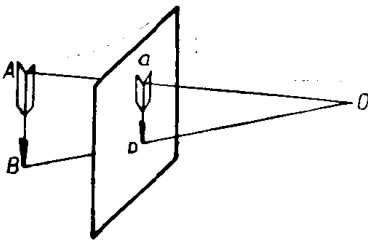


图 4

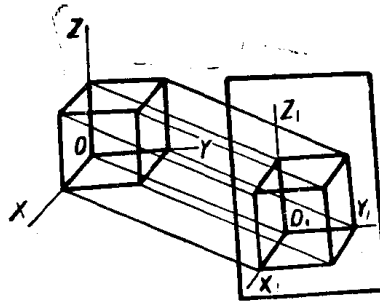


图 5

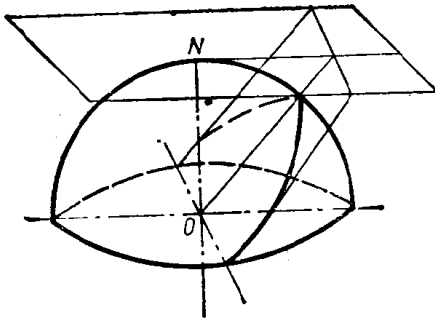


图 6

向不同时，可以得到不同的投影图(如图 8)。为了区别起见，常用一箭头指明斜投影的方向，并用相应的符号标明斜投影方向和投影图之间的联系，这就是矢量投影。

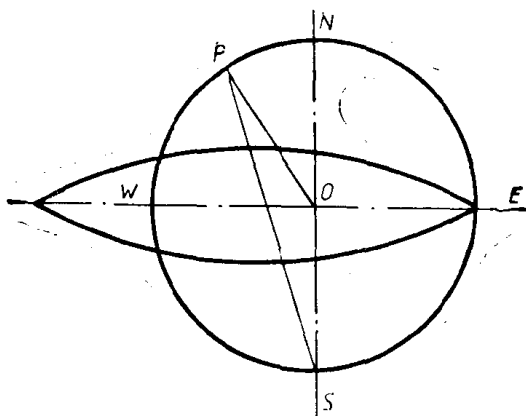


图 7

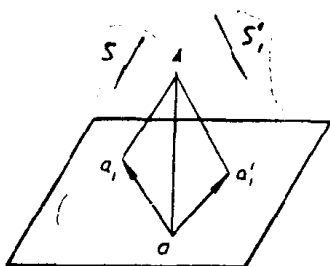


图 8

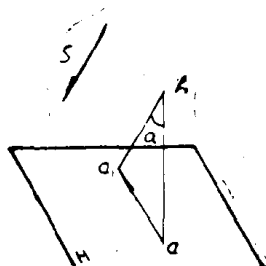


图 9

§ 2 点的矢量投影的作法

一、作法 如图 9 所示

1. 选取一个水平面 H 为投影面并任选一斜投影方向 S 。
2. 过空间点 A 向投影面 H 引垂直线与 H 面相交，得垂足 a 。
3. 过空间点 A 沿 S 方向引斜射线与 H 面交于 a_1 点。
4. 将 a 、 a_1 点用线连起来并在 $a a_1$ 方向上画上箭头，则矢量 $\vec{a a_1}$ 就是空间点 A 的矢量投影了。

二、符号与特点

1. a 点称为 A 点的始投影, 而 a_1 点则称为 A 点的终投影。

2. a, a_1 之间矢量的长短与空间点 A 到 H 面的距离以及 S 方向的倾斜角 α 有关, 即: $a a_1 = A a \operatorname{tg} \alpha$ 。

3. 由于 S 方向是任意的, 因此 a, a_1 的连线 (矢量) 方向也是任意的。这一特性造成矢量投影的多样化, 也正因为这种多样化给矢量投影的应用带来了新的活力, 同时也造成了作图时的某些不便。

4. 在解传统画法几何的有关问题时为使作图比较方便, 特约定 S 的方向取为与三面正投影体系中的侧面 (W 面) 平行, 且与 H 面夹角为 45° 的方向, 于是得: $a a_1 = A a$ 。

这个关系表示: 始投影与终投影之间矢量的长短 (或称始投影与终投影之间连线的长短) 等于空间点至投影面的距离。

§ 3 各种位置点的矢量投影

一、点在空间的各种位置的描述

由于投影面只有一个, 因此点在空间的位置只能由点与投影面间的相对位置来确定。据此, 点在空间的位置共有下列三种 (图 10):

1. 点在投影面上方 (如 A 点)。
2. 点在投影面下方 (如 B 点)。
3. 点在投影面内 (如 C 点)。

二、各种位置点的投影图

根据上述矢量投影的作图原理, 可以作出各种位置点的矢量投影图 (图 11)。

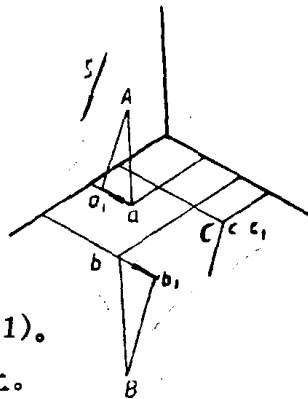


图 10

1. 投影面上方之点: 矢量方向朝上。
2. 投影面下方之点: 矢量方向朝下。
3. 投影面内之点: 空间点和它的始投影、终投影三者重合为一点。

三、矢量投影与坐标的关系

由于矢量投影中投影面只有一个，无法构成像笛卡尔直角坐标系那样的空间体系，当然也就无法建立起坐标原点来，这在作图时是极不方便的。为了作图方便起见，现仿照传统画法几何中的方法，建立一个空间直角坐标系。为此，取投影面为坐标原点所在平面，然后在投影面上任取一点为坐标原点，过原点作左右方向的直线为 X 坐标轴，过原点作前后方向的直线为 Y 坐标轴，过原点作铅垂方向的直线为 Z 坐标轴；这样，一个空间直角坐标系就建立起来了。在这个坐标系中，原点把每条坐标轴都分为两部分： X 轴从原点向左为正，向右为负； Y 轴从原点向前为正，向后为负； Z 轴从原点向上为正，向下为负。这样，矢量投影也可以用坐标法来表示点在空间的位置了。

例如，已知空间二点的坐标为 $A(27, 23, 5)$ ， $B(14, 9, 20)$ ，试作其矢量投影图。其作图方法如下(图 12)；

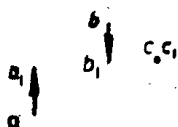


图 11

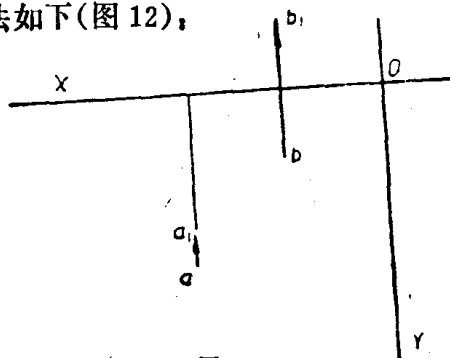


图 12

1. 画出 X 、 Y 坐标轴。
2. 按比例在坐标系内取 A 、 B 两点的 x 、 y 坐标值，并分别得到 a 和 b 二点，这两点就是空间 A 、 B 两点的始投影。
3. 过两点始投影分别向上作铅垂线，并在线上分别按比例取 A 、 B 两点的 z 坐标值就得到 a_1 、 b_1 两点，这就是空间 A 、 B 两点的终投影。用线连接 a 、 a_1 和 b 、 b_1 ，并用箭头表示其方向，则 A 、 B 两点完整的矢量投影就作出来了。

四、两点间相对位置的确定

空间点的位置既可以用绝对坐标（即空间点相对于原点的坐标）来确定，也可以用相对坐标（即甲点相对于乙点的坐标值谁大谁小）来确定。在传统的三投影面体系中，空间两点的相对位置是由两点的坐标差（即相对坐标值）来决定的，照此，矢量投影也可以用相对坐标值来描述和确定。如图 12 中的 A 、 B 二点，由于 A 点的 x 坐标值大于 B 点的 x 坐标值，且 A 点的 y 坐标值大于 B 点的 y 坐标值， B 点的 z 坐标值大于 A 点的 z 坐标值，因而可以确定， A 点在 B 点的左方、前方、下方，而 B 点对 A 点来说，它在 A 点的右方、后方、上方。

五、两重影点的投影

1. 由于投影面只有一个，因而矢量投影中的重影点只有一个，即只有对投影面 H 而言的重影点。

2. 就投影面 H 的重影现象分析，若两点产生重影，则此两空间点的 x 、 y 两坐标值必相等（ A 点的 x 坐标值等于 B 点的 x 坐标值， A 点的 y 坐标值等于 B 点的 y 坐标值），这两点在空间将处于一条铅垂线上。据此，利用坐标值求其投影图时， A 、 B 两点的始投影将重合为一点；反之，在投影图中若其始投影或终投影重合为一点，则这两点就称为重影点。

3. 凡是属于重影点的两空间点，其坐标值大的点为可见，坐标值小的点为不可见。

六、简化矢量投影的方法

矢量投影的投影图形与斜投影方向有明显的关系，所以矢量投影图中常用一矢量来注明斜投影的方向。此矢量既表示斜投影的倾斜方向，又表示从始投影至终投影的连线方向。这个方向在作实用工程图时，应用一个醒目的箭头在图幅内注出，以代替所有连线方向的矢量，以便减少应画箭头的数量，增加图形的清晰程度并提高作图的速度。但在解传统画法几何题时，由于已经约定

了斜投影方向只能与传统画法几何中三投影面体系的侧立投影面平行且与投影面 H 成 45° 角，因此始投影和终投影的连线必定在一条铅垂线上，这时，为了简化作图，增加图形清晰程度，可将箭头全部省去。矢量投影的方向由始投影至终投影之间的连线决定。或者说，始投影至终投影间连线的方向就代表了矢量投影的斜投影的方向。

七、点的矢量投影的规律

综上所述，点的矢量投影具有如下的特点：

1. 始投影与终投影的连线，在解传统画法几何题时，绝大多数是铅直方向的直线，只有因解题的特殊需要时，才选取有利于解题的任意方向为斜投影方向。

2. 始投影与终投影间连线的距离的大小，反映空间点到投影面的距离大小。

第二章 直线的投影

§ 1 直线在空间的各种位置

两点间可作一直线，所以求作直线的矢量投影的方法，仍然是求出直线上任意两点的投影，然后分别将其同名投影连线即为直线的投影。

直线在空间的位置有一般位置、平行位置和垂直位置。

一、一般位置线

倾斜于投影面的直线，统称为一般位置线。根据其倾斜情况的不同，又可分为普通一般线和特殊一般线。

1. 普通一般线 与投影面处于任意倾斜位置的直线，称普通一般线。若用坐标概念描述，则这种直线上的任意两点的三个坐标值均不相等。

2. 特殊一般线 与投影面倾斜，但与斜投影方向 S 平行的直线。若用坐标概念描述，则这种直线上任意两点的 x 坐标值相等且同一端点的 z 坐标值与 y 坐标值又相等。例如： $A(30, 20, 20)$ 和 $B(30, 50, 50)$ ，此两点所连成的直线即为一条特殊一般线。

二、平行位置线

平行于投影面的直线，称为平行位置线。若用坐标概念表示，则这种直线上任意两点的 z 坐标值相等，而 x 、 y 坐标值不等。

三、垂直位置线

垂直于投影面的直线，称为垂直位置线。若用坐标概念表示，则这种直线上的任意两点的 x 、 y 两坐标值均相等，只有 z 坐标值不等。

§ 2 各种位置直线的投影及其特性

一、一般位置线

1. 普通一般线:

(1) 投影图 由于直线两端点的三个坐标值不等, 如 $A(45, 27, 17)$, $B(10, 20, 15)$, 则如前所述, 分别作出其两端点的投影, 最后用直线将两端点的同名投影连接起来, 即得其投影图(图 13)。

(2) 特点 由于直线的两端点的 z 坐标值不相等, 因此两端点的始投影至终投影间的连线不等长, 这是普通一般线的投影图的主要特点。其次, 由于两端点的 x, y 坐标值不相等, 所以, 直线的始投影和终投影均处于倾斜状态, 这是普通一般线的第二个特点。图 14 中给出的就是几种普通一般线的投影图。

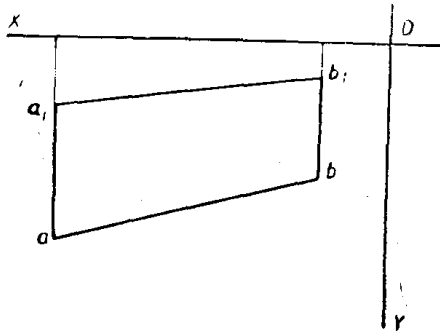


图 13

y 坐标值相等, 但 x, z 两坐标值不相等的直线, 也是普通一般直线, 这时, 直线的始投影为一条左右方向的水平直线, 终投影为一条任意倾斜的直线(图 15), 其始投影和终投影均不反映实长。

2. 特殊一般线:

(1) 投影图 直线两端点的 x 坐标值相等, z 坐标值又等于其 y 坐标值(图 16), 例如点 $A(30, 20, 20)$ 和点 $B(30, 50, 50)$, 按照点投影的作图方法作出的投影图如图 17 所示。

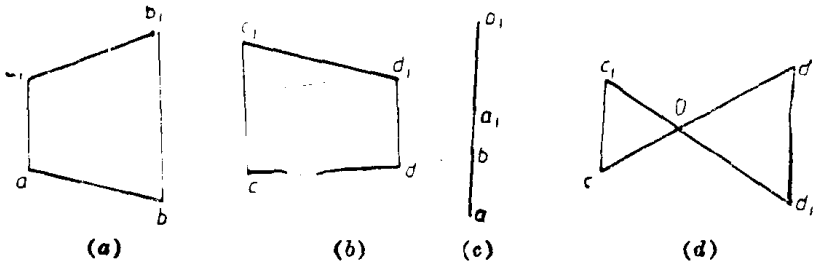


图 14

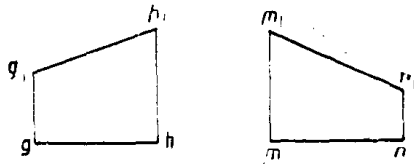


图 15

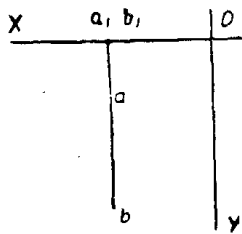


图 17

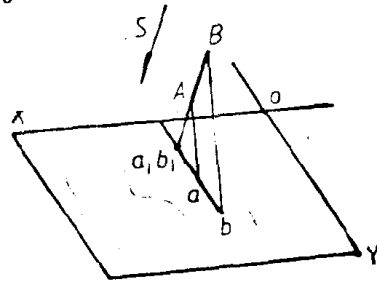


图 16

(2) 特点 始投影为一铅直方向的直线，但不反映实长，而终投影则重合为一个点(重影点)因而具有重影性。

二、平行位置线

1. 投影图 由于在平行于投影面的直线上任意两点至投影面的距离(z 坐标值)均相等,如点 $A(30, 20, 30)$ 、点 $B(10, 15, 30)$, 因而根据作图方法作出的投影图,其端点间的连线必等长(图13)。或者说,由于其 z 坐标值相等,因而其投影图必成为一个平行四边形,其原理如图 19 所示。

特别值得注意的是: 平行于投影面的直线中有两种直线比较

特殊,一种是左右方向的平行线(由于直线为左右方向,因而其始投影亦为左右方向的一条水平线。同时又因直线两端点至投影面的距离相等,故其终投影亦为左右方向的一条水平线,如图 18 b 所示)另一种则是前后方向的平行线(由于直线为前后方向,因而其始投影是一条铅直方向的直线。同时又因直线两端点至投影面的距离相等,故其终投影也是一条铅直方向的直线,且第一个端点的始投影至终投影的连线长度等于第二个端点的始投影至终投影的连线长度,且直线始投影和终投影本身的长度还反映空间直线的实长(图 18 c)。

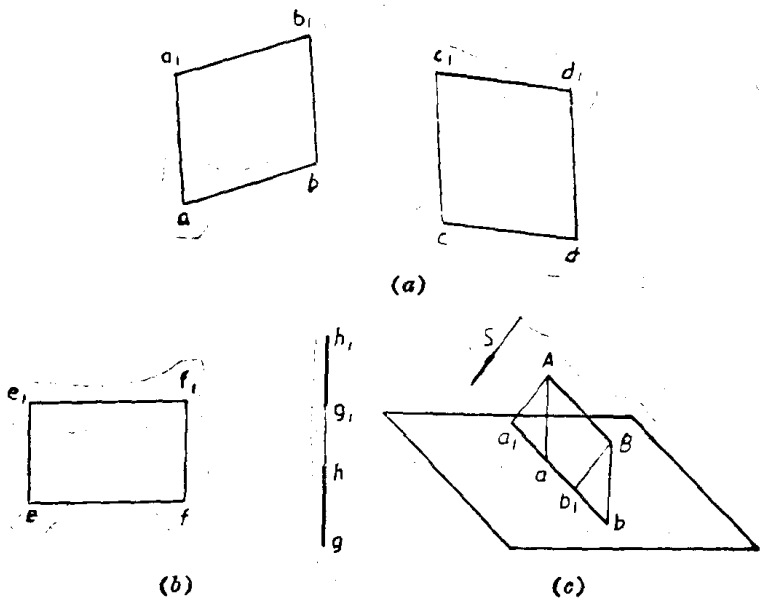


图 18

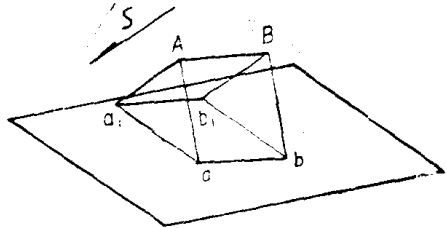


图 19