与人教版·全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·同步配套

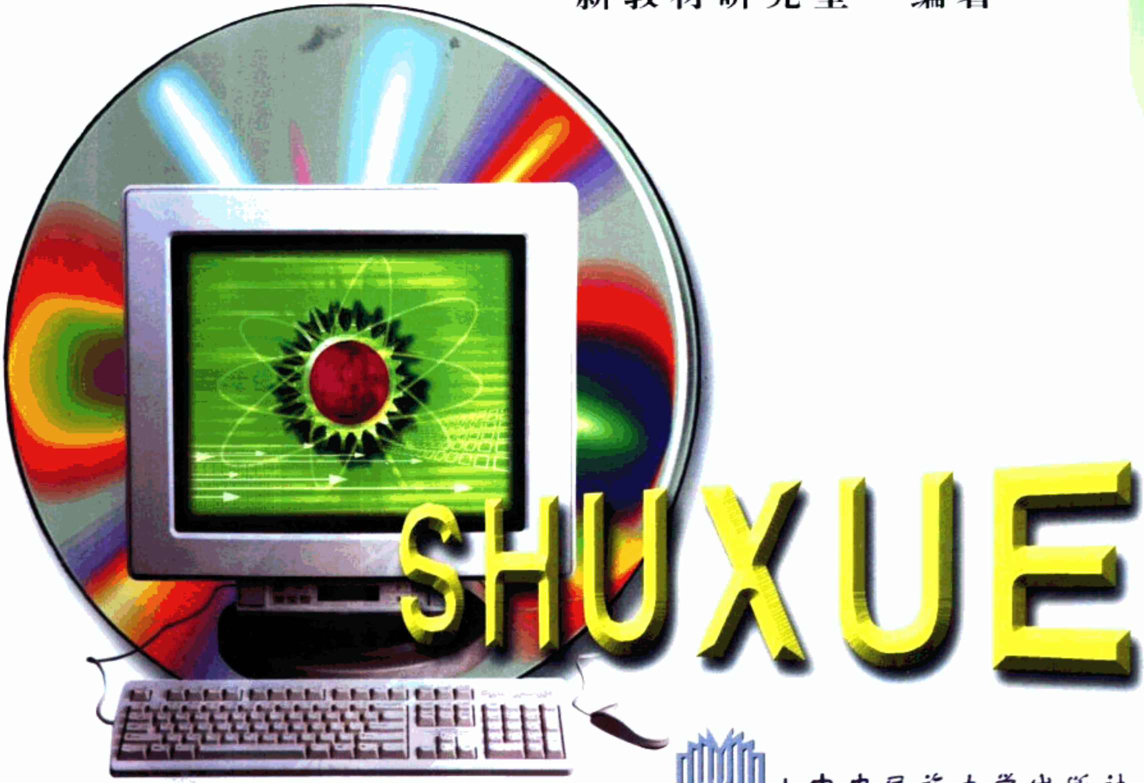
新教材导学

（高中三年级用）

数学

总复习

新教材研究室 编著



中央民族大学出版社

开卷有益
创新求实

费孝通
二〇〇一年六月

前　言

《新教材导学》丛书是配套2000年秋季开始正式使用的人教版最新初、高中教材而编写的辅导与练习丛书。本丛书较好地体现了最新大纲的精神，而且与最新教材的内容和进度同步，既重视了基础知识和基本技能的落实，又照顾到了优等生拓宽拔高的特殊需要。整套丛书的编写强调了科学性与实用性的统一，旨在帮助学生掌握系统的基础知识，训练有效的学习方法，培养思维能力、应用能力和创新能力，全面提高学生的综合素质。

本书《数学·新教材导学》(高三年级·复习分册)主要是高中基础知识专题复习与跟踪训练。分三个栏目：

【复习目标】 据大纲与考纲的要求，指出本专题复习的重点与难点，要达到的复习目标。

【范例选讲】 结合高考最新动向，精选各类题型，阐述本专题处理问题的基本方法，帮助学生落实、掌握基础知识、基本技能、提高综合分析问题的能力。

【跟踪训练】 配备较典型的综合练习题，供学生课后练习，以利于对重点的方法与技巧加以巩固。

书后集中附有训练题和检测题的参考答案及解题思路点拨，便于练习后及时反馈；也可将答案预先统一撕掉，以供老师们在课堂上统一讲用。

参加本书编写工作的人员全部是教学成绩优秀的教师，他们把教学中的丰富经验融入了本书编写工作中，更增加了本书的实用性和科学性。

我们真诚地希望本丛书能成为学生的良师益友，同时也恳请广大师生批评指正。

编　者

2002年7月

目　　录

一

函数的概念、性质及其应用

【复习目标】

深化对函数概念的理解，确立函数概念在处理有关变量问题中的指导地位．深刻理解函数奇偶性、单调性的定义，掌握函数奇偶性与单调性的判定方法，灵活应用函数的图像性质分析解决问题．进一步理解和用好函数思想以及数形结合的方法．

熟悉常见函数（一次函数，二次函数，反比例函数，指数函数，对数函数）的图像与性质，能应用函数的性质描绘函数图像，利用函数图像揭示函数性质．

【范例选讲】

[例 1] 已知函数 $y=f(x)$，$x\in F$，那么集合 $\{(x,y)|y=f(x),x\in F\}\cap\{(x,y)|x=1\}$ 中所含元素的个数是（　　）

A. 0　B. 1　C. 0 或 1　D 1 或 2

分析：

这是一道以集合语言表述的问题．从函数观点看，上述交集中元素的个数，就是函数 $y=f(x)(x\in F)$ 的图像与直线 $x=1$ 的交点的个数．若 $1\in F$ 则交点个数为 1，若 $1\notin F$，则交点个数为 0．故应选 C..

注意：

对集合语言的认识和函数概念的理解是处理好本题的两个关键．

[例 2] 已知函数 $f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)\left(-\frac{1}{2}<x<0\right)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$，求 $f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)$ 的值．

分析：

$f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)$ 的值即反函数 $f^{-1}(x)$ 在 $x=\lg\frac{4}{5}$ 时的函数值，因而可先求 $f^{-1}(x)$，再求 $f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)$ 的值．但注意到原函数与其反函数的对应关系互逆，可使问题转化为求满足 $f(x_0)=\lg\frac{4}{5}$ 的 x_0 的值．

解答：

设 $f(x_0)=\lg\frac{4}{5}$ 则 $f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)=x_0$，

由题设 $\lg(1+x_0)+\lg(1-x_0)=\lg\frac{4}{5}$

得 $\begin{cases}1+x_0>0\\1-x_0>0\\1-x_0^2=\frac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x_0<1\\x_0^2=\frac{1}{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　又 $-\frac{1}{2}<x_0<0$

故 $x_0=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

即 $f^{-1}\left(\lg\frac{4}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

[例 3] [1998 年全国（理）（文）] 向高为 H 的水瓶中注水，注满为止．如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图像如图 1—1 所示，那么水瓶的形状是（　　）

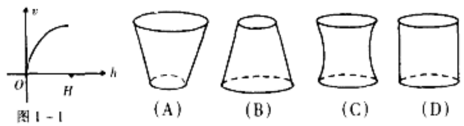


图 1-1

分析：

本题用图像给出了两个变量 V 与 h 之间的相互联系，相互制约的关系，要求推断出水瓶的形状．从定性的角度看，图像给出的 V 与 h 的变化规律是随着 h 的增长，V 的增长先快后慢，故水瓶形状应下底大上底小．从定量的角度看，有 $V\left(\frac{h}{2}\right)>\frac{V}{2}$ 故应选(B)．

注意：

函数的图像不仅可以反映函数的单调性与奇偶性．还可以反映函数随自变量增长的速度或减

小的速度.

[例 4][2000 年全国高考题]某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从二月一日起的300天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1—2 的一条折线表示,西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1—3 的抛物线表示.

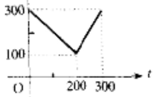


图 1-2

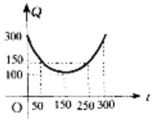


图 1-3

(1)写出图 1—2 表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$;写出图 1—3 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?(注:市场售价和种植成本的单位:元/10^2kg,时间单位是天)

分析:

本题是函数应用题.但基本上给出了数学模型.故考查的重点仍是函数的概念、图像.分段函数解析式的确定及函数最大值的确定方法.(1)中确定函数的解析式可用待定系数法.也可联系解析几何,用点斜式方程求 $f(x)$.

解答:

(1)由图 1-2 可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t & (0\leqslant t\leqslant 200)\\ 2t-300 & (200\leqslant t\leqslant 300)\end{cases}$$

由图 1—3 有 $Q(t)=a(t-150)^2+100$,再根据 $t=50$ 时 $Q=150$ 得 $a=\frac{1}{200}$于是 $g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100\ (0\leqslant t\leqslant 300)$

(2)纯收益关于时间 t 的函数

$h(t)=f(t)-g(t)=$

$$\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, & 0\leqslant t\leqslant 200\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2}, & 200<t\leqslant 300\end{cases}$$

$h(t)$的最大值就是两个二次函数相应定义域内的最大值中的较大者.当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时,$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$,$\therefore$当 $t=50$ 时,$h(t)$的最大值为 100,当 $200<t\leqslant 300$ 时,$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$,$\therefore$当 $t=300$ 时,$h(t)$的最大值为 87.5.

综上,当 $t=50$ 时,即从 2 月 1 日起的第 50 天上市的西红柿收益最大.

注意:

深入对函数概念的理解.是解决好有关函数问题的前提和关键.

[例 5]判断函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$的单调性,并说出理由.

分析 1:

这是一个常规题,要求落实基本方法与技能.

解法 1:

设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$,

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}\\&=\frac{x_1(1+x_2^2)-x_2(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\\&=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\end{aligned}$$

($f(x_1)-f(x_2)$的符号不确定,说明 $f(x)$在 R 上没有一致单调性.)若 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,则 $x_1x_2<1$,$f(x_1)<f(x_2)$ $\therefore f(x)$在$[-1,1]$是增函数.若 $1<x_1<x_2$ 或 $x_1<x_2<-1$,则有 $x_1x_2>1$,$f(x_1)>f(x_2)$,$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$是减函数.

分析 2:

若借助导数与微分,问题的解决会更明朗、简捷.

解法 2:

$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,当 $-1<x<1$ 时,$y'>0$;当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时,$y'<0$ 且当 $x=\pm1$ 时,$y'=0$,注意到 $f(x)$在 R 上是连续函数.故 $f(x)$在$[-1,1]$上为增函数,在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上为减函数.

分析 3:

若注意到函数 $f(x)$为奇函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,$x<0$ 时,$f(x)<0$.又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=$

0，结合 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图像特征及复合函数的单调性结论也可得出上述结果.

[例 6] 函数 $f(x)=\frac{x-1}{ax-1}$ 中，a 为给定的实数，$a\neq 0$，$a\neq 1$，$x\in(-\infty,\frac{1}{a})\cup(\frac{1}{a},+\infty)$ 证明：函数 $f(x)$ 图像上任意两点的连线不与 x 轴平行.

分析 1：

若函数是单调函数，则必有上述性质. 反之，有上述性质的函数未必单调. 如 $y=\frac{1}{x}$，而 $f(x)=\frac{x-1}{ax-1}$ 的图像与 $y=\frac{1}{x}$ 的图像有密切联系，这就启发我们从函数的图像与性质两方面入手考虑.

解法 1：

变形 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{a}(\frac{1}{a}-1)}{x-\frac{1}{a}}+\frac{1}{a}$，当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}(\frac{1}{a}-1)<0$，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上，$f(x)=\frac{x-1}{ax-1}$ 是增函数，且 $y<\frac{1}{a}$. 即 $f(x)$ 的图像在 $y=\frac{1}{a}$ 的下方. 而在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 上，函数 $f(x)=\frac{x-1}{ax-1}$ 也是增函数，且 $y>\frac{1}{a}$. 即图像在 $y=\frac{1}{a}$ 的上方. 所以函数图像上不存在连线与坐标轴平行的两点. 当 $0<a<1$ 或 $a<0$ 时，$\frac{1}{a}(\frac{1}{a}-1)>0$，函数 $f(x)=\frac{x-1}{ax-1}$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上是减函数，且 $y>\frac{1}{a}$；在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 上，也是减函数，且 $y<\frac{1}{a}$，故图像上也不存在连线与坐标轴平行的两点. 另一方面，函数 $f(x)$ 的图像是由 $y=\dfrac{\frac{1}{a}(\frac{1}{a}-1)}{x}$ 的图像经水平、竖直分别平移 $\frac{1}{a}$ 个单位得到的，作出函数图像的示意图更会使问题一目了然.

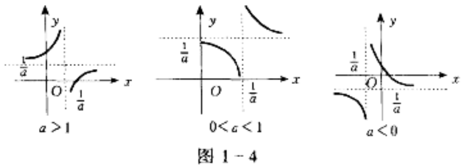


图 1－4

分析 2：

若函数图像上存在连线与 x 轴平行的两点，则这两点的纵坐标是相同的.

解法 2：

假设函数图像上存在连线与 x 轴平行的两点，那么存在常数 c，使关于 x 的方程 $\frac{x-1}{ax-1}=c$ 有二不等实根. 即 $(ca-1)x=c-1$ 有二不等实根. 矛盾！

注意：

研究函数的问题，要抓住函数的性质与函数的图像特征. 寻找切入点.

[例 7] 设 $f(x)=\log_9(x+8-\frac{a}{x})$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，求 a 的取值范围.

分析：

$f(x)$ 是由 $y=\log_9 u$ 与 $u=x+8-\frac{a}{x}$ 构成的复合函数，其单调性可按复合函数的单调性规律入手研究. 本题是一逆向问题，实质是在找 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数的充要条件.

解答：

$f(x)=\log_9(x+8-\frac{a}{x})$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数 $\Leftrightarrow u=x+8-\frac{a}{x}>0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，且 $u=x+8-\frac{a}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 为增函数.

$x\geqslant 1$ 时，$u=x+8-\frac{a}{x}>0$ 恒成立，即 $x^2+8x-a>0$ 恒成立. 得 $a<x^2+8x$ $\therefore a<9$；设 $1\leqslant x_1<x_2$ 由 $x_1+8-\frac{a}{x_1}<x_2+8-\frac{a}{x_2}$ 变形得 $(x_1-x_2)(1+\frac{a}{x_1x_2})<0$ 又 $x_1-x_2<0$ $\therefore 1+\frac{a}{x_1x_2}>0$ 即 $a>-x_1x_2$ 恒成立，故 $a\geqslant -1$.

综上 $-1\leqslant a<9$.

[例 8] 已知 $f(x)=x^2+c$ 且 $f[f(x)]=f(x^2+1)$.

(1) 设 $g(x)=f[f(x)]$，求 $g(x)$ 的解析式.

(2) 设 $\varphi(x)=g(x)-\lambda f(x)$，试问是否存在实数 λ，使 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数，且在 $(-1,0)$ 上是增函数.

分析 1：

(1) 是基本问题. (2) 是探索性问题. 可分解为①$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 是减函数，求 λ 的取值集合 A，②$\varphi(x)$ 在 $(-1,0)$ 是增函数，求 λ 的取值集

合 B.若 $A\cap B=\psi$,说明满足①②的 λ 不存在.否则可求出 λ.

解法 1:

(1)易得 $g(x)=x^4+2x^2+2 \quad f(x)=x^2+1$

(2)由(1)$\varphi(x)=g(x)-\lambda f(x)=x^4+(2-\lambda)x^2+(2-\lambda)$

设 $\varphi(x)$在$(-\infty,-1)$是减函数,则任取 $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$,由 $x_1<x_2$,得$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=(x_1^2-x_2^2)[x_1^2+x_2^2+(2-\lambda)]>0$又$x_1^2>x_2^2$, $\therefore x_1^2+x_2^2+2-\lambda>0$,即$\lambda<x_1^2+x_2^2+2$得 $\lambda\leqslant4$,类似的,由 $\varphi(x)$在$(-1,0)$是增函数,可得 $\lambda\geqslant4$,故 $\lambda=4$,满足条件.

分析 2:

注意到(2)中 $\varphi(x)$是多项式函数,从而是可导函数,问题的解决要简单得多.

解法 2:

$\varphi(x)$可导,且 $\varphi'(x)=4x^3+2(2-\lambda)x$

$\because\varphi(x)$在$(-\infty,-1)$是减函数,在$(-1,0)$是增函数,$\therefore$必有 $\varphi'(1)=0$,得 $\lambda=4$.

注意:

导数与微分为研究函数性质提供了有力的工具.

[例 9]已知函数 $F(x)=x^3\cdot f(x)(x\in R)$在区间$(-\infty,0]$上是减函数,又 $f(x)$是奇函数,那么对于任意实数 a,下列不等关系中成立的是 ( )

A. $F(a^2-a+1)\geqslant F(-\frac{3}{4})$

B. $F(a^2-a+1)<F(-\frac{3}{4})$

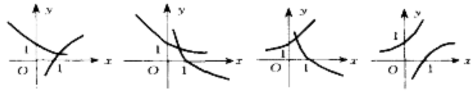
C. $F(a^2+a+1)\leqslant F(-\frac{3}{4})$

D. $F(a^2+a+1)>F(-\frac{3}{4})$

分析:

比较两个函数值的大小,通常要借助单调性,故首先应据条件讨论 $F(x)$的单调性.由条件易得 $F(x)$为偶函数.再由 $F(x)$在区间$(-\infty,0]$上是减函数,可得$F(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数.比较同一个函数的两个函数值的大小,还必须有相应的两个自变量的取值应在同一个单调区间内为前提.这里 $a^2\pm a+1>0$,$-\frac{3}{4}<0$,又 $F(x)$为偶函数,得 $F(-\frac{3}{4})=F(\frac{3}{4})$,再由$(a^2\pm a+1)-\frac{3}{4}=(a\pm\frac{1}{2})^2\geqslant0$ 得 $a^2\pm a+1\geqslant\frac{3}{4}>0$ 从而 $F(a^2-a+1)\geqslant F(\frac{3}{4})=F(-\frac{3}{4})$故选 A.

[例 10]指数函数 $f(x)=(2-a)^x$ 和对数函数$g(x)=\log_{\frac{1}{a-1}}x$ 的图像只可能是 ( )



A. B. C. D.

图 1-5

分析:

$f(x)$是指数函数,有 $2-a>0$ 且 $2-a\neq1$ 得,$a<2$ 且$a\neq1$,又 $g(x)$是对数函数,有$\frac{1}{a-1}>1$,且$\frac{1}{a-1}\neq1$ 由此得到$1<a<2$ 在条件$1<a<2$ 时有 $0<2-a<1$,$\frac{1}{a-1}>1$,故选 A.

[例 11]定义在实数集上的奇函数 $f(x)$满足 $f(3+x)=f(3-x)$,若 $x\in(0,3)$的解析式为 $y=2^x$,则 $f(x)$在$(-6,-3)$的解析式为 ( )

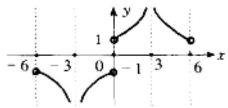


图 1-6

A. $y=2^{x+6}$ B. $y=-2^{x+6}$

C. $y=2^x$ D. $y=-2^x$

分析:

若能据函数的性质作出函数图像的示意图,则问题的结论是显然的,应选 B.

[例 12]设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$ 其中 $a>0$,解不等式$f(x)\leqslant1$(2000 年高考题,第 22 题,第(1)问)

分析:

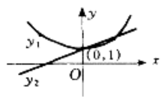


图 1-7

$f(x)\leqslant1$ 即 $\sqrt{x^2+1}\leqslant1+ax$,在同一坐标系作出 $y_1=\sqrt{x^2+1}$与 $y_2=1+ax$ 的图像,前者为实、虚半轴长均为 1 的等轴双曲线上支,后者为过$(0,1)$的斜率为正数 a 的直线.如图1—7,于是 $f(x)\leqslant1$ 等价于 $y_2\geqslant y_1$ $\therefore$当 $a>1$ 时,$x\geqslant0$ 满足 $y_2\geqslant y_1$;当 $0<a<1$ 时,交点$(0,1)$

及$(\frac{2a}{1-a^2},\frac{1+a^2}{1-a^2})$之间的部分满足 $y_2 \geqslant y_1$,从而 $0 \leqslant x \leqslant \frac{2a}{1-a^2}$.

注意:

正确认识和画出函数的图像是数形结合的基础.借助函数的图像解决有关方程与不等式的问题是数形结合思想的一个重要应用.

【跟踪训练】

1. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{8-2^x}}{\log_a(3x+1)}(a>0$ 且 $a\neq 1)$的定义域是 ( )

   A. $\{x|-\frac{1}{3}<x<3\}$

   B. $\{x|-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $0<x<3\}$

   C. $\{x|-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $0<x\leqslant 3\}$

   D. 与 a 的取值有关

2. [2000 年春季上海考题]若 $0<a<1,b<-1$,则函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像不经过 ( )

   A. 第一象限 B. 第二象限

   C. 第三象限 D. 第四象限

3. [2000 年春季北京、安徽考题]函数 $y=\lg|x|$ ( )

   A. 是偶函数,在区间$(-\infty,0)$上单调递增

   B. 是偶函数,在区间$(-\infty,0)$上单调递减

   C. 是奇函数,在区间$(0,+\infty)$上单调递增

   D. 是奇函数,在区间$(0,+\infty)$上单调递减

4. 定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$上是增函数,若 $f(1)<f(\lg x)$,那么 x 的取值范围是 ( )

   A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

   B. $(0,\frac{1}{10})\cup(10,+\infty)$

   C. $(\frac{1}{10},10)$

   D. $(10,+\infty)$

5. 函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+a}$在区间$[-1,+\infty)$上是增函数,那么 a 的取值范围是 ( )

   A. $a>1$ B. $a>2$

   C. $1<a<2$ D. 任意实数.

6. [1995 上海考题]1992 年底世界人口达到 54.8 亿,若人口的年平均增长率为 $x\%$,2000 年底世界人口数为 y(亿),那么 y 与 x 的函数关系式是________________.

7. [1998 年上海考题]函数 $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+2$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=$________________.

8. [1998 上海考题]函数 $y=\begin{cases}2x+3 & x\leqslant 0\\ x+3 & 0<x\leqslant 1\\ -x+5 & x>1\end{cases}$的最大值是__________.

9. $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期为 4 的奇函数,若 $f(1)=1998$,则 $f(1999)=$____.

10. 函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$在区间$(-2,+\infty)$上是增函数,则 a 的取值范围是_____.

11. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+b}{2x-b}(b<0)$

    (1)求 $f(x)$的定义域.

    (2)判断 $f(x)$的奇偶性,并说明理由.

    (3)指出 $f(x)$在区间$(-b,+\infty)$上的增减性,并说明理由.

12. 已知 $xy<0$,求由 $4x^2-9y^2=36$ 确定的函数 $y=f(x)$的解析式、定义域和值域.

13. 已知 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的增函数，记 $F(x)=f(x)-f(a-x)$　$(a\in R)$如果 $F(x_1)+F(x_2)>0$，

求证：$x_1+x_2>a$.

14. 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且 $f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数，$f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$，求实数 a 的取值范围.

二

函数综合问题

【复习目标】

函数与方程、不等式、数列、解析几何、三角等相互联系，相互渗透，构成了函数应用的广泛性，解法的多样性和思维的创造性，通过本专题的复习，要进一步学会综合应用函数知识，运用函数的思想方法分析和解决问题.

【范例选讲】

1. 函数与数列

[例 1][1999 年全国理科考题]已知函数 $y=f(x)$ 的图像是自原点出发的一条折线，当 $n\leqslant y\leqslant n+1,(n=0,1,2,\cdots)$ 时，该图像是斜率为 b^n 的线段(其中正常数 $b\neq1$)，设数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n)=n\quad(n=1,2,\cdots)$ 定义.

(1)求 x_1,x_2 和 x_n 的表达式.

(2)求 $f(x)$ 的表达式，并写出其定义域.

(3)证明：$y=f(x)$ 的图像没有横坐标大于 1 的交点.

分析：

令 $n=0,1,2,\cdots$ 可得 y 的取值范围. 对 $b>1$ 和 $0<b<1$ 分别作出 $y=f(x)$ 的图像的示意图，可使问题更直观.

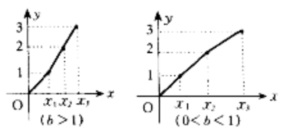


图 2－1

解答：

(1)由题意有 $f(0)=0\because f(x_1)=1$ 且当 $0\leqslant y\leqslant1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像是斜率为 $b^0=1$ 的线段.

$\therefore \dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=1$，即 $f(x_1)=x_1$ 从而得 $x_1=1$. 又 $f(x_2)=2$ 且当 $1\leqslant y\leqslant2$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像是斜率为 b 的线段. 所以 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=b$ 即 $x_2-x_1=\dfrac{1}{b}$，从而 $x_2=1+\dfrac{1}{b}$，$\therefore y=f(x)$ 的图像中第 n 条线段(即当 $n-1\leqslant y\leqslant n$ 时)所对应的线段的斜率为 b^{n-1}，其中 $f(x_n)=n\quad f(x_{n-1})=n-1$，

$\therefore x_n-x_{n-1}=(\dfrac{1}{b})^{n-1}\quad(n\in N)$ 故 $\{x_n-x_{n-1}\}$ 是以 1 为首项，$\dfrac{1}{b}$ 为公比的等比数列.

从而 $x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1=1+\dfrac{1}{b}+\cdots+(\dfrac{1}{b})^{n-1}$

$=\dfrac{b-(\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1}$.

(2)由(1)，当 $0\leqslant y\leqslant1$ 时，$y=x$，即 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=x$，当 $n\leqslant y\leqslant n+1$ 时，有 $x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$，即当 $x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$ 时，$f(x)=b^n(x-x_n)+n\quad(n\in N)$

当 $b>1$ 时，$\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{b}{b-1}$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $[0,\dfrac{b}{b-1})$

当 $0<b<1$ 时，$\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$

(3)结合图像可知只需证当 $x>1$ 时，$f(x)-x\neq0$ 恒成立. 当 $b>1$ 时，对任意 $x\in(1,\dfrac{b}{b-1})$ 必有 x_n 使 $x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$ 于是 $f(x)-f(x_n)=b^n(x-x_n)>(x-x_n)\quad(n\geqslant1)$

又 $f(x_n)=n>1+\dfrac{1}{b}+\cdots+(\dfrac{1}{b})^{n-1}=x_n$，

$\therefore f(x_n)-x_n>0$，从而 $f(x)-x>f(x_n)-x_n>0$ 成立.

当 $0<b<1$ 时，对任意 $x\in(1,+\infty)$，仿上推理，可证得 $f(x)-x<0$ 恒成立.

综上，$y=f(x)$ 的图像没有横坐标大于 1 的交点.

[例 2][2000 年春季北京、安徽理科考题]已知函数

$$f(x)=\begin{cases}-2(x-\frac{1}{2})^2+1 & x\in[0,\frac{1}{2})\\ -2x+2 & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

(1)在图 2－2 所示的坐标系中画出 $y=f(x)$ 的图像;

(2)设 $y=f(x)(x\in[\frac{1}{2},1])$的反函数为 $y=g(x)$, $a_1=1$, $a_2=g(a_1)$, $\cdots$, $a_n=g(a_{n-1})$求数列$\{a_n\}$的通项公式,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3)若 $x_0\in[0,\frac{1}{2})$, $x_1=f(x_0)$, $f(x_1)=x_0$, 求 x_0

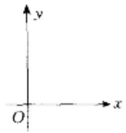


图 2－2

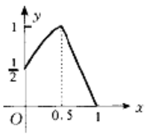


图 2－3

解答:

(1)作出函数 $f(x)$的图像,如图 2－3 所示.

(2)易得 $f(x)=-2x+2,x\in[\frac{1}{2}\ 1]$的反函数为

$g(x)=1-\frac{x}{2},x\in[0\ ,1]$.

$\because a_1=1,\ a_n=g(a_{n-1})$

$\therefore a_2=1-\frac{1}{2}a_1=1-\frac{1}{2},\ a_3=1-\frac{1}{2}a_2=1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$;

$a_4=1-\frac{1}{2}a_3=1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^3,\cdots$

推测 $a_n=(-\frac{1}{2})^0+(-\frac{1}{2})^1+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}$

$=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$.

应用数学归纳法证明(略), $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

(3) $\because x_0\in[0,\frac{1}{2})$且 $x_1=f(x_0)$,

$\therefore x_1=-2(x_0-\frac{1}{2})^2+1$ 且$\frac{1}{2}\leqslant x_1<1$,

$\therefore f(x_1)=-2x_1+2=-2[-2(x_0-\frac{1}{2})^2+1]+2=4(x_0-\frac{1}{2})^2$

令 $4(x_0-\frac{1}{2})^2=x_0$

注意到 $x_0\in[0,\frac{1}{2})$ 解得 $x_0=\frac{1}{4}$

注意:

以上两例是以函数为背景,借助几何直观与数列知识研究函数问题.

[例 3]已知等差数列$\{a_n\}$的第 10 项为 1,前 10 项和为 15. 记 $A_n=a_2+a_4+a_8+\cdots+a_{2^n}(n\in N^*)$,试问数列$\{A_n\}$中有无最大项,若有,指出是其中第几项,是多少;若没有,说明理由.

分析:

由已知,运用方程思想不难确定等差数列$\{a_n\}$的通项公式,并且得到 $A_n=\frac{1}{9}(19n+2-2^{n+1})$,对于数列$\{A_n\}$中有没有最大项的问题呢?可从研究 A_n 随 n 变化的规律入手.

解答:

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d、则

$$\begin{cases}a_1+9d=1\\ \frac{a_1+1}{2}\cdot 10=15\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a_1=2\\ d=-\frac{1}{9}\end{cases}$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times(-\frac{1}{9})=-\frac{1}{9}n+\frac{19}{9}$,

$A_n=-\frac{1}{9}(2+4+8+\cdots+2^n)+\frac{19}{9}n=\frac{1}{9}(19n+2-2^{n+1})$当 $n\geqslant2$ 时, $A_n-A_{n-1}=\frac{1}{9}(19n+2-2^{n+1})-\frac{1}{9}[19(n-1)+2-2^n]=\frac{1}{9}(19-2^n)$

$\therefore$当 $n=2,3,4$ 时, $19-2^n>0$,有 $A_n>A_{n-1}$

当 $n=5,6,7\cdots$时, $19-2^n<0$,有 $A_n<A_{n-1}$

故数列$\{A_n\}$存在最大项,为第 4 项,是$\frac{1}{9}(19\times4+2-2^5)=\frac{46}{9}$

注意:

本例是以数列为背景,借用函数思想研究有关数列的问题.

2. 函数与方程、不等式.

[例 4]已知关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 有两实根

x_1,x_2,证明$|x_1|<2,|x_2|<2$的充要条件是 $|a|<2+\frac{b}{2}$且$|b|<4$.

证明:

令$f(x)=x^2+ax+b$,则$f(x)$的图像是开口向上的抛物线.方程$x^2+ax+b=0$有两实根x_1,x_2,由韦达定理$x_1+x_2=-a,x_1x_2=b$.

(1)(必要性)若$|x_1|<2,|x_2|<2$,则$|b|=|x_1x_2|<4$,且抛物线与x轴的两交点在$(-2,2)$内,故有$f(2)>0$且$f(-2)>0\Rightarrow 4+2a+b>0$且$4-2a+b>0$得$a>-2-\frac{b}{2}$且$a<2+\frac{b}{2}$,即 $|a|<2+\frac{b}{2}$.

(2)(充分性)若$|a|<2+\frac{b}{2}$,则$a>-2-\frac{b}{2}$与$a<2+\frac{b}{2}$ 同时成立,可得$f(-2)>0$且$f(2)>0$,若$f(x)$的图像与x轴的交点在$(-2,2)$内,则得证.否则或在$(-\infty\ -2)$,或在$(2,+\infty)$,与$|b|=|x_1x_2|<4$矛盾.

注意:

用方程与不等式表述的问题,引入函数,借助函数图像会使其内在联系直观化.

[例5][1997年全国理科考题]设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$,方程$f(x)-x=0$的两根x_1,x_2满足$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$,(1)当$x\in(0,x_1)$时,证明$x<f(x)<x_1$.(2)设$f(x)$的图像关于直线$x=x_0$对称,证明$x_0<\frac{x_1}{2}$.

证明:

(1)$\because 0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$,

$\therefore f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0$ 即 $x<f(x)$

又$ax>0$, $1-ax_2>0$, $\therefore f(x)-x_1=[f(x)-x]+(x-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)=(ax-ax_2+1)(x-x_1)=(x-x_1)[ax+(1-ax_2)]<0$

即$f(x)<x_1$.

综上 $x<f(x)<x_1$.

(2)$x_0=-\frac{b}{2a}$ 且 $x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}$得$x_1=-\frac{b-1}{a}-x_2$

$\therefore 2x_0-x_1=-\frac{b}{a}-(-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}-x_2)=-\frac{1}{a}+x_2=\frac{ax_2-1}{a}<0$ 即 $2x_0<x_1$ 亦即 $x_0<\frac{x_1}{2}$

注意:

以上证明是从证明不等式最基本的方法比较法入手.其中巧妙应用了二次函数的两根式的形式特点,使问题化难为易.第(1)问也可从二次函数的图像入手考虑.

另证:

(1)记$F(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$ $\because a>0$且$f(x)-x=0$的两根x_1,x_2满足$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$, $\therefore y=F(x)$的对称轴为$x=\frac{x_1+x_2}{2}>x_1$. 当$0<x<x_1$时,$F(x)$是减函数,且$F(x_1)=0$ 故$F(x)>0$对$x\in(0,x_1)$恒成立.即$f(x)>x$. 记$G(x)=f(x)-x_1=ax^2+bx+(c-x_1)$ 则有$G(x_1)=0$,

若注意到$G(0)=c-x_1=ax_1x_2-x_1=x_1(ax_2-1)<0$ 可得$0<x<x_1$时,$G(x)<0$恒成立即$f(x)<x_1$.

[例6]利用图像求解下列各题.

(1)解不等式$\sqrt{a^2-x^2}>x+a\ (a\neq 0,a\in R)$,

(2)$k\in(0,\frac{1}{2})$,求方程$\sqrt{|1-x|}=kx$的解的个数.

解答:

(1)在同一坐标系内作出函数$y=\sqrt{a^2-x^2}$与$y=x+a$的图像如图2—4,可知当$a>0$时,$-a<x<0$;当$a<0$时,$a\leqslant x<-a$.

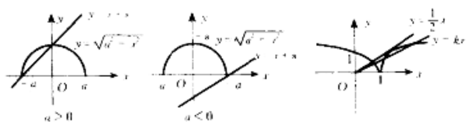


图2－4

(2)在同一坐标系内分别作出$y=\sqrt{|1-x|}$与$y=kx$的图像, 如图2—4由$\sqrt{|1-x|}=kx$得$k^2x^2=|1-x|$,当$x\geqslant 1$时,$k^2x^2-x+1=0$,$\Delta=1-4k^2=0$,得$k=\pm\frac{1}{2}$,可见$k=\frac{1}{2}$时,

$y=\frac{1}{2}x$ 与 $y=\sqrt{x-1}$ 相切.结合图形可知 $y=\sqrt{|1-x|}$ 与 $y=kx$ 在 $k\in(0,\frac{1}{2})$ 时有三个不同交点,即当 $k\in(0,\frac{1}{2})$ 时,方程有不同三解.

3. 函数与解析几何

[例 7]过点 $M(-1,0)$ 的直线 l_1 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 P_1P_2 两点,记线段 P_1P_2 的中点为 P,过点 P 和抛物线的焦点 F 的直线为 l_2;l_1 的斜率为 k;试把直线 l_2 的斜率与直线 l_1 的斜率之比表示为 k 的函数,并指出这个函数的定义域,单调区间,同时说明在每个单调区间上它是增函数还是减函数.

分析:

这是以解析几何为背景的函数题.直线 l_1 与抛物线有两不同交点是本题有意义的前提,也是确定函数定义域的根据.

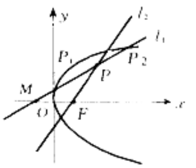


图 2-5

解答:

由已知,直线 l_1 的方程为

$y=k(x+1)$ ①

代入抛物线方程 $y^2=4x$ 得 $k^2(x+1)^2=4x$

即 $k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$ ②

直线 l_1 与抛物线有两个交点的充要条件是

$$\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta=(2k^2-4)^2-4k^2\cdot k^2>0\end{cases}$$

解得 $-1<k<0$ 或 $0<k<1$.

在此条件下,设 P_1,P_2 的横坐标为 x_1,x_2,P 点坐标为 (x',y'),

$$\text{则}\begin{cases}x'=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{4-2k^2}{2k^2}=\frac{2-k^2}{k^2}\\ y'=k(\frac{2-k^2}{k^2}+1)=\frac{2}{k}\end{cases}$$

即 P 点的坐标为 $(\frac{2-k^2}{k^2},\frac{2}{k})$,又抛物线的焦点 F 的坐标为 $(1,0)$,故直线 l_2 的斜率为 $\frac{\frac{2}{k}}{\frac{2-k^2}{k^2}-1}=\frac{k}{1-k^2}$,设直线 l_2 的斜率与直线 l_1 的斜率之比为 T,则 $T=f(k)=\frac{\frac{k}{1-k^2}}{k}=\frac{1}{1-k^2}$ 定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$

又 $f'(k)=\frac{2k}{(1-k^2)^2}$ 当 $k\in(-1,0)$ 时,$f'(k)<0$ ∴$f(k)$ 在 $(-1,0)$ 为减函数;当 $k\in(0,1)$ 时,$f'(k)>0$ ∴$f(k)$ 在 $(0,1)$ 为增函数.

[例 8]已知 l_1,l_2 是过原点且倾角互补的两直线,l_1,l_2 与椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 交于 A,B,C,D 不同四点($m>0,n>0$)

(1)设 l_1 的斜率为 k,四边形 $ABCD$ 的面积为 S,试写出 S 关于 k 的函数,

(2)若 l_1 的斜率 $0<k\leqslant 1$,求四边形 $ABCD$ 的最大面积.

分析:

首先应明确四边形 $ABCD$ 的形状.四边形 $ABCD$ 的面积随 k 变化的特征.

解答:

(1)据椭圆及直线 l_1,l_2 关于坐标轴的对称性,知四边形 $ABCD$ 是矩形且此矩形关于坐标轴对称.不妨设 l_1 的斜率 $k>0$,l_1 与椭圆在第一象限的交点为 (x_0,y_0) 则 $l_1:y=kx$

$$\text{由}\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\frac{mn}{\sqrt{n^2+m^2k^2}}\\ y_0=\frac{mnk}{\sqrt{n^2+m^2k^2}}\end{cases}$$

由对称性 $S=4x_0y_0=\frac{4m^2n^2k}{n^2+m^2k^2}$

(2)由(1)$S=\frac{4m^2n^2}{\frac{n^2}{k}+m^2k}$ 令 $g(k)=\frac{n^2}{k}+m^2k$ $(0<k\leqslant 1)$

$g'(k)=m^2-\frac{n^2}{k^2}=\frac{m^2(k-\frac{n}{m})(k+\frac{n}{m})}{k^2}$ 且 $m\neq n$

若 $0<\frac{n}{m}<1$,则当 $k=\frac{n}{m}$ 时,$g'(k)=0$,$0<k<\frac{n}{m}$ 时,$g'(k)<0$;$1>k>\frac{n}{m}$ 时,$g'(k)>0$ 又 $g(k)$ 在 $(0,1]$ 连续,∴$g(k)\min=g(\frac{n}{m})=2mn$ 从而 $S\max=\frac{4m^2n^2}{2nm}=2mn$

若 $\frac{n}{m}>1$,则 $g'(k)<0$,$g(k)$ 在 $(0,1)$ 单减,又

$g(k)$在$(0,1]$连续，$\therefore g(k)\min = g(1) = n^2 + m^2$，从而 $S\max = \dfrac{4m^2n^2}{m^2+n^2}$

注意：

对于动态型的解析几何问题，存在两个互相联系、互相制约的变量，我们常把其中一个看成自变量，另一个看成自变量的函数，通过明确函数的解析式，利用函数思想来研究和处理.

[例 9]已知双曲线以两条坐标轴为对称轴、焦点在 y 轴上，它的实轴长为 $2\sin\theta(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3})$，又这双曲线上任意一点$P(x,y)$到定点$M(1,0)$的最短距离为$\dfrac{1}{\sin\theta}$，求该双曲线离心率的取值范围.

分析：

双曲线方程为$\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，解题的首要环节是以点 P 的坐标为变量建立$|PM|$的函数表达式，并用 $b,\sin\theta$ 之间的关系式，把离心率 e 表示成b 或 $\sin\theta$ 的函数，研究它的取值范围.

解答：

设双曲线方程为$\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，则$|PM|^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+\sin^2\theta(1+\dfrac{x^2}{b^2})=(1+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2})x^2-2x+1+\sin^2\theta$

$\because x\in R\quad\therefore |PM|^2$ 的最小值为 $1+\sin^2\theta-\dfrac{b^2}{b^2+\sin^2\theta}$由条件 $1+\sin^2\theta-\dfrac{b^2}{b^2+\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

解得

$b^2=\dfrac{\sin^6\theta+\sin^4\theta-\sin^2\theta}{1-\sin^4\theta}$

$\because b^2>0$ 且$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，得$\dfrac{\sqrt5-1}{2}<\sin^2\theta\leqslant\dfrac34$，

$e^2=(\dfrac{c}{a})^2=\dfrac{b^2+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^4\theta}=\dfrac{t}{1-t^2}=\dfrac{1}{\frac1t-t}$，

其中 $t=sin^2\theta\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},\dfrac34]$

$\because f(t)=\dfrac{1}{\frac1t-t}$是增函数，故 $f(\dfrac{\sqrt5-1}{2})<e^2\leqslant f(\dfrac34)$，

即 $1<e^2\leqslant\dfrac{12}{7}$，

$\therefore 1<e\leqslant\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

4. 函数与三角、复数

[例 10][1998 年全国理科考题]设复数 $Z=3\cos\theta+i\cdot2\sin\theta$，求函数 $y=\theta-\arg z\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$的最大值以及对应的 θ 值.

分析：

所求是两个动态角之间的函数最大值，而求一个角的最大(小)值，一般要转化为求这个角的某三角函数的最大(小)值，在这里我们可以选择先求 $\tan y$ 的最大值，进而利用正切函数的单调性，求出 y 的最大值以及对应的θ值.

解答：

由 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，知 $\tan\theta>0$，于是 $\tan y=\tan(\theta-\arg z)=\dfrac{\tan\theta-\frac23\tan\theta}{1+\tan\theta\cdot\frac23\tan\theta}=\dfrac{\tan\theta}{3+2\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\frac{3}{\tan\theta}+2\tan\theta}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt6}=\dfrac{\sqrt6}{12}$，当且仅当 $\dfrac{3}{\tan\theta}=2\tan\theta$，即 $\theta=\arctan\dfrac{\sqrt6}{2}$时，上式等号成立. $\because \tan y$ 在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$为增函数，故 y 也取得最大值 $\arctan\dfrac{\sqrt6}{12}$.

此时，$\theta=\arctan\dfrac{\sqrt6}{2}$.

[例 11]已知辐角分别为 θ_1,θ_2 的复数 z_1、z_2 满足条件 $z_1+z_2=5i$，$|z_1z_2|=14$ 求 $\cos(\theta_1-\theta_2)$的最大值及最小值，并求取得最小值时 z_1，z_2 的值.

分析：

要求 $\cos(\theta_1-\theta_2)$的最值，首先要将 $\cos(\theta_1-\theta_2)$表示成一个变量的函数.由已知 $z_1+z_2=5i$，$|z_1z_2|=14$，故可用z_1 z_2的三角形式寻找它们与所求结论$\cos(\theta_1-\theta_2)$之间的关系.

解答：

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1)\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2)$

则由条件 $\begin{cases} r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2 = 0 & ① \\ r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2 = 5 & ② \\ r_1 r_2 = 14 & ③ \end{cases}$

由①②两式平方相加，再代入③得

$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{25-(r_1^2+r_2^2)}{2r_1r_2} = \dfrac{25-(r_1^2+\dfrac{14^2}{r_1^2})}{28} \leqslant \dfrac{25-28}{28} = -\dfrac{3}{28}$

又 $-1 \leqslant \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore -1 \leqslant \cos(\theta_1 - \theta_2) \leqslant -\dfrac{3}{28}$ 故 $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ 的最大值为 $-\dfrac{3}{28}$，最小值为 -1，当 $\cos(\theta_1 - \theta_2) = -1$ 时，$\theta_1 = \theta_2 + (2k+1)\pi$，易得此时 $z_1 = 7i, z_2 = -2i$ 或 $z_1 = -2i, z_2 = 7i$.

【跟踪训练】

1. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_n = (n+1)(\dfrac{10}{11})^n$，求 $\{a_n\}$ 中的最大项.

2. 已知不等式 $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{12}\log_a(a-1) + \dfrac{2}{3}$ 对于一切大于 1 的自然数 n 都成立，求实数 a 的取值范围.

3. 设 $y = \lg \dfrac{2^x + 3^x + 9^x a}{7}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上有意义，求实数 a 的取值范围.

4. 设非零复数 z_1, z_2, z_3，$|z_1| = 1$，$|z_2| = k$，$|z_3| = 2-k$，$\arg z_1 = \alpha$，$\arg z_2 = \beta$，$\arg z_3 = \gamma$，$z_1 + z_2 + z_3 = 0$，求 $\cos(\beta - \gamma)$ 的最大值与最小值.

5. P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$，$(a>1)$ 上一动点，A_1, A_2 是椭圆长轴的两个端点，(P 与 A_1, A_2 不重合)，$\varphi = \angle A_1PA_2$，求 φ 的取值范围.

三

等差数列与等比数列

【复习目标】

理解等差、等比数列的概念，掌握等差、等比数列的通项公式及前 n 项和公式，能灵活应用等差、等比数列的定义、性质、通项公式及前 n 项和公式解决有关问题．并能用函数的观点和方法揭示等差、等比数列的特征，分析和解决有关数列的问题．

【范例选讲】

[例 1] [1996 年高考题]等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为（　　）

A.130　B.170　C.210　D.260

分析 1：

一般方法是据等差数列的前 n 项和公式列方程求之．

解法 1：

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则

$$\begin{cases} ma_1+\dfrac{m(m-1)}{2}d=30 \\ 2ma_1+\dfrac{2m(2m-1)}{2}d=100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=\dfrac{10(m+2)}{m^2} \\ d=\dfrac{40}{m^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{3m}=3ma_1+\frac{3m(3m-1)}{2}d=3m\cdot\frac{10(m+2)}{m^2}+\frac{3m(3m-1)}{2}\cdot\frac{40}{m^2}=210.$$ 故选 C.

分析 2：

从函数的观点看当 $d\neq0$ 时，等差数列的前 n 项和是序号 n 的不含常数项的二次函数．解方程的过程会简捷些．

解法 2：

设 $S_n=An^2+Bn$　　　由条件

$$\begin{cases} Am^2+Bm=30 \\ 4Am^2+2Bm=100 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Am^2=20 \\ Bm=10 \end{cases}$$

从而 $S_{3m}=9Am^2+3Bm=9\times20+3\times10=210$

分析 3：

若注意到 $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列，则问题的结论更易得出．

解法 3：

由 $2(S_{2m}-S_m)=S_m+(S_{3m}-S_{2m})$ 得 $S_{3m}=210$

[例 2] [2000 年全国(理)]

(1)已知数列 $\{c_n\}$，其中 $c_n=2^n+3^n$，且数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列，求常数 p；

(2)设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列．

分析：

据等比数列的性质，可得到关于 p 的方程，解之可得 p．

解答：

(1) $\because \{c_{n+1}-pc_n\}$ 是等比数列，故 $(c_{n+1}-pc_n)^2=(c_{n+2}-pc_{n+1})\cdot(c_n-pc_{n-1})$ $(n\geqslant2)$ 将 $c_n=2^n+3^n$ 代入上式，得 $[2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)]^2=[2^{n+2}+3^{n+2}-p(2^{n+1}+3^{n+1})]\cdot[2^n+3^n-p(2^{n-1}+3^{n-1})]$ 即 $[(2-p)2^n+(3-p)\cdot3^n]^2=[(2-p)\cdot2^{n+1}+(3-p)\cdot2^{n+1}][(2-p)2^{n-1}+(3-p)\cdot3^{n-1}]$ 整理得

$\frac{1}{6}(2-p)(3-p)\cdot2^n\cdot3^n=0$ 解得 $p=2$ 或 $p=3$

(2)设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 p,q 且 $p\neq q$，$c_n=a_n+b_n$，要证 $\{c_n\}$ 不是等比数列，只需证 $c_2^2\neq c_1c_3$ 即可．

事实上，$c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$

$c_1\cdot c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)$