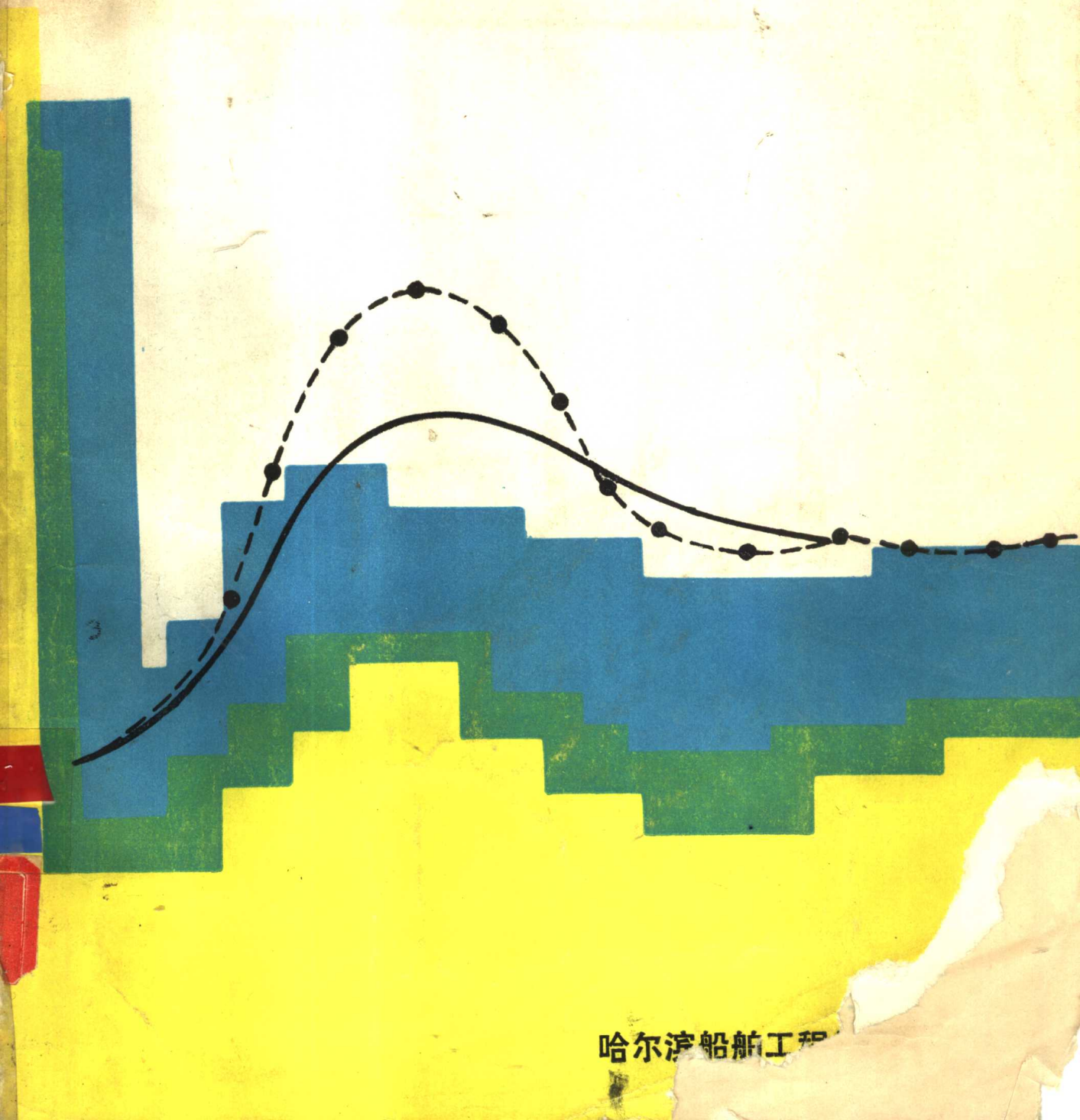


数字控制系统

李文秀 赵乃真 编



哈尔滨船舶工程

数 字 控 制 系 统

李文秀 赵乃真 编

哈尔滨船舶工程学院出版社

(黑)新登字第9号

内 容 简 介

本书介绍了数字控制的基本概念、采样过程、信号恢复、 Z -变换、脉冲传递函数和采样信号流图等,对分析与设计数字控制系统的 z 域分析法、频率特性法、状态空间法、DDC控制的设计法以及计算机实时控制的程序设计方法等均作了全面的阐述。最后,给出了设计数字控制系统的几个实例。书中还选编了一定数量的习题。

本书可作为高等院校船电自动化、工业企业自动化以及自动控制等专业本科生的教材,也可供从事自动化技术的工程技术人员参考。

数 字 控 制 系 统

李文秀 赵乃真 编

*

哈尔滨船舶工程学院出版社出版
新华书店首都发行所发行
绥棱县印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张20 字数453千字
1991年12月 第1版 1991年12月 第1次印刷
印数: 1—2000册

ISBN 7-81007-146-7/TP·8

定价: 5.15元

前 言

本书系根据全国高等院校船舶类教材统编计划，由船电自动化教材组评选审定推荐出版的。

近20年来，在控制系统中，应用以微型计算机为基础的数字调节器和可以自由编程的数字控制装置已成为控制技术发展的方向。这些系统我们统称为数字控制系统或离散控制系统。

本书以小规模过程数字控制为重点，从理论及应用两方面介绍数字控制系统的分析与设计方法，全书着重于基本理论、基本概念和基本方法的叙述，力求作到论述浅显易懂，重点突出。本书可作为船电自动化、工业企业自动化及自动控制等专业本科生60学时的教材，也可供从事工业过程控制的科技人员参考。

本书是作者在教学和参加科研工作的基础上，经充实内容编写而成。本书由李文秀（第一章至第六章）、赵乃真（第七章至第九章）共同编写。中国自动化学会理事、河北省自动化学会理事长、河北机电学院李友善教授仔细审阅了书稿，提出了许多极为宝贵的建议，在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中，得到徐惠良副教授等的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于时间仓促，作者水平所限，错误及不当之处难免，恳请读者批评指正。

编 者

1990.10.

目 录

第一章 数字控制的一般概念	I
§1-1 采样过程.....	1
§1-2 采样定理.....	3
§1-3 信号的恢复.....	5
第二章 Z-变换	10
§2-1 Z-变换的定义及求法	10
§2-2 Z-变换的基本定理	15
§2-3 Z-反变换	22
习 题.....	26
第三章 数字控制系统的数学描述	28
§3-1 线性差分方程.....	28
§3-2 线性差分方程的解.....	37
§3-3 脉冲传递函数.....	41
§3-4 数字控制系统的信号流图.....	52
习 题.....	63
第四章 数字控制系统的分析	66
§4-1 $[z]$ 平面的稳定性分析.....	66
§4-2 数字控制系统的根轨迹分析.....	74
§4-3 数字控制系统的频域分析.....	89
§4-4 数字控制系统的稳态误差分析.....	100
§4-5 采样时刻间的响应.....	107
习 题.....	114
第五章 数字控制系统的状态空间分析	116
§5-1 状态变量和状态空间.....	116
§5-2 数字控制系统的状态空间描述.....	118
§5-3 离散状态方程的解及传递函数阵.....	131
§5-4 数字控制系统的能控性与能观测性.....	137
§5-5 极点配置及观测器的设计.....	144
习 题.....	156
第六章 数字控制系统的设计	159
§6-1 模拟化设计方法.....	159
§6-2 模拟校正装置的离散化.....	160

§6-3 离散化设计方法	172
§6-4 最少拍随动系统的设计	181
§6-5 最小均方误差系统的设计	193
习 题	198
第七章 直接数字控制系统的设计	200
§7-1 DDC系统的构成	200
§7-2 数字PID控制器	202
§7-3 PID控制器参数的整定	209
§7-4 大纯滞后补偿控制系统	212
§7-5 大林算法	219
§7-6 DDC控制的其它算法	225
习 题	234
第八章 控制程序设计	235
§8-1 实时控制程序的特点	235
§8-2 实时控制程序的设计	238
§8-3 数字滤波程序设计	247
§8-4 实时控制中常用子程序	252
§8-5 实时控制程序设计中的几个问题	264
习 题	270
第九章 数字控制系统设计举例	271
§9-1 步进电机控制	271
§9-2 液罐温度控制	278
§9-3 双路随动系统微机控制	287
§9-4 锅炉汽包水位的微机控制	297
§9-5 单片机温度控制	305
附 录	310
参考文献	313

第一章 数字控制的一般概念

在控制工程中, 根据信号的传递和变换方式, 控制系统可以分为连续时间控制系统和离散时间控制系统两大类。如果系统中各处的信号是时间的连续函数, 则称该系统为连续时间控制系统; 若系统中一处或几处的信号不是时间的连续函数, 而是一串脉冲或者数码, 则称这类系统为离散时间控制系统或数字控制系统。

计算机控制系统是数字控制系统的典型例子。图1-1示出了计算机控制系统的典型框图。图中 D 是用于控制目的的数字计算机, 构成控制系统的数字部分(离散部分)。它的任务有时只是确定给定信号与反馈信号之间的瞬时差值。这时的计算机实际上只起比较元件的作用, 但要确定出这个差值有时还要进行大量的计算。在控制系统中使用数字计算机更多的是在于提高系统的性能, 采用软件——校正程序来保证控制系统具有所希望的性能。在这种情况下, 数字计算机实质上是具有给定特性的校正装置, 通常称作数字校正装置。图中的 $G(s)$ 是系统的连续部分, 执行机构和被控对象是构成系统连续部分的主要部分, 通过这一部分的信号均以连续时间的形式出现。图中 A/D 是模-数转换器, 它将连续时间信号(模拟量)转换为离散时间信号(数字量)送给计算机, 计算机根据这些数字信息, 按预定的控制规律进行计算, 输出数字形式的控制信号, 该数字信号经数-模转换器 D/A 变换成连续时间形式的控制作用, 调整被调量, 达到预期的性能。

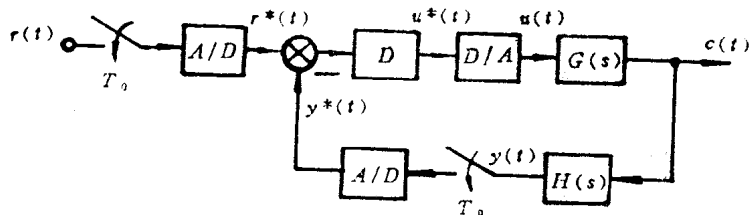
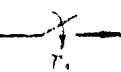


图1-1 计算机控制系统的简化框图

A/D 转换器实际上是数字测量元件。一般来说, 控制系统的精度主要取决于测量元件的精度。由于数字仪表的精度可以做得很高, 因此, 数字控制系统的精度一般比连续系统的精度高得多, 再由于数字信号抗干扰能力强, 这样, 在环境复杂、要求精度高的情况下, 采用数字控制方式设计系统更为合理。

§1-1 采样过程

所谓采样过程就是对连续信号 $f(t)$ 每隔 T_0 秒采样一次, 将连续时间函数 $f(t)$ 变换成离散时间函数 $f^*(t)$ 脉冲序列的过程。实现这一变换的装置称作采样开关, 用  表示。

符号表示。 T_0 是采样开关重复闭合的时间间隔，称作采样周期。若 T_0 为常数，称作等周期采样。若系统中存在多个采样开关，所有采样开关等周期同时开闭，则称为同步采样，若各采样开关以不同的周期采样，称为多速率采样。这里仅讨论应用最广的同步周期采样。

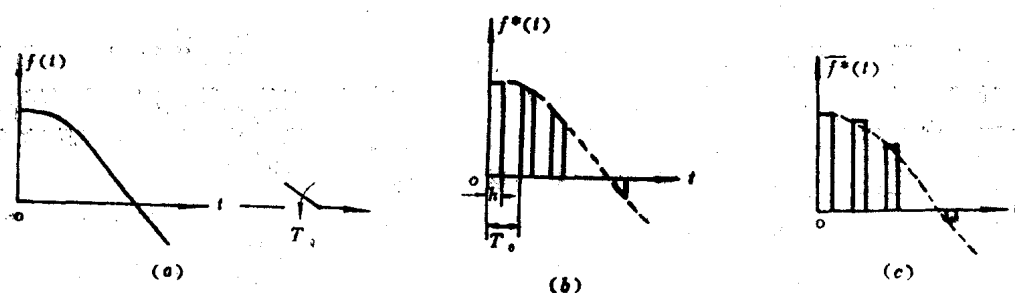


图1-2 连续时间信号的采样过程

图1-2表示了连续时间函数 $f(t)$ 经采样开关后变换为离散时间函数 $f^*(t)$ 的采样过程。

图中 h ——采样开关闭合时间，称作采样持续时间，

$$f_s = \frac{1}{T_0} \text{——采样频率，}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_0} \text{——采样角频率。}$$

由图1-2(b)可知，离散时间函数可以表示为

$$f^*(t) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT_0 + \Delta t) \quad 0 < \Delta t \leq h \quad (1-1)$$

在通常情况下， $f^*(t)$ 并不是平顶的脉冲序列，这给数学处理带来许多麻烦。由于实际采样持续时间 h 极短，且在此时间间隔内 $f(t)$ 的变化甚微（即 $h \ll T_0$ ， $h \ll T_m$ ， T_m 为系统中最大时间常数），图1-2(b)实际脉冲序列可近似用图1-2(c)所示的平顶脉冲序列 $\bar{f}^*(t)$ 表示。即

$$f^*(t) \approx \bar{f}^*(t) \quad (1-2)$$

基于脉冲强度的概念，平顶脉冲序列 $\bar{f}^*(t)$ 可表示为

$$\bar{f}^*(t) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT_0) \frac{1(t - KT_0) - 1(t - KT_0 - h)}{h} \quad (1-3)$$

式中， $[1(t - KT_0) - 1(t - KT_0 - h)]/h$ 表示发生在 $t = KT_0$ 时刻，脉冲强度为1的脉冲。当 $h \rightarrow 0$ 时，该脉冲可近似地用理想单位脉冲来表示。即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1(t - KT_0) - 1(t - KT_0 - h)}{h} \approx \delta(t - KT_0) \quad (1-4)$$

$$\delta(t - KT_0) = \begin{cases} \infty & t = KT_0 \\ 0 & t \neq KT_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - KT_0) dt = 1$$

为理想单位脉冲。于是

$$f^*(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} f(KT_0) \delta(t - KT_0) \quad (1-5)$$

根据连续信号的定义

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

并考虑到 (1-2) 式, 则 (1-5) 式可表示为

$$f^*(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} f(KT_0) \delta(t - KT_0) \quad (1-7)$$

(1-7) 表示离散信号为一脉冲序列, 而每个脉冲产生的时刻由理想单位脉冲 $\delta(t - KT_0)$ 表征, 每个脉冲的强度则由采样时刻连续信号的函数值 $f(KT_0)$ 确定。因此, 离散信号 $f^*(t)$ 是在采样时刻 KT_0 上, 强度为 $f(KT_0)$ 的脉冲序列。故 (1-7) 还可表示为

$$f^*(t) = f(t) \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t - KT_0) \quad (1-8)$$

(1-8) 说明采样过程从物理意义上可以理解为是一个脉冲调制过程, 连续信号是调制信号, 理想单位脉冲序列为载波。采样开关的作用相当于一个理想脉冲发生器, 当连续信号 $f(t)$ 通过采样开关时, 其输出信号就是将 $f(t)$ 调制在理想单位脉冲序列上的脉冲序列, 称该脉冲序列为离散信号或采样信号, 用 $f^*(t)$ 表示。该采样开关称作理想采样开关。

§1-2 采样定理

连续信号 $f(t)$ 经采样后变成离散信号 $f^*(t)$ 。那么, $f^*(t)$ 能否完全代表 $f(t)$ 呢? 事实上, 由 $f(t)$ 到 $f^*(t)$ 总是一种近似过程。可以想象, 采样速度 (即采样角频率 ω_s) 越高, 这种近似程度就越好, 当 $\omega_s \rightarrow \infty$ 时, $f^*(t)$ 就完全代表 $f(t)$ 。但是, ω_s 的提高则表示采样周期 T_0 的减小, 而采样时间间隔 T_0 正是计算机对信息加工处理的工作时间, T_0 越小, 要求计算机的运算速度越高。然而, 采样频率过低又要丢失信息, 如图1-3所示。因此, 采样频率既不能过高也不能太低。为使 $f^*(t)$ 既能真实地代表 $f(t)$, 又不致对计算机提出过高的要求, 就应对采样频率有所限制。采样定理给出了采样频率的下限。

采样定理

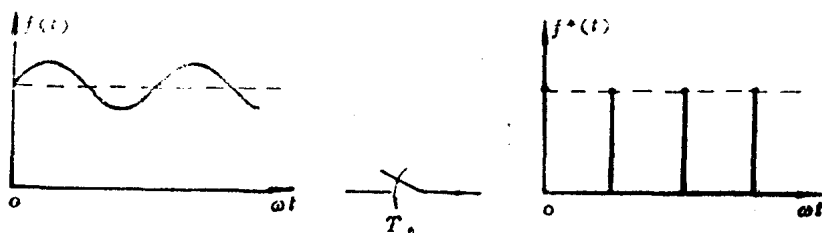


图1-3 采样频率过低造成信息丢失

如果对一个具有有限频谱 ($-\omega_{\max} < \omega < \omega_{\max}$) 的连续信号 $f(t)$ 进行采样, 当 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 时, 离散信号 $f^*(t)$ 可以无失真地再现原连续信号 $f(t)$ 。

这里 ω_s 为采样角频率, $\omega_{\max}$ 为连续信号 $f(t)$ 有效频谱的最高频率。下面对定理做简要的证明。

设连续信号 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(j\omega)$, 具有图 1-4(a) 所示的频谱。离散信号 $f^*(t)$ 的傅立叶变换为 (证明见参考文献[26])

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s) \quad (1-9)$$

将 (1-9) 写成展开式的形式有

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \{ F(j\omega) + F[j(\omega + \omega_s)] + F[j(\omega - \omega_s)] + F[j(\omega + 2\omega_s)] + F[j(\omega - 2\omega_s)] + \dots \} \quad (1-10)$$

可见 $F^*(j\omega)$ 是以 ω_s 为周期的周期函数。由 (1-10) 可以绘制离散信号 $f^*(t)$ 的频谱 $|F^*(j\omega)|$ 。当 $\omega_s > 2\omega_{\max}$ 时, $f^*(t)$ 的频谱如图 1-4(b) 所示, 由图 (b) 可以看出, 离散信号的频谱是由无穷多个形状与原连续信号频谱相同的孤立频谱构成的离散频谱。其中与 $n=0$ 对应的部分就是连续信号 $f(t)$ 的频谱, 只是在幅度上差 $1/T_0$ 倍。而与 $|n| \geq 1$ 相对应的各个孤立谱均为因采样而产生的高频频谱。图 1-4(c) 示出了 $\omega_s = 2\omega_{\max}$ 时的离散信号频谱。 $\omega_s < 2\omega_{\max}$ 的离散信号的频谱示于图 1-4(d), 这时离散信号的频谱不再由孤立谱构成, 而是 $F(j\omega)$ 的高频分量混入到 $F^*(j\omega)$ 的低频部分, 这种使 $F(j\omega)$ 的高频分量和低频分量混淆在一起的现象称作频率混叠。从图 1-4 可以明显看出, 为使与连续信号对应的 $n=0$ 部分的频谱不发生畸变, 必须使采样频率 ω_s 足够高, 以拉开各孤立谱间的距离, 使其彼此不相重叠。从图 1-4(b)、(c) 可以看出, 相邻两孤立谱互不重叠的条件是

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} \quad (1-11)$$

称采样频率 $\omega_s = 2\omega_{\max}$ 为奈奎斯特(Nyquist)频率。

在满足 (1-11) 的条件下, 当把离散信号 $f^*(t)$ 加至图 1-4(e) 所示由频率特性

$$|H_f(j\omega)| = \begin{cases} T_0 & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases} \quad (1-12)$$

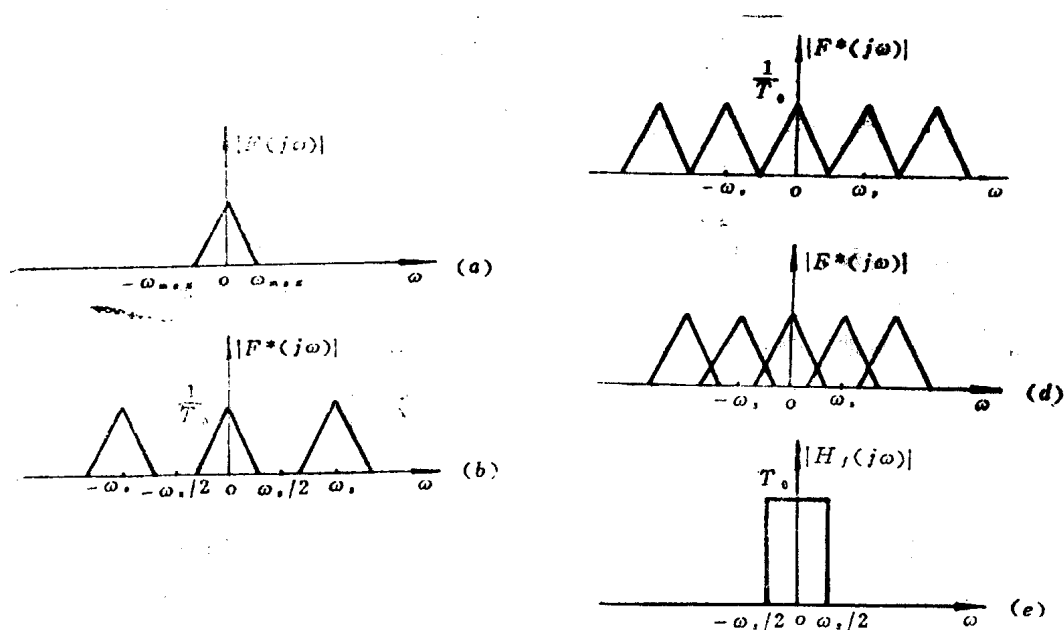


图1-4 信号的频谱

(a) 连续信号 $f(t)$ 的频谱;

(b) $\omega_s > 2\omega_{\max}$ 的 $f^*(t)$ 的频谱;

(c) $\omega_s = 2\omega_{\max}$ 的 $f^*(t)$ 的频谱;

(d) $\omega_s < 2\omega_{\max}$ 的 $f^*(t)$ 的频谱;

(e) 理想滤波器的频谱

描述的具有理想滤波特性的滤波器上, 则在滤波器的输出端得到频谱与原连续信号频谱完全相同的信号, 即可无失真地从离散信号恢复到原连续信号。

对于 $\omega_s < 2\omega_{\max}$ 时的离散信号 $f^*(t)$ 频谱如图1-4(d)], 即使通过图(e)所示滤波特性的理想滤波器, 在滤波器的输出端也无法得到与原连续信号频谱相同的信号, 即从离散信号 $f^*(t)$ 不能提取出原连续信号 $f(t)$ 。

§1-3 信号的恢复

从对采样定理的讨论我们知道, 当 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 时, 离散信号的频谱中与 $|n| \geq 1$ 对应的那些孤立谱都是由采样产生的高频频谱。这些高频分量通过系统时, 将与干扰一样, 使系统的输出产生附加误差。因此, 希望把这些高频分量在到达系统输出端之前就能滤掉, 以便对系统的输出不造成影响。滤掉这些高频分量, 即只保留与 $n = 0$ 对应的那项孤立谱。因此, 滤掉高频分量的过程即是原连续信号从离散信号中恢复的过程, 故称为信号的恢复。实现信号恢复的最好装置是具有理想滤波特性的滤波器, 但具有图1-4(e)所示特性的滤波器在工程上难以实现。实际上实现信号恢复的装置是保持器。图1-5表示用保持器恢复信号的过程, 经保持器恢复的信号用 $f_h(t)$ 表示。

保持器实际上是一种时域外推装置, 当离散信号输入时, 该装置能把输入脉冲在采样间隔时间内按某种规律保持 (外推) 到下一个采样时刻, 并由下一个采样时刻的采样

值所取代。由于该装置具有保持住信号的作用，故称为保持器。具有按常值、线性及二次函数（如抛物线）型外推规律的保持器，分别称为零阶、一阶和二阶保持器。

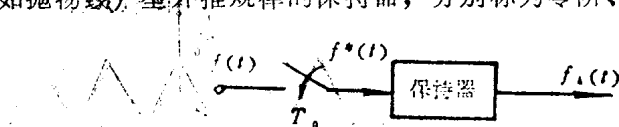


图1-5 信号的恢复

一、零阶保持器

零阶保持器是一种按常值规律外推的装置，它把离散信号在每一采样时刻的采样值简单地、不增不减地保持到下一个采样时刻，其工作过程如图1-6所示。

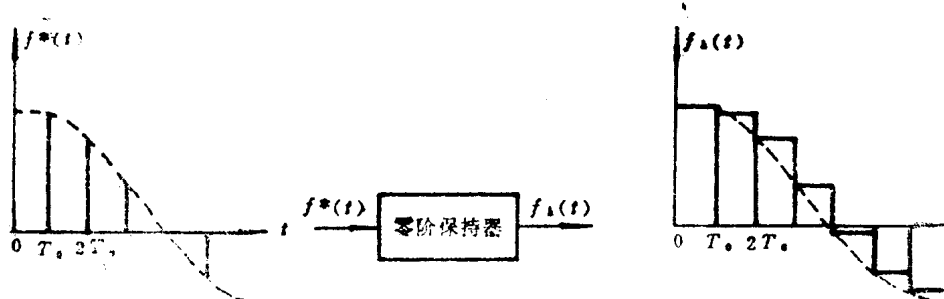


图1-6 零阶保持过程

从图1-6可以看出，零阶保持器的输出是一个阶梯波，与原连续信号存在误差。如果连续信号变化缓慢、采样周期又很短时，这种近似工程上还是允许的。特别是零阶保持器比较简单、容易实现，与其它类型的保持器比较相移最小，故零阶保持器得到广泛的应用。

根据零阶保持器的性质，零阶保持器对单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的响应如图1-7所示。即

$$g_{h0}(t) = 1(t) - 1(t - T_0) \quad (1-13)$$

由 (1-13) 求得零阶保持器的传递函数是

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \quad (1-14)$$

相应的频率特性为

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT_0\omega}}{j\omega} \quad (1-15)$$

或写为

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{e^{-j\frac{T_0\omega}{2}} (e^{j\frac{T_0\omega}{2}} - e^{-j\frac{T_0\omega}{2}})}{j\omega}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sin\left(\frac{T_0\omega}{2}\right)e^{-j\frac{T_0\omega}{2}}}{\omega} \\
 &= T_0 \frac{\sin\left(\frac{T_0\omega}{2}\right)}{\frac{T_0\omega}{2}} e^{-j\frac{T_0\omega}{2}} \quad (1-16)
 \end{aligned}$$

这里, T_0 为采样周期, 将 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_s}$ 代入 (1-16) 得

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}} e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_s}} \quad (1-17)$$

零阶保持器的幅频特性和相频特性绘于图1-8, 图中虚线是理想滤波器特性。

从图1-8的幅频特性可以看出, 零阶保持器本质上是个低通滤波器, 但与图1-4(e)所示的理想滤波器不同。零阶保持器在 $\omega = \omega_s/2$ 时, 幅值为 $0.636T_0$, 在 $\omega = \omega_s$ 时, 幅值才为零, 且在高频段 ($\omega > \omega_s/2$) 幅值不全为零。这样, 当离散信号通过零阶保持器时, 它不仅允许离散信号频谱中对应 $n=0$ 的主要分量通过, 还允许离散频谱中的其它高频分量部分通过, 因此, 使恢复的信号中含有高频分量, 从波形上看就是图1-6所示的阶梯波。由于系统的被控对象以及执行机构一般都具有较大的惯性, 由零阶保持器漏过来的高频分量再经这些大惯量环节又一次滤波, 使这些高频分量在系统的输出端极不明显。这就是在离散系统中能经常使用零阶保持器的一个主要原因。

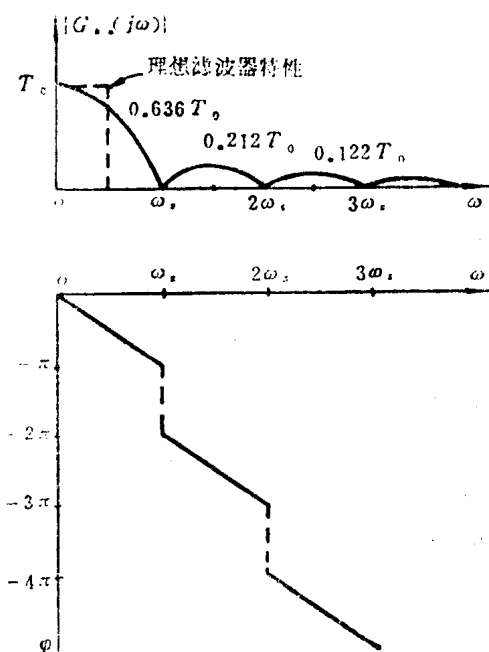


图1-8 零阶保持器的幅频及相频特性

从 (1-16) 可知, 零阶保持器的相频特性是频率 ω 的线性函数。当 $\omega = \omega_s$ 时, 其相应的相移为 $-\pi$ 。若系统中串接零阶保持器, 将使系统产生附加相位滞后, 造成系统稳定性下降, 但零阶保持器与一阶、二阶保持器相比, 其相位滞后还是最小的。

二、一阶保持器

一阶保持器是一种基于 $f(KT_0)$ 与 $f[(K-1)T_0]$ 两个采样值按线性规律外推的装置。线性外推函数的斜率为

$$\frac{f(KT_0) - f[(K-1)T_0]}{T_0}$$

外推函数值为

$$f_h(t) = f(KT_0) + \frac{f(KT_0) - f[(K-1)T_0]}{T_0} \cdot \tau \quad (1-18)$$

式中 $KT_0 \leq t \leq (K+1)T_0$,

$$\tau = t - KT_0.$$

基于线性外推得到的外推函数 $f_h(t)$ 示于图1-9。

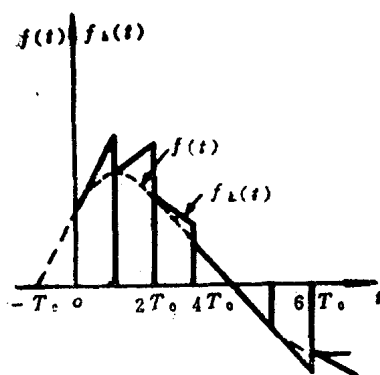


图1-9 一阶保持过程

由(1-18)可知, 一阶保持器的输出是现在时刻输入的采样值 $f(KT_0)$ 与前一时刻输入采样值 $f[(K-1)T_0]$ 连线的延长线。一阶保持器在单位脉冲函数 $\delta(t)$ 输入下的响应 $g_h(t)$ 如图1-10(b)中的实线所示。将 $g_h(t)$ 分解为图1-10(c)所示的 $g_{h1}(t)$, $g_{h2}(t)$, $\dots$, $g_{h6}(t)$ 6个分量, 根据这6个分量可以写出一阶保持器的传递函数。

$$\begin{aligned} G_{h1}(s) &= \sum_{i=1}^6 L[g_{hi}(t)] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{T_0 s^2} - \frac{2}{s} e^{-T_0 s} - \frac{2}{T_0 s^2} e^{-T_0 s} + \frac{1}{s} e^{-2T_0 s} \\ &\quad + \frac{1}{T_0 s^2} e^{-2T_0 s} \end{aligned}$$

整理后得

$$G_{h1}(s) = T_0(1 + T_0 s) \left(\frac{1 - e^{-T_0 s}}{T_0 s} \right)^2 \quad (1-19)$$

相应的频率特性为

$$G_{h1}(j\omega) = T_0 \sqrt{1 + (T_0 \omega)^2} \left(\frac{\sin \frac{T_0 \omega}{2}}{\frac{T_0 \omega}{2}} \right)^2 e^{j(\tan^{-1} T_0 \omega - T_0 \omega)} \quad (1-20)$$

一阶保持器的频率特性示于图1-11。为便于比较, 图中以虚线绘出了零阶保持器的频率特性。从图上可以看出, 一阶保持器的幅频特性较零阶保持器的普遍高些。这样, 离散信号中的高频分量更容易通过一阶保持器, 使一阶保持器恢复的连续信号 $f_h(t)$ 中将有更多的高频分量。从图1-9及图1-6可以看出, 一阶保持器能较好地复现速度函数信号, 零阶保持器能较好地复现阶跃函数信号。但一阶保持器比零阶保持器的相位滞后更为严重, 因此, 在控制系统中一般不采用一阶保持器, 更不采用高阶保持器。

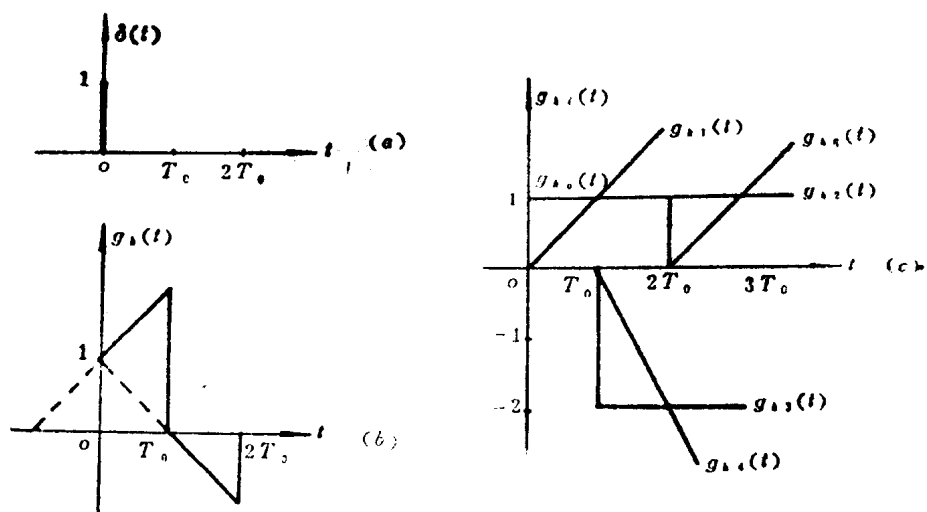


图1-10 一阶保持器的单位脉冲响应

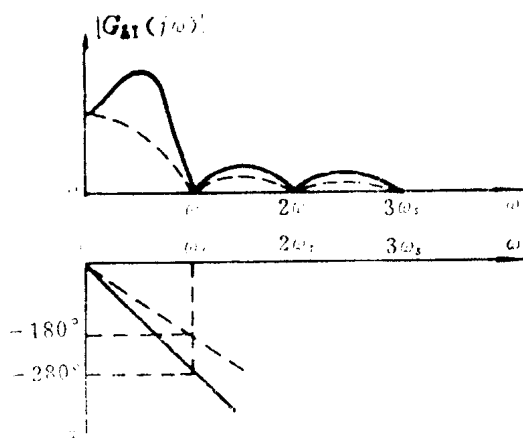


图1-11 一阶保持器的幅频及相频特性

第二章 Z-变换

Z-变换是分析设计数字控制系统的数学工具之一，其作用恰似连续控制系统理论中的拉普拉斯变换。

§2-1 Z-变换的定义及求法

设连续时间函数 $x(t)$ 可以进行拉氏变换，其拉氏变换式为 $X(s)$ ，经采样周期为 T_0 的采样开关后，变为离散时间函数 $x^*(t)$ ，即

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0)\delta(t - nT_0) \quad (2-1)$$

或

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)\delta(t - nT_0) \quad (2-2)$$

对(2-2)两端取拉氏变换，则有

$$\begin{aligned} X^*(s) &= L[x^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)L[\delta(t - nT_0)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)e^{-nT_0s} \end{aligned} \quad (2-3)$$

可见， $X^*(s)$ 是 s 的超越函数。为使用上的方便，令

$$z = e^{T_0s} \quad (2-4)$$

式中 T_0 ——采样周期。

则

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)z^{-n} \stackrel{\Delta}{=} X(z) \quad (2-5)$$

若(2-5)所示级数收敛，称 $X(z)$ 为 $x^*(t)$ 的Z-变换。

记作

$$X(z) = Z[x^*(t)]$$

从上面分析可以看出，Z-变换实际上就是离散时间函数的拉氏变换。所以，Z-变换只能反映连续时间函数在采样时刻上的性质，而对连续时间函数在非采样时刻的信息

则无从表现。因此,从这一点上看,连续时间函数与相应的离散时间函数具有相同的Z-变换。即

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x^*(t)] = Z[x(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0)z^{-n} \end{aligned} \quad (2-6)$$

下面介绍求Z-变换的3种方法。

一、级数求和法

将(2-2)及(2-6)分别写成展开式形式,即

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T_0)\delta(t-T_0) + \dots + x(nT_0)\delta(t-nT_0) + \dots \quad (2-7)$$

$$X(z) = x(0) + x(T_0)z^{-1} + \dots + x(nT_0)z^{-n} + \dots \quad (2-8)$$

对比(2-8)与(2-7)可知, z^{-i} 的系数 $x(iT_0)$ 是连续时间函数 $x(t)$ 在 $t=iT_0$ 采样时刻的函数值;而其幂指数 i 则表征从 $t=0$ 时刻起,以采样周期 T_0 为计时单位的采样时刻 iT_0 。因此,只要知道连续时间函数 $x(t)$ 在各采样时刻上的采样值,便可按(2-8)式求得相应离散时间函数 $x^*(t)$ 的Z-变换的展开式形式,通常称为Z-变换的开式。

例2-1 求单位阶跃函数 $x(t) = 1(t)$ 的Z-变换。

解 因为 $x(nT_0) = 1(nT_0) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

按(2-8)得

$$X(z) = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots$$

若 $|z| > 1$, 则 $X(z)$ 可写成闭式形式

$$X(z) = Z[1(t)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (2-9)$$

这里, $|z| > 1$ 是指

$$|z| = |e^{sT_0}| = e^{\sigma T_0} = e^{\sigma T_0} \cdot e^{j\omega T_0} = e^{\sigma T_0} > 1$$

即

$$\sigma > 0$$

这正是单位阶跃函数 $1(t)$ 的拉氏变换条件。

例2-2 求指数函数 $x(t) = e^{-at} (a > 0)$ 的Z-变换。

解 因为 $x(nT_0) = e^{-anT_0} \quad n = 0, 1, \dots$

由(2-8)得

$$X(z) = Z[e^{-at}] = 1 + e^{-aT_0}z^{-1} + e^{-2aT_0}z^{-2} + \dots$$

若 $|e^{aT_0}z| > 1$, $X(z)$ 可写成闭式

$$X(z) = Z[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT_0}z^{-1}}$$