哥德巴赫猜想与孪生素数猜想

Goldbach Hypothesis and Hypothesis of Twin Primes

司钊 司琳 SIZHAO SILIN

西北工业大学出版社

712

哥德巴赫猜想与孪生素数猜想

Goldbach Hypothesis and Hypothesis of Twin Primes

司钊　司琳

Si Zhao　Si Lin

西北工业大学出版社

Northwestern Polytechnical University Press

【**内容简介**】本书按照新的求证方法、从新的角度入手对哥德巴赫猜想和孪生素数猜想这两个数学问题给以论述。思路清晰、方法简单易懂。文中同时给出了两个命题的具体求解方法和验证推导公式的大量实筛数据。书末附有100 000以内的素数表。

本书可作为理工科大学和师范院校的参考用书，亦可供数学工作者和数学爱好者阅读。

【**Brief Introduction**】The writers prove the Goldbach hypothesis and the hypothesis of twin primes from the new point of view and in regard with the new proof way in this book. The train of thought is very clear, and the proof way is simple and easy. Meanwhile, the writers give the specific solution methods of the two hypothesizes and a great deal of sieved numbers of the validate formulas. The table of primes less than 100,000 is attached in the end of this book.

图书在版编目（CIP）数据

哥德巴赫猜想与孪生素数猜想/司钊，司琳编著.
西安：西北工业大学出版社，2002.1
ISBN 7-5612-1433-2

Ⅰ.哥… Ⅱ.①司… ②司… Ⅲ.①哥德巴赫猜想
-研究②孪生素数-研究 Ⅳ.O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 096401 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072 电话：029—8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：西安市向阳印刷厂
开　　本：850mm×1 168mm　1/32
印　　张：10.375
字　　数：263 千字
版　　次：2002 年 1 月第 1 版　　2002 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～1 600 册
定　　价：19.00 元

前　　言

1742 年，在德国数学家 Christian Goldbach 和 Leonhard Euler 的通信中，提出了关于正整数和素数关系的两个推测，即：

（1）每一个大于或等于 6 的偶数都可表示为二个奇素数之和；

（2）每一个大于或等于 9 的奇数都可表示为三个奇素数之和。

这就是著名的哥德巴赫猜想。

哥德巴赫猜想提出到今天已经有 259 年了，200 多年来这个猜想一直吸引了许多数学工作者和数学爱好者，特别是不少著名数学家的注意和兴趣，并为此作出了艰巨的努力。不过，直至近 80 年来，对这一猜想的研究才取得了一些引人瞩目的重大进展。迄今得到的最好结果是：

（1）1937 年，前苏联数学家维诺格拉多夫证明了：每一个充分大的奇数都可表示为三个奇素数之和；

（2）1966 年，我国数学家陈景润证明了：每一个充分大的偶数都可表示为一个素数与一个不超过二个素数的乘积之和。

因此关于偶数的哥德巴赫猜想尚未得到最终证明。因之，现在说到哥德巴赫猜想时，总是仅指关于偶数的哥德巴赫猜想。

1900 年，在巴黎召开的国际数学会上，德国数学家 D.Hilbert 在其展望 20 世纪数学发展前景的著名演讲中，提出了 23 个他认为是最重要的没有解决的数学问题，作为数学研究的主要方向。其中第八问题包括哥德巴赫猜想（Goldbach Hypothesis）、孪生素

数猜想（Hypothesis of Twin Primes）和黎曼猜想（Riemann Hypothesis）等三部分，这三个部分至今都未得到最终证明。

由于孪生素数猜想与哥德巴赫猜想存在着一定的共性，所以我们在求证哥德巴赫猜想的同时，延用基本类同的方法对孪生素数问题也作了同等的论述。

书中独立的两篇文章以新的思想方法从一个新的角度入手，对这两个命题进行探讨，其结果令人鼓舞，且出乎意料的简单。

由于作者水平有限，不能妄下结论。相信广大数学工作者和数学爱好者，尤其各位数学专家定能对此给予深刻的揭示和解释。

当然书中论及的新思路、新方法，若能给读者以某种启示和灵感，或对其取得的进步和成绩有所帮助，才是作者的最终企盼。

作者向曾经给予过大力支持和热情帮助的各位领导、老师、同事和朋友们表示衷心的感谢！

文中谬误之处，恳请批评指正。

作　者

2001 年 11 月

Forword

In 1742, German mathematician Christian Goldbach advanced two conjectures about the relation of positive integer and prime in the letter to his friend Leonhard Euler. i.e.:

(1) Any even number not less than 6 can be expressed as the sum of two odd primes.

(2) Any odd number not less than 9 can be expressed as the sum of three odd primes.

This is exact the Goldbach hypothesis.

It is 259 years long since the Goldbach hypothesis put forward. This hypothesis attracts many math operators, math lovers and famous mathematicians since more than 200 years ago. And they make great efforts on it. But until the recent 80 years, people make great progress on the Goldbach hypothesis. And the best result is:

(1) In 1937, a former Russia mathematician had proved: Any greater odd number can be expressed as the sum of three odd primes.

(2) In 1966, Chinese mathematician Chen JingRun had proved: Any greater even number can be expressed as the sum of a prime and the product of two primes.

i.e. the Goldbach hypothesis of even number have not been proved yet. So when we talk about Goldbach hypothesis now, we always mean the Goldbach hypothesis of even number.

In 1900, on the international math meeting at Paris, German mathematician D.Hilbert advanced 23 problems those he think are very important and had not been solved in his famous lecture. And the eighth problem includes the Goldbach hypothesis, the Hypothesis of twin primes and the Riemann hypothesis. These three problems have not been proved yet.

Since the Hypothesis of twin primes and the Goldbach hypothesis have some common characters, when the writers prove the Goldbach hypothesis, they prove the Hypothesis of twin primes by the similar method.

The writers discuss the two problems from the new point of view and in regard with the new way. The result is quite heartening.

Si Zhao, Si Lin

2001.11

目　　录
Catalogue

第 一 部 分(Part One)

第 二 部 分(Part Two)

附　录(Appendix)

后　记(Postscript)

第一部分
（Part One）

A. 任意大偶数可表为二个奇素数之和

【摘要】本文证明了任意大偶数可表为二个奇素数之和，且满足此条件的奇素数不少于 $p_r/4$ 对（p_r 为不超过给定偶数的平方根的最大素数）。同时，给出了具体的求解方法。

【关键词】筛法、集合、同余式

1.引言

哥德巴赫猜想提出了两个命题：

命题 1：每一个大于或等于 6 的偶数都可以表示为二个奇素数之和。

命题 2：每一个大于或等于 9 的奇数都可以表示为三个奇素数之和。

显然，命题 2 是命题 1 的直接推论。因为，命题 2 所指的奇数减 3 即为命题 1 所讨论的偶数。3 为奇素数，假若命题 1 得证，命题 2 也就自然得以证明。因此，关键在于命题 1 的求证。

对于命题 1，经人们多年努力，在小数值范围内已被逐一验算确认。而且，被验算的范围不断扩充，截止目前，已经超过 10 的 14 次方。但验算总归不能取代证明。证明大偶数可以表为二个奇素数之和，是二百多年来人们一直追求的目标。为此，借鉴于前人的工作，本文采用了一种新的筛选方法，以图求得简单明晰的筛函数，从而简化命题求证的演算过程。现具体证明如下。

2.有限正整数集合 N

设 n 为任意给定的正整数，将不超过 n 的全部正整数组成的集合用 N 表示：

$$N=\{1，2，\cdots，n\}$$

其基数 $$|N|=n$$

2.1 集合 N 的基本特征

集合 N 具有如下三个特征：

(1) 集合 N 中没有重复的元素；

(2) 集合 N 中的元素按数值大小顺序排列时，任意相邻两个元素之间的差值都相等；

(3) 集合 N 中元素按数值大小顺序排列时，任意相邻的 m 个元素构成模 m 的完全剩余组，只要模数 m 与该集合中相邻两个元素之间的差值互素。

上述前两项特征显而易见。关于第三项特征，证明如下：

设集合 N 中随意相邻的 m 个元素，其中最小的一个为 h，则其余 $m-1$ 个元素为：

$$h+\Delta，h+2\Delta，\cdots，h+(m-1)\Delta$$

Δ 表示集合 N 中相邻两个元素之间的差值。

这 m 个元素每两两之间的差值可用 $\beta\Delta$ 统一表示。这里，β 为不超过 $m-1$ 的正整数，Δ 等于 1 必定与 m 互素。故 $\beta\Delta$ 不能被 m 整除。所以，这 m 个元素每两两之间对模 m 皆不同余。自然，对模 m 两两不同余的 m 个元素即构成模 m 的完全剩余组。

2.2 集合 N 中同余类子集的基数

首先引入“算符”：

规定[x]表示 x 的整数部分。而且，基数因子可以直接乘入取

整符号之内。即:

$a[x] = [ax]$（a 为集合或者子集合的基数）

将不超过 λ (2< λ < n)的全部素数组成的集合用 P 表示，且将 P 中元素按数值大小顺序排列:

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$$

其中最小的素数 $p_1 = 2$

最大的素数 $p_r \le \lambda$ (2-1)

设 p_i 为集合 P 中任一元素。

集合 N 中全部元素按模 p_i 可分为 p_i 个同余类子集。若以非负的最小剩余数命名，这 p_i 个同余类子集分别称为“0 同余类子集”、“1 同余类子集”,…,“(p_i-1) 同余类子集”。令 $Ns \pmod{p_i}$ 表示其中的“s 同余类子集”，$|Ns| \pmod{p_i}$ 表示 $Ns \pmod{p_i}$ 的基数（$0 \le s \le p_i-1$）。

根据前边述及的集合 N 的基本特征可知，集合 N 中含有 $[n/p_i]$ 个模 p_i 的完全剩余组。每个完全剩余组又包含每个同余类子集各一个元素。

集合 N 中数值超过 $p_i[n/p_i]$ 的元素共有 n_i 个（n_i 为 n 对模 p_i 的非负的最小剩余）。这 n_i 个元素分别属于“1~ n_i 同余类子集”。由此知

$$|Ns| \pmod{p_i} = [n/p_i] + Qs \qquad (0 \le s \le p_i-1) \tag{2-2}$$

$$Qs = 0 \qquad (s = 0 \text{ 或 } s > n_i)$$

$$Qs = 1 \qquad (s > 0 \text{ 且 } s \le n_i)$$

我们定义对应 $|Ns| \pmod{p_i}$ 的平均基数为

$$|Ms| \pmod{p_i} = n/p_i \qquad (0 \le s \le p_i-1) \tag{2-3}$$

由于 $n/p_i = [n/p_i] + n_i/p_i \qquad (0 \le n_i \le p_i-1)$ (2-4)

所以 $|Ms| \pmod{p_i} = [n/p_i] + n_i/p_i \qquad (0 \le s \le p_i-1)$ (2-5)

比较（2-2）和（2-5）式，可知

(1) 当 $n_i = 0$ 时，$|Ns| \pmod{p_i} = |Ms| \pmod{p_i}$;

(2) 当 $n_i > 0$ 时，$||Ns| \pmod{p_i} - |Ms| \pmod{p_i}| < 1$。

可见，基数$|Ns| \pmod{p_i}$与其对应的平均基数$|Ms| \pmod{p_i}$近似相等。尤其当$|Ns| \pmod{p_i}$的数值较大时，$|Ns| \pmod{p_i}$与$|Ms| \pmod{p_i}$的差值完全可以略去不计。

另外，基数$|Ns| \pmod{p_i}$的下界可以通过对应的平均基数求得。

由（2-2）式可知

$$|Ns| \pmod{p_i} \geq [n/p_i] \quad (0 \leq s \leq p_i - 1) \qquad (2\text{-}6)$$

将（2-4）式代入（2-6）式，得

$$|Ns| \pmod{p_i} \geq (n - n_i)/p_i \quad (0 \leq s \leq p_i - 1) \qquad (2\text{-}7)$$

由于 $n_i < p_i$ (2-8)

所以 $|Ns| \pmod{p_i} > (n - p_i)/p_i \quad (0 \leq s \leq p_i - 1)$ (2-9)

令 $\tau_i = (n - p_i)/n$ (2-10)

得$|Ns| \pmod{p_i} > \tau_i (n/p_i) = \tau_i |Ms| \pmod{p_i} \quad (0 \leq s \leq p_i - 1)$ (2-11)

（2-11）式所示，为集合 N 中随意一个模 p_i 的同余类子集基数的下界公式。

关于集合 N 中多个模 p_i 的同余类子集的情况，表述如下：

设 $N_1, N_2, \ldots, N_{s_i}$ 为集合 N 中随意 s_i 个模 p_i 的同余类子集。这些子集的并集用 $Nci \pmod{p_i}$表示。

$$Nci(\bmod\ p_i) = \bigcup_{\varphi=1}^{s_i} N_\varphi(\bmod\ p_i) \qquad (2\text{-}12)$$

用$|Nci| \pmod{p_i}$表示 $Nci \pmod{p_i}$的基数；用$|Mci| \pmod{p_i}$表示对应$|Nci| \pmod{p_i}$的平均基数。

由（2-2）式可知

$$|Nci| \pmod{p_i} = s_i[n/p_i] + Q_{ci} \quad (0 \leq Q_{ci} \leq s_i) \qquad (2\text{-}13)$$

由（2-3）式可知

$$|Mci| \pmod{p_i} = s_i (n/p_i) = n (s_i/p_i) \qquad (2\text{-}14)$$

令 $k_i = s_i/p_i$ (2-15)

称 k_i 为相对模数 p_i 的分选系数。

由（2-14）和（2-15）式可得

$$|Mci| \ (\text{mod } p_i) = nk_i \tag{2-16}$$

由（2-13）式可知

$$|Nci| \ (\text{mod } p_i) \geq s_i[n/p_i] \tag{2-17}$$

将（2-4）和（2-8）式代入（2-17）式，得

$$|Nci| \ (\text{mod } p_i) > s_i(n-p_i)/ p_i \tag{2-18}$$

将（2-10）和（2-14）式代入（2-18）式，得

$$|Nci| \ (\text{mod } p_i) > \tau_i |Mci| \ (\text{mod } p_i) \tag{2-19}$$

将（2-16）代入（2-19）式得

$$|Nci| \ (\text{mod } p_i) > n\ k_i^* \tag{2-20}$$

$$k_i^* = \ \ \tau_i k_i \tag{2-21}$$

k_i*称为（相对模数 p_i 的）下界分选系数。

比较（2-16）式和（2-20）式可知，以 k_i*取代 k_i 后的平均基数即为对应基数的下界。

$$|Nci| \ (\text{mod } p_i) > |Mci|_{ki=ki^*} \ (\text{mod } p_i) \tag{2-22}$$

2.3 同余类子集的交集

根据前面的定义已知，Ns (mod p_i)为集合 N 中随意一个模 p_i 的同余类子集。不难看出 Ns (mod p_i)与 N 具有相同的基本特征。即

(1) Ns (mod p_i)中没有重复的元素。

(2) Ns (mod p_i)中元素按数值大小顺序排列时，任意相邻两个元素之间的差值都相等。而且，差值 $\Delta = p_i$。

(3) Ns (mod p_i)中元素按数值大小顺序排列时，任意相邻的 p_j 个元素都构成模 p_j 的完全剩余组，只要 p_j 为集合 P 中不同于 p_i 的素数。（p_j 与 p_i 为不同的素数，则必然互素。）

由于 Ns (mod p_i)与 N 具有相同的基本特征，所以类同于对集合 N 的讨论，可知:

集合 Ns (mod p_i)中的元素按模 p_j 可分为 p_j 个同余类子集。用 Nst (mod p_i) (mod p_j)表示其中随意一个模 p_j 的同余类子集，则 Nst (mod p_i) (mod p_j)称为集合 N 的二次同余类子集($0\leq t\leq p_j-1$)。

用$|Mst|$ (mod p_i) (mod p_j)表示对应 Nst (mod p_i) (mod p_j)的平均基数。

$$|Mst| \,(\mathrm{mod}\ p_i)\,(\mathrm{mod}\ p_j)=\frac{|Ms|\,(\mathrm{mod}\ p_i)}{p_j} \tag{2-23}$$

将（2-3）式代入（2-23）式，得

$$|Mst| \,(\mathrm{mod}\ p_i)\,(\mathrm{mod}\ p_j)=n/(p_ip_j) \tag{2-24}$$

当取 i=1, j=2 时，则

$$|Mst| \,(\mathrm{mod}\ p_1)\,(\mathrm{mod}\ p_2)=n/(p_1p_2) \tag{2-25}$$

在集合 N 中先取 s_1 个模 p_1 的同余类子集，再从这 s_1 个模 p_1 的同余类子集中取 s_2 个模 p_2 的同余类子集所得元素集合即为集合 N 中 s_1 个模 p_1 的同余类子集的并集与集合 N 中 s_2 个模 p_2 的同余类子集的并集的交集。若用 Nv_2 表示这二者的交集,则

$$Nv_2=Nc_1\,(\mathrm{mod}\ p_1)\bigcap Nc_2\,(\mathrm{mod}\ p_2)=$$

$$\bigcup_{\varphi=1}^{s_1}N_\varphi(\mathrm{mod}\ p_1)\bigcap\bigcup_{\varphi=1}^{s_2}N_\varphi(\mathrm{mod}\ p_2)$$

则 Nv_2 包含有 s_1s_2 个二次同余类子集。故知 Nv_2 对应的平均基数为

$$|Mv_2|=s_1s_2\{n/(p_1p_2)\} \tag{2-26}$$

将（2-15）式代入（2-26）式得

$$|Mv_2|=n\,k_1k_2 \tag{2-27}$$

当以不同于 p_1 和 p_2 的素数 p_3 为模数，对二次同余类子集

$Nst(\bmod\ p_1)\ (\bmod\ p_2)$求取三次同余类子集时，由于 $Nst(\bmod\ p_1)$ $(\bmod\ p_2)$ 与 $Ns(\bmod\ p_1)$及 N 都具有相同的基本特征，故同上推理可得

$$|Mv_3| = n\ k_1k_2k_3 \tag{2-28}$$

$|Mv_3|$表示集合 N 中 s_1 个模 p_1 的同余类子集的并集与集合 N 中 s_2 个模 p_2 的同余类子集的并集再与集合 N 中 s_3 个模 p_3 的同余类子集的并集三者的交集 Nv_3 对应的平均基数。

$$Nv_3 = Nc_1\ (\bmod\ p_1) \bigcap Nc_2\ (\bmod\ p_2) \bigcap Nc_3\ (\bmod\ p_3) =$$

$$\bigcup_{\varphi=1}^{s_1} N_{\varphi}(\bmod\ p_1) \bigcap \bigcup_{\varphi=1}^{s_2} N_{\varphi}(\bmod\ p_2) \bigcap \bigcup_{\varphi=1}^{s_3} N_{\varphi}(\bmod\ p_3)$$

以此类推，当模数分别选用 r 个不同的素数 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 时，相应的 r 个并集的交集 Nv_r 为

$$Nv_r = \bigcap_{\omega=1}^{r} Nc_{\omega}(\bmod\ p_{\omega}) = \bigcap_{\omega=1}^{r} \bigcup_{\varphi=1}^{s_{\omega}} N_{\varphi}(\bmod\ p_{\omega})$$

其对应的平均基数为

$$|Mv_r| = n\prod_{i=1}^{r} k_i \tag{2-29}$$

由（2-22）式可知，将平均基数中的 k_i 用 k_i*取代后，即得基数$|Nv_r|$的下界公式

$$|Nv_r| > n\prod_{i=1}^{r} k_i\ * \tag{2-30}$$

将（2-10）和（2-21）式代入（2-30）式得

$$|Nv_r| > n\prod_{i=1}^{r}\{(n-p_i)/n\}k_i \tag{2-31}$$

3.大偶数问题

设 a 为充分大的任意偶数，将不超过 a 的全部正整数组成的集合用 E 表示。

$$E = \{1, 2, \ldots, a\}$$

其基数$|E| = a$

将不超过 $a^{1/2}$ 的全部素数组成的集合用 P 表示，且将 P 中元素按数值大小顺序排列

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$$

其中，最小的素数 $p_1 = 2$

最大的素数 $p_r \leq a^{1/2}$ (3-1)

a 为偶数，必可用下式表示

$$a = 2n \qquad (n\text{ 为正整数}) \tag{3-2}$$

将不超过 n 的全部正整数组成的集合用 N 表示

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

其基数 $|N| = n$

以集合 P 中各元素为模数，求得同余式组为

$$n \equiv n_i \pmod{p_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3-3}$$