研究生用书

BASICS OF CONTROL SYSTEMS CAD ALGORITHM

华中理工大学出版社

罗宗虔　编著

控制系统CAD常用算法基础

土

控制系统CAD
常用算法基础

罗宗虔　编著

华中理工大学出版社

·研究生用书·

控制系统CAD常用算法基础

罗宗虔　　编著

责任编辑　殷伯明

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：8.75　插页：2　字数：213 000

1991年9月第1版　　1991年9月第1次印刷

印数：1—1 200

ISBN　7－5609－0579－X/TP·54

定价：2.56元

内 容 提 要

本书是华中理工大学研究生课程“多变量控制系统CAD”算法部分的教材。全书共八章，分别介绍线性代数方程组的数值解法、矩阵特征值问题的QR算法，矩阵奇异值分解及应用，矩阵指数及其算法，李雅普诺夫方程的应用和解法，黎卡提方程的解法，多项式矩阵的基本运算，控制系统的参数最优化方法等。

本书可作为自动控制、工业自动化和相关专业研究生和大学高年级本科生的教材或参考书，也可供有关教师和工程技术人员参考。

ABSTRACT

This book is primarily written for the graduate course "Computer Aided Design of Multivariable Control Systems" in Huazhong University of Science and Technology. In eight chapters of the book, the basic theory and algorithms of numerical methods of linear algebra equations, QR algorithm of matrix eigenvalue, matrix Singular Value Decomposition and application, matrix exponential and its computation, solution and application of Lyapunov equation, solution of Riccati equation, basic algorithms of polynomial matrices, and parameter optimization methods of control systems are introduced in detail.

The book can serve as textbook or reference for graduate student or senior undergraduate whose major is Automatic Control, Industrial Automation, and/or other relevant fields. It can also be consulted by relevant teachers and engineers.

"研究生用书"总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节，是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来，组织了一批学术水平较高、教学经验丰富的教师，先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行，更多的则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践，不断修改、补充、完善，已达到出书的要求。因此，我校决定出版"研究生用书"，以满足本校各专业研究生教学需要，并与校外单位交流，征求有关专家学者和读者的意见，以促进我校研究生教材建设工作，提高教学质量。

"研究生用书"以公共课和若干门学位课教材为主，还有教学参考书和学术专著，涉及的面较广，数量较多，准备在今后数年内分批出版。编写"研究生用书"总的要求是从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精，每本教材均应包括本门课程的基本内容，使学生能掌握必需的基础理论和专门知识；学位课教材还应接触该学科的发展前沿，反映国内外的最新研究成果，以适应目

前科学技术知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简练，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具备科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陈 珽

前　言

自动控制理论和控制系统的计算机辅助分析和设计，涉及许多数学基础知识和算法。但是，目前还缺乏集中介绍控制系统计算机辅助设计常用算法的书籍，给教学带来不便。近几年来，我们在为研究生开设的“多变量控制系统CAD”课程的教学过程中，从有关书籍里精选了一部分与控制理论、控制系统分析和设计有关的常用算法进行了教学。教学实践表明，所选内容符合工业自动化专业的特点和需要，便于实际应用，也具有一定的理论深度。

为了便于今后的教学，在多次教学实践的基础上编写了本书供读者参考。

本书共分八章。第一章为线性代数方程组的数值解法，主要介绍常用的直接法和迭代法以及与计算精度有关的问题。第二章详细介绍计算矩阵特征值的一种实用而有效的QR 算法。第三章介绍矩阵的奇异值分解及其应用。第四章主要介绍矩阵指数的解析算法和直接级数求和法。第五章第六章介绍李雅普诺夫方程和黎卡提方程的解法。第七章用较大的篇幅介绍多项式矩阵的基本运算，这是为适应学习多变量控制系统现代频域法的需要。第八章主要介绍单变量函数和多变量函数的参数最优化方法。

由于编者水平有限，错误之处敬请读者批评指正。

编　者

1991年1月

作者简介

罗宗虔，1957年毕业于华中工学院工业企业电气化专业，现为华中理工大学自动控制工程系副教授、硕士生导师；任第二届中国计算机用户协会仿真协会理事，中南地区分会副理事长，中国系统仿真学会教育与科普工作委员会委员；长期从事控制系统数字仿真与计算机辅助设计的教学和科研工作，发表论文多篇。与他人合作编写并出版了《控制系统的数字仿真与计算机辅助设计》和《线性多变量系统》教材。

目　录

第一章　线性代数方程组的数值解法

§1.1　概　　述

在控制系统的计算机辅助设计计算中，经常要求解线性代数方程组。本章将介绍一些目前在计算机上经常使用的、简单有效的方法。

线性代数方程组的数值解法通常分为直接法和迭代法两大类。所谓直接法，就是经有限次数的运算即可求得(如果没有舍入误差)方程组精确解的方法。所谓迭代法，就是将求解方程组的问题化为构造一个无限序列，其极限就是方程组的解，因而在有限步内是得不到精确解的。直接法与迭代法各有优缺点。前者由于受到计算机存贮容量的限制，一般来说仅适用于系数矩阵阶数不太高的问题，其工作量较小，精确度较高，但程序较复杂；后者主要用于高阶问题，一般来说，其程序较为简单，但工作量有时较大。实际计算时，应根据问题的特点和计算精度要求，以及使用的计算机允许的存贮空间等情况来选用适当的算法。

线性代数方程组的数值解法很多，本章仅着重介绍直接法中的三角形方程组的解法、高斯消去法、LU分解法以及迭代法中的雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法和松弛迭代法。此外，还介绍与精度有关的矩阵范数、条件数和病态等问题。

§1.2　解线性代数方程组的直接法

一、三角形方程组的解法

一个 n 阶线性代数方程组可以表示为

$$\widetilde{A}x=\widetilde{b} \tag{1.2.1}$$

其中$\widetilde{A}=[\widetilde{a}_{ij}]$是$n\times n$系数矩阵；$\widetilde{b}=[\widetilde{b}_i]$为方程组右端的$n$维向量(或称自由项)；$x=[x_i]$为待求的$n$维向量。

现在计算机上常用的直接解法大多数是以系数矩阵的三角形化为基础，即先对方程组进行变换，使其化为等价的（具有相同解答的）三角形方程组。

设有两种三角形方程组

$$Lx=b \tag{1.2.2}$$

$$Ux=d \tag{1.2.3}$$

其中$L=[l_{ij}]$且$l_{ij}=0$ $(i<j)$，为下三角形矩阵，称(1.2.2)式为下三角形方程组；$u=[u_{ij}]$且$u_{ij}=0$ $(i>j)$，为上三角形矩阵，称(1. 2. 3)式为上三角形方程组。

三角形方程组的解法很简单。对于下三角形方程组，可由第一个方程开始逐一向前推进计算；对于上三角形方程组，可由第n个方程开始，向后逐一回代计算。其计算公式可以归结如下：

对于下三角形方程组

$$\begin{cases} x_1=b_1/l_{11} \\ x_i=(b_i-l_{i1}x_1-l_{i2}x_2-\cdots-l_{i,i-1}x_{i-1})/l_{ii} \end{cases} \tag{1.2.4}$$

式中，$i=2, 3, \cdots, n$。

对于上三角形方程组

$$\begin{cases} x_n=d_n/u_{n,n} \\ x_i=(d_i-u_{i,i+1}x_{i+1}-u_{i,i+2}x_{i+2}-\cdots-u_{i,n}x_n)/u_{i,i} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

式中，$i=n-1, n-2, \cdots, 1$。

二、高斯消去法

消去法的主要思想是：利用矩阵的初等变换，把（1.2.1)式的系数矩阵化为上三角形，对角线元素全部化为1，然后用回代法求出全部x。即对于(1.2.1)式的增广矩阵

$$A = [a_{kj}] = [\widetilde{A} \vdots \widetilde{b}] \tag{1.2.6}$$

$$k = 1, 2, \cdots, n, \qquad j = 1, 2, \cdots, n+1$$

进行矩阵初等变换得

$$[\widetilde{A} \vdots \widetilde{b}] = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \times & \cdots & \times & \\ & 1 & & \vdots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \times & \boldsymbol{b} \\ & & & 1 & \end{array}\right)$$

计算公式如下：

消去：

（1）归一化：把对角元素化为1

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \tag{1.2.7}$$

$$k = 1, 2, \cdots, n, \qquad j = k+1, k+2, \cdots, n+1$$

（2）消元：把对角线以下的元化为零，其余元素为

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} \tag{1.2.8}$$

$$i = k+1, k+2, \cdots, n, \quad j = k+1, k+2, \cdots, n+1$$

回代：

$$x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \tag{1.2.9}$$

$$k = n, n-1, \cdots, 1$$

三、主元消去法

按前述的方法，未知量的消去是顺序进行的。在消去过程中如果出现 $a_{kk}^{(k)}$ 为零的情况，由(1. 2. 7)式可知，尽管系数矩阵的行列式$\det\widetilde{A} \neq 0$，消去过程也无法进行下去。此外，$a_{kk}^{(k)}$ 不为零但很小时，舍入误差及有效位丢失等原因使其本身有较大的相对误差。因此，用有大误差的小数作除数，会导致其它元素数量级的严重增长和舍入误差扩散，使得最终结果极不准确。

例如

$$\begin{pmatrix} 0.0001 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

其真解舍入到小数后五位之值为 $x_1=1.00010$， $x_2=0.99990$。今后我们约定把用作除数的元素 $a_{ii}^{(i)}$ 称为主元。如用上述消去法，第一步以0.0001为主元，求得的 $x_2=1.00$，回代求得 $x_1=0.00$。显然，解答是不正确的，其原因是第一步的主元太小。如果用第二方程 x_1 的系数1.00作主元，则得到的解答为 $x_1=1.00$，$x_2=1.00$。显然，这是真解的三位正确舍入值。

因此，为了避免把绝对值小的元素作为主元，必须在消去过程中采用选主元的方法，把最大的元素选作主元。

选主元的方法有多种，其中最常用和最有效的方法是全主元消去法和列主元消去法。

（1）全主元消去法。全主元消去法是在每步消去之前（例如第 k 步），先从剩下的系数矩阵中选主元，即在第 k 行到 n 行和第 k 列到 n 列中找按模为最大值的元素作为主元，然后在增广矩阵中进行行列交换，把该元素移到第 k 列的对角线上，且记下交换的顺序，再按消去法运算，最后恢复原来的顺序。这种方法精度高，但程序较复杂，耗费机时较多。

（2）列主元消去法。列主元消去法是在每步消去之前(例如第 k 步)，先取第 k 列的第 k，$k+1$，…，n 行中按模为最大值的元素作为主元，然后在增广矩阵中进行行交换，把该元素移到对角线上，再按消去法运算。这种方法程序比较简单，而且具有足够精度，因此得到广泛应用。

例1.1 求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}$$

解 建立增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

第一步：第一列中最大的元素为 $a_{11}=10$，以此作主元进行消去得

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right)$$

第二步，在第二列的 a_{22}，a_{32} 中选主元，因为 $a_{32}>a_{22}$，所以进行行交换得

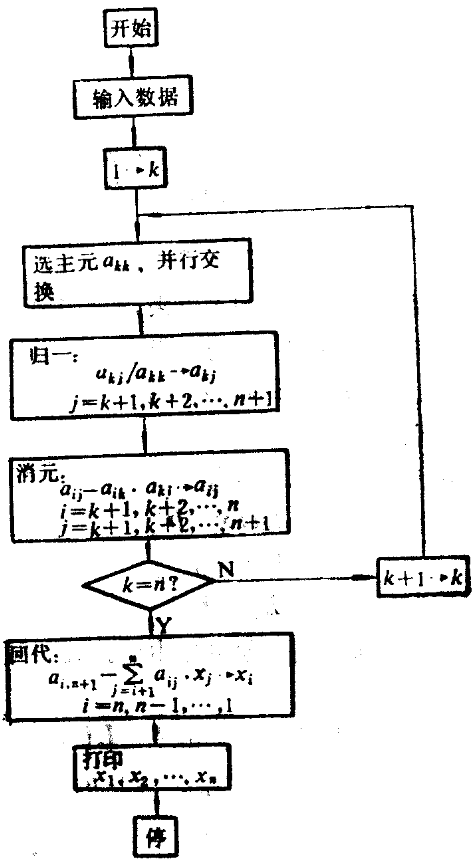

图1.2.1　列主元消去法程序框图

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array}\right)$$

消去得

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6.002 & 6.002 \end{array}\right)$$

回代得 $x_3=1$，$x_2=-1$，$x_1=0$，与精确解相符。

列主元消去法程序框图如图1．2．1所示。

四、LU分解法

〔**定理1.2.1**〕 若n阶方阵A的逐次左上角主子式$\det A_k\neq 0$，$k=1, 2, \cdots, n-1$，则必可将其分解为下三角矩阵L与上三角矩阵U的乘积：

$$A=LU \tag{1.2.10}$$

若把高斯消去法消去过程记录下来，相当于把系数矩阵A分解为下三角矩阵L与上三角矩阵U的乘积。

因此，对于线性方程组$Ax=b$，根据定理1.2.1总可把A分解为L与U的乘积。

令 $A=LU$代入线性方程组便有

$$LUx=b \tag{1.2.11}$$

令

$$Ux=y \tag{1.2.12}$$

则

$$Ly=b \tag{1.2.13}$$

因此，当L、U求出后，便可先由(1．2．13)式求出y，然后由(1．2．12)求出x。

下面先导出求L，U的公式。由$A=LU$，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$