许国志 马仲蕃 著

OR

·运筹学小丛书·

整数规划初步

·运筹学小丛书·

整数规划初步

许国志　马仲蕃 著

辽宁教育出版社
1990年·沈阳

整数规划初步

许国志　马仲蕃　著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街C段1里2号）　阜新蒙古族自治县民族印刷厂印刷

字数：80,000　开本：787×1092 1/32　印张：3 7/8

印数：2,101—4,100

1985年8月第1版　1990年10月第2次印刷

责任编辑：俞晓群　封面设计：宋丹心

ISBN7—5382—1321—X/G·1027　定价：1.66元

前　　言

整数规划是一类要求变量取整数值的数学规划。要求变量取整数的线性规划，称为线性整数规划。变量只取0或1的规划问题称为0，1规划。只要求部分变量取整数值的规划问题，称为混合整数规划。由于实际中有许多量必须是整数，如人数、机器数、元件数等；又由于利用0，1变量可以数量化地描述开与关、取与弃、有与无等逻辑现象，所以，在很多领域中，如线路设计、工厂选址、人员安排、课程安排、代码选取等，常常出现整数规划问题。1959年，R. 柯莫瑞（Gomory，R. E.）提出了解线性整数规划的割平面方法后，整数规划就逐步形成为一个独立的分支。如果我们从数学上说，线性规划是主要研究线性不等式组的解，那末，线性整数规划是研究线性不等式组的整数解。

本书是一个提纲性质的通俗读物，粗略地介绍了整数规划的各种基本算法和基本理论结果，略去了数学上的严格论证。

§1中列举了整数规划的一些基本模型。目的是启发读者如何利用0，1变量去描述各式各样的实际问题。§2中扼要地回顾了线性规划的基本内容，它是整数规划的基础。§3中概述了整数规划解法的基本思路，实际上，可以作为整数规划的序言。对只想简单地了解一下整数规划的读者，可直接看这一部分。§4中详细介绍了分枝估界法，这是整数规划的一种基本解法，目前在解决实际问题时，大都应用此法。§5—

§9中，介绍了各类(Gomory)割平面算法，这是整数规划的主要方法，从理论上说，它是整数规划的核心部分。§10、§11、§12中，介绍了混合整数规划的分解算法、拉格朗日松弛法、交叉分解算法。分解算法和拉格朗日松弛法是互为对偶的方法。它们相互结合后，形成了交叉分解算法。这些算法的技巧性都比较高，且已得到了广泛的应用，是整数规划中很重要的部分。作为例子，在§12的末尾，我们介绍了用交叉算法求解选址问题。这是一类应用得较成功的实际问题，§13、§14中，介绍了三类典型的整数规划问题：背包问题、集合分解和集合覆盖问题。这也是最基本的整数规划问题，具有比较有效的特殊算法。介于线性规划与整数规划之间的网络规划和组合最优化问题，由于涉及的面较广，需要的预备知识较多，不在这本书中介绍了。

本书假定读者熟悉线性规划。书中所用的数学符号都是一般的线性代数中常用的符号。

目　录

§1 例　子

（1）背包问题

一个背包的容积为V，现有n种物品可装，物品j的重量为w_j，体积为v_j（$j=1, 2, \cdots, n$）．问如何配装，使得既不超过背包的容积，且使装的总重量最大。

设变量

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{物品 } j \text{ 被装入背包}\\ 0, & \text{物品 } j \text{ 不装入背包}\end{cases}$$

则问题可写成如下的数学规划的形式：

求　$\max\sum_{j=1}^{n} w_j x_j$

满足：

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leqslant v$$

x_j 取 0 或 1　（$j=1, 2, \cdots, n$）。

（2）工厂选址问题

有 n 个城市：$\{1, 2, \cdots, n\}$，每日需要某种物资的数量，分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$。现在计划要在其中选取m个城市，建造m座生产这种物资的工厂。假设已知，若在城市j建厂，日产量最多只能为 s_j，而生产投资为 F_j。设从城市 i 到城市 j 的单位运价为 c_{ij}。问m个工厂该设在何处，使得既能满足需要，又使总投资最省。

设变量

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{若在城市 } i \text{ 中建厂}\\ 0, & \text{若城市 } i \text{ 不建厂}\end{cases}$$

设 x_{ij} 为从城市 i 运给城市 j 的物资数量．则问题可写成如下的规划形式：

$$\text{求}\ \min\left\{\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}+\sum_i F_iy_i\right\}$$

满足：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant s_iy_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\geqslant d_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i=m$$

y_i 取 0 或 1，$x_{ij}\geqslant 0$ $(i,\ j,=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

（3）加工问题

有 m 台同一类型的机床，有 n 种零件要在这类机床上进行加工．设各种零件所需的加工时间分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 问如何分配，使各机床的总加工任务相等，或者说，尽可能的均衡．

设变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } a_j \text{ 分配在机床 } i \text{ 上加工}\\ 0, & \text{若 } a_j \text{ 不分配在机床 } i \text{ 上加工}\end{cases}$$

则问题可写成如下的形式：

$$\text{求}\quad \min\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} x_{1j}a_j,\ \sum_{j=1}^{n} x_{2j}a_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} x_{mj}a_j\right)\right\}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

x_{ij} 取 0 或 1

（4）课程表问题

考虑一星期的全校各班级课程表的统一安排问题。按每天上七节课计算，每周通常有42节课。假设全校有m个班级，n 位教师，s 个教室。一周内，假设教师 j 应给班级 i 上 c_{ij} 节课。由于设备上的原因，有些课只能在某些教室中上，假设已知如下的参数 o_{ijk}：

$$o_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{若教师 } j \text{ 能在教室 } k \text{ 为班级 } i \text{ 上课}\\ 0, & \text{相反}\end{cases}$$

假设各教师已对上课时间提出了要求，让：

$$d_{jt}=\begin{cases}1, & \text{若教师 } j \text{ 愿意将他的课排在第 } t \text{ 节}\\ 0, & \text{相反}\end{cases}$$

定义0,1变量 x_{ijkt} 如下：

$$x_{ijkt}=\begin{cases}1, & \text{若安排教师 } j \text{ 在第 } t \text{ 节去教室} k \text{ 为 } i \text{ 班上课}\\ 0, & \text{相反}\end{cases}$$

则问题可写成求解如下的线性不等式组：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} x_{ijkt} \leqslant d_{jt} \qquad (j=1,2,\cdots,n,t=1,2,\cdots,42)$$

（教师 j 在第t 节，最多只能到一个教室为一个班级上课），

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} x_{ijkt} \leqslant 1 \qquad (i=1,2,\cdots,m,t=1,2,\cdots,42)$$

（班级 i 在第 t 节课时，最多只能到一个教室去听一位教

师讲课），

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ijkt}\leqslant 1\qquad (k=1,2,\cdots,s,t=1,2,\cdots,42)$$

（教室 k 在第 t 节课时，最多只能有一位教师和一个班级去上课），

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{t=1}^{42}x_{ijkt}\leqslant c_{ij}\ o_{ijk}\\ \sum_{k=1}^{s}\sum_{t=1}^{42}x_{ijkt}=c_{ij}\end{array}\right\}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

（满足各班级的课程和教室的要求）。

所有的 x_{ijkt} 取 0 或 1。

（5）系统可靠性问题

n 个元件的一个并联（或串联）系统，设第 i 个位置所用的元件可从集合 s_i 中挑选。对 $j\in s_i$，设 c_{ij} 为元件 j 用在第 i 个位置上所花的费用，而 p_{ij} 表示其可靠性概率。问该如何选择各位置的元件，使得系统的可靠性概率 $\geqslant\alpha$，且使总的费用最省。

设

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } j\in s_i,\text{且元件}j\text{用在位置 } i \text{ 上}\\ 0, & \text{若 } j\in s_i,\text{而元件 } j \text{ 不用在位置 } i \text{ 上}\end{cases}$$

则对并联系统的可靠性概率为

$$R=1-\prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j\in s_i}(1-p_{ij})^{x_{ij}}\right]$$

条件 $R\geqslant\alpha$ 可写为：

$$1-\alpha \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j\in s_i}(1-p_{ij})^{x_{ij}}\right]$$

即 $$\log(1-\alpha) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in s_i} x_{ij} \log(1-p_{ij})$$

设 $a_{ij}=\log(1-p_{ij})$，$k=\log(1-\alpha)$，

则问题（并联情形）可写成如下形式：

求 $$\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in s_i} c_{ij} x_{ij}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in s_i} a_{ij} x_{ij} \leqslant k$$

$$\sum_{j\in s_i} x_{ij}=1 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

所有的 x_{ij} 取 0 或 1．

（对串联情形，其中的 $a_{ij}=-\log p_{ij}$，$k=-\log\alpha$）．

（6）连线问题

在电路设计中，有时会遇到要把插件板中某些接点串连成一条线的问题．例如有 n 个接点 A_1，A_2，…，A_n，已知连接 A_i 到 A_j 的线段$\overline{A_iA_j}$ 的长度为 d_{ij}，现在要把这 n 个接点用 $n-1$ 条线段串连成一条线，问该采取怎样的串连顺序，使连线总长最短？

对任意两点 A_i，A_j，引进0，1变量 x_{ij}，若所求的串连顺序中，点 A_i 紧接着连到点 A_j，即含有线段 $\overline{A_iA_j}$，则取 $x_{ij}=1$，相反，$x_{ij}=0$．则上述连线问题可写成如下的形式：

求 $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$ **（连线总长最短）**

满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

（紧接 A_i 后面，最多连到一个点）

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

（紧接 A_j 的前面，最多连接一个点）

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n-1 \qquad (\text{共连 } n-1 \text{ 条线段})$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n-1 \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$$

（这组条件是保证了连线不成圈）.

所有的 x_{ij} 取 0 或 1，u_j 取任何实数.

（7）离散值的变量

设变量 x_j 只能取 k 个数值：$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 中的一个. 则 x_j 可表示为：

$$x_j = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i, \ \sum_{i=1}^{k} y_i = 1, \ y_i \text{ 取 0 或 1}$$

（8）跳跃变量

设变量 x_j 的值，或者为零，或者满足：

$$L \leqslant x_j \leqslant u$$

则可用下述条件表示：

$$x_j \geqslant Ly, \ x_j \leqslant uy, \ y \text{ 取 0 或 1}$$

§2 线性规划

（1）线性规划问题的标准形式

从数学上说，线性规划问题的标准形式为：

$$\text{求}\quad \max\ x_0=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (\mathrm{I})$$

满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j=b_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (\mathrm{II})$$

$$x_j\geqslant 0,\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (\mathrm{III})$$

其中 c_j，a_{ij}，b_i 都是已知量，x_j 是未知量. （Ⅰ）称为**目标函数**，（Ⅱ）和（Ⅲ）称为**约束条件**，满足方程组（Ⅱ）的解 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，若同时又满足非负的条件（Ⅲ），则称其为**可行解**，使目标函数值达到最大的可行解，称为**最优解**.

利用矩阵和向量的符号，记：

$c=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$——为 n 维行向量

$b=\langle b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\rangle$——为 m 维列向量

$x=\langle x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\rangle$——为 n 维列向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\text{——为 } m \text{ 行 } n \text{ 列矩阵}$$

$$A_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$P_j=\langle a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{mj}\rangle,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则问题也可缩写成如下形式：

求 $\max\quad x_0=cx$

满足 $A_ix=b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

$\qquad x\geqslant 0$

或者写成：

求 $\max\quad x_0=cx$

满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_jP_j=b$

$\qquad x_j\geqslant 0\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

或者写成：

求 $\max\{cx\mid Ax=b,\ x\geqslant 0\}$

若所给问题的目标函数是求 $\min\ cx$，则可化为求：$-\{\max(-cx)\}$。

若所给问题的约束条件中，含有不等式：

$A_ix\leqslant b_i$， 或者 $A_ix\geqslant b_i$

则可等价地化为：

$$A_ix+x_{n+i}=b_i,\quad x_{n+i}\geqslant 0$$

或者

$$A_ix-x_{n+i}=b_i,\quad x_{n+i}\geqslant 0$$

称新增加的变量 x_{n+i} 为**松弛变量**。

设线性规划问题的系数矩阵A的秩为m。称A的任一m行m列的非奇异子矩阵$B(|B|\neq 0)$为线性规划问题的一个**基**。变量 x_j，若所对应的列 P_j 包含在基B的列中，则称其

为B的基变量，否则，称 x_j 为B的非基变量。

对A的任意的基B，记它的非基变量为t_1，t_2，…，t_d，$d=n-m$. 以非基变量为参数，从方程组$Ax=b$中，用高斯消去法，解出基变量后，可将问题化成如下的参数形式：

求 $\max\ x_0$

满足 $$x_0=\alpha_{00}+\sum_{j=1}^{d}\alpha_{0j}(-t_j)$$

$$x_1=\alpha_{10}+\sum_{j=1}^{d}\alpha_{1j}\ (-t_j)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n=\alpha_{n0}+\sum_{j=1}^{d}\alpha_{nj}\ (-t_j)$$

$$x_i\geqslant 0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

当某个 x_i 是非基变量时，对应的方程式实际上是恒等式：

$$x_i=0+(-1)(-x_i)$$

现在，我们记列向量

$$\overline{x}=\langle x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\rangle$$

$$\alpha_j=\langle\alpha_{0j},\ \alpha_{1j},\ \alpha_{2j}\ \cdots,\ \alpha_{nj}\rangle\qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ d)$$

那末，问题又可缩写成如下的形式：

求 $\max\ x_0$

满足 $$\overline{x}=\alpha_0+\sum_{j=1}^{d}\alpha_j(-t_j)$$

$$x_i\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

例 1

求 $\max\ x_0=2x_1+x_2$

满足　$x_1+x_2\leqslant 5$

$x_1-x_2\geqslant 0$

$6x_1+2x_2\leqslant 21$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

增加松弛变量后，化为如下的标准形式：

求　$\max\ x_0=2x_1+x_2$

满足　
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3\qquad &=5\\ x_1-x_2\quad -x_4\quad &=0\\ 6x_1+2x_2\qquad +x_5&=21\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5&\geqslant 0\end{aligned}$$

若以 x_1，x_2，x_3 为基变量，x_4，x_5 为非基变量，则可化成如下的参数形式：

$$\begin{array}{l|l} \text{求} & \max\ x_0=\frac{63}{8}+\frac{1}{4}(-x_4)+\frac{3}{8}(-x_5)\\ \text{满足} & x_1=\frac{21}{8}-\frac{1}{4}(-x_4)+\frac{1}{8}(-x_5) \end{array}$$

$$x_2=\frac{21}{8}+\frac{3}{4}(-x_4)+\frac{1}{8}(-x_5)$$

$$x_3=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(-x_4)-\frac{1}{4}(-x_5)$$

$$x_4=0\quad-(-x_4)$$

$$x_5=0\qquad\qquad-(-x_5)$$

若以 x_1，x_2，x_4 为基变量，x_3，x_5 为非基变量，则只须从 x_3 的表达式中，解出 x_4，代入各式后，便可得如下的参数表达式：

求　$\max\ x_0=\frac{31}{4}+\frac{1}{2}(-x_3)+\frac{1}{4}(-x_5)$

满足 $x_1=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}(-x_3)+\frac{1}{4}(-x_5)$

$$x_2=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}(-x_3)-\frac{1}{4}(-x_5)$$

$$x_3=0-(-x_3)$$

$$x_4=\frac{1}{2}-2(-x_3)+\frac{1}{2}(-x_5)$$

$$x_5=0 \qquad -(-x_5)$$

（2）线性规划问题的基本性质

假设问题已化成参数形式：

求 $\max\ x_0$

满足 $\overline{x}=\alpha_0+\sum_{j=1}^{d}\alpha_j(-t_j)$

性质(i) 若 $\alpha_{i0}\geqslant 0$ $(i=1, 2,\cdots,n)$．则$\overline{x}=\alpha_0$便是线性规划问题的一个可行解．

性质(ii) 若 $\alpha_{0j}\geqslant 0$ $(j=1, 2,\cdots,d)$，则对任何的可行解$\overline{x}=\langle x_0, x_1, \cdots, x_n\rangle$，都满足

$$x_0\leqslant\alpha_{00}$$

即此时的 α_{00} 是目标函数值的一个上界．

性质(iii) 若 $\alpha_{i0}\geqslant 0$，$\alpha_{0j}\geqslant 0(i=1, 2, \cdots,n;j=1,2,\cdots, d)$则$\overline{x}=\alpha_0$ 是线性规划问题的一个最优解．

性质(iv) 若有某 s，使得$\alpha_{0s}<0,\alpha_s\leqslant 0$，则线性规划问题无最大值．

性质(v) 若有某 r，使得 $\alpha_{r0}<0$，而$\alpha_{rj}\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots, d)$，则线性规划问题无可行解．