现代数学基础丛书

带有时滞的动力系统的运动稳定性

（第二版）

秦元勋 刘永清 王 联 郑祖庥 著

科学出版社

0306639

现代数学基础丛书

带有时滞的动力系统的运动稳定性

(第二版)

秦元勋 刘永清
王 联 郑祖庥 著

科学出版社
1989

内 容 简 介

动力系统的自动控制，一般都有时间滞后的因素。本书系统地阐述了在什么条件下可容许忽略这一因素，当时滞影响时，工程上要求任何时滞系统都要稳定，本书对这种全时滞情形也给出了处理方法。

本书在第一版的基础上，增补了基本理论和近代的发展，在处理问题的方法上，仍以常微分方程理论中许多经典的思想方法为出发点，并尽量避免单纯地在抽象空间中进行定义和概念化的逻辑推理过程，这便于初学者不论从几何的直观上，还是从分析的技巧上都能更好地接受本书的内容。

本书可供理工科院校的学生、研究生、教师和有关的科学工作者参考。

现代数学基础丛书

带有时滞的动力系统的

运动稳定性

（第二版）

秦元勋　刘永清　王　联　郑祖庥　著

责任编辑　吕　虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

中国科学院育材印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1983年1月第　一　版　　开本：850×1168　1/32

1989年10月第　二　版　　印张：11 1/2

1989年10月第二次印刷　　字数：300,000

印数：2906—4,026

ISBN 7-03-000986—X/O·237

定价：12.90元

第二版序言

自 1963 年本书(第一版)出版以来,二十年过去了. 由于一切控制系统的反馈作用均含有时滞,因此,这一领域受到国内外研究工作者的重视,从而研究工作得到不断发展.

至今国内在该领域的书只此一本,许多读者希望此书能再版,并将若干新的材料加进去,使之反映当前的成就. 另一方面,不少的研究生和初接触这一领域的同志希望能将预备知识补充进去,以便迅速地掌握它,从而可以开始工作. 这就促使我们进行改版工作.

此次改版,除保留原版中的基本内容外,还增加了大量的新成果.

1.六十年代这方面的工作属于开创性的,基本知识还有待充实与发展,现在则可进行系统的阐述,故本版将这部分内容扩写成第一、二、三、四章.

2.对于 $n=1$ 的情形,六十年代只得到若干充分条件,现在则对全部参数域进行了分析,得到充要条件. 对 $n=2$ 的全时滞稳定性的充要条件已整理出显式的代数判据,以方便设计工作者.

3.原书周期系数一节现扩充成一章.

4.增加大系统理论部分,并对算法作了详尽的分析,以供设计工作者使用.

5.增加一章,即关于普遍意义下的泛函微分方程,以便理论工作者作更好的概括.

在改版工作中郑祖庥同志作了大量的增补和整稿工作,刘永清同志加写了大系统方面的两章,王联同志增补了周期系数系统的一章,使这一集体劳动成果得以完成. 本书的重点仍为论述国内的成果,

希望本书能对应用工作者有所帮助，能对理论工作者提出一些研究课题；并欢迎读者批评指正。

秦元勋

1984年于北京

[redacted]

目　录

第一章　绪　论

§1．常微分方程与时滞微分方程

在大量的自然与社会现象中有一类确定性的运动规律，它们可以用含有一个自变量的未知函数及其微分或微商的方程来描述，这类方程即为常微分方程．在很多场合，这个自变量表示时间．例如

弹簧的振动规律可表示为

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0.$$

行星运动中二体问题的运动规律表示为

$$m\ddot{x}(t)=-KmM\frac{x(t)}{(x^2(t)+y^2(t))^{3/2}},$$

$$M\ddot{y}(t)=-KmM\frac{y(t)}{(x^2(t)+y^2(t))^{3/2}}.$$

在军事运筹学中出现的描述两军对战互相消灭的兰斯特方程

$$\dot{m}_1(t)=-\lambda_2\mu_2 m_2(t),\quad \dot{m}_2(t)=-\lambda_1\mu_1 m_1(t).$$

在经济发展中出现在描述国民总收入分为积累基金G和消费基金P的秦元勋方程

$$\dot{P}(t)=\lambda_1 G(P-P_0)+\lambda_2 G-\lambda_3 P,$$
$$\dot{G}(t)=\lambda_3 P-\lambda_2 G.$$

诸如此类的现象都可以统一地用微分方程组

$$\dot{x}_i=f_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)),\qquad (1.1)$$
$$i=1,2,\cdots\cdots,n,$$

及其初始条件

$$x_i(0)=x_i^0,\ i=1,2,\cdots,n \qquad (1.2)$$

来描述．这里要强调一下，方程(1.1)的左右两边都只是同一时间

t 的函数．也就是说我们假定事物的发展趋势（(1.1) 的左边）只由其当前的状态（(1.1)的右边的 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$）来决定，而不明显地依赖于其过去的状态．例如在二体问题中，当前两个星球间的吸引力 $(m\ddot{x}(t), m\ddot{y}(t))$ 只与当前两个星球间的位置 $(x(t), y(t))$ 有关，而与两星球的过去的位置无关．可以简单地说，这些现象都是瞬时起作用的．在这种假设下的数学模型，对大量事物的运动规律的描述是合适的．

然而，在研究自然和社会现象中，客观事物的运动规律是复杂的和多样的．一般地说，在动力系统中总是不可避免地存在滞后现象．亦即事物的发展趋势不仅依赖于当前的状态，而且还依赖于事物过去的历史．为了阐明我们行将研究的这类现象，下面给出一系列例子以表达问题的应用背景．

例1．如图 1.1 所示，弹簧之一端固定，另一端系一质量为 m 的物体．理想化以后的简谐振动方程为

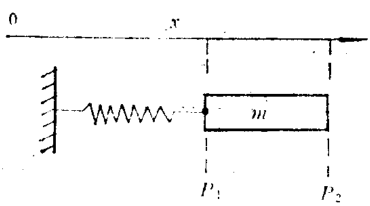

图1.1

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0. \quad (1.3)$$

在(1.3)中假定略去弹簧质量，摩擦力，空气阻力以及弹簧内部的能量消耗．此外，还必须视物体 m 为一质点．式中 $\omega^2=\kappa/m$，κ 为弹簧的弹性系数．现在设 m 不是质点，它具有长度 P_2-P_1．那末当弹簧力在某一瞬间 t 作用于物体时并不使物体立即移动．因为应力波从 P_1 到 P_2 通常以声速传播，到达界面 P_2 后再反射回来，若干次的来回反射才能使物体各点的加速度比较均匀．此时物体才真正开始移动．若记从时刻 t 到物体开始移动的时间间隔为 τ，则(1.2)应修正为

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t-\tau)=0. \quad (1.4)$$

这就在系统中引入了滞量 τ．以后可以看到(1.4)的解与(1.3)的解的性态是迥然不同的．

例2．设有两种动物．一为捕食者，另一为被捕食者．在指定的区域内其个体总数分别记为 $y(t)$ 与 $x(t)$．这种长久敌对组合

的 Volterra 方程为

$$\dot{x}(t)=a_1[1-x(t)/P]x(t)-b_1y(t)x(t),$$
$$\dot{y}(t)=-a_2y(t)+b_2x(t)y(t), \tag{1.5}$$

其中 P 为 $x(t)$ 之最大可能数目．实际上捕食者的生殖周期是比较长的，设其为 τ，则(1.5)应为

$$\dot{x}(t)=a_1[1-x(t)/P]x(t)-b_1y(t)x(t),$$
$$\dot{y}(t)=-a_2y(t)+b_2x(t-\tau)y(t-\tau). \tag{1.6}$$

例3．考虑麻疹传播的 Lonbon 与 Yorke 模型．以 $s(t)$ 表示在时刻 t 无免疫力的个体数目，γ 为这种个体在人口中所占的比例，$\beta(t)$ 为人口特征函数．医学统计表明，麻疹传染的潜伏期上，下限为 14—12 天，因而得到有滞量的微分方程[98]

$$\dot{s}(t)=\beta(t)s(t)[s(t-12)-s(t-14)-2\gamma]+\gamma, \tag{1.7}$$

这里有两个滞量 12 与 14．

又如两个星球或者两个带电粒子，它们之间的引力传递速度为光速，其运动规律的精确模型也不是上述的常微分方程组，而应为[78]

$$\ddot{x}(t)=f_1(x(t)-y(t-r_{21}(t)),\dot{x}(t),\dot{y}(t-r_{21}(t))),$$
$$\ddot{y}(t)=f_2(y(t)-x(t-r_{12}(t)),\dot{y}(t),\dot{x}(t-r_{12}(t))). \tag{1.8}$$

为了阐明所讨论的对象的广泛性，再列举一些有代表性的实例．

例4．在数理统计中，关于资本主义经济的周期性危机有过下述形式的方程[90]

$$\dot{u}(t)=au(t)+bu(t-\tau)+f(t). \tag{1.9}$$

例5．在近代核物理中用计数器测量质点源的强度，引出方程[122]

$$\dot{\pi}(t)=-a[\pi(t)-\pi(t-\tau)e^{-a\tau}]. \tag{1.10}$$

例6．在火箭燃烧的控制理论中，得到方程

$$\dot{u}(t)+(1-n)u(t)+nu(t-\tau)=0. \tag{1.11}$$

例7．在适当的假定之下，下述方程(1.12)可以作为：(1)放射性同位素和示踪蛋白在生物体内的分布问题[61]，(2)化学工程

中染色水通过若干管子循环时来自中央贮槽的染料混合问题[62]，（3）一类运输调度问题[65]等的数学模型

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{N}A_i x(t-\tau_i), \tag{1.12}$$

其中 x 为 n 维向量函数，以后简记为 $x\in R^n$． A_i 都是 $n\times n$ 阵．$\tau_i\geqslant 0$， $i=1,2,\cdots,N$，恒设 $\tau_0=0$．

例8．考察信息网络中的无损传输线路，导出如下的方程[66]

$$\dot{u}(t)-K\dot{u}\left(t-\frac{2}{s}\right)=f\left(u(t),u\left(t-\frac{2}{s}\right)\right). \tag{1.13}$$

例9．在弹性理论中，当考虑到"遗留效应"时导出了方程[114]

$$\ddot{x}(t)+a^2x(t)+\int_0^t K(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau=f(t). \tag{1.14}$$

例10．解释植物周期性变化的一个例子是：照射在向日葵上的太阳光改变角度时，向日葵的转动是有滞后的．转角 α 应满足方程[86,87]

$$\dot{\alpha}(t)=-K\int_1^{\infty}f(\tau)\sin\alpha(t-t_0-\tau)d\tau. \tag{1.15}$$

例11．设 n 为充分大的自然数，$Z(n)$ 为 n 近旁的素数密度．则有

$$Z'(n)=-Z(n)Z(n^{1/2})/2n. \tag{1.16}$$

例12．Красовский 讨论的一类最优控制系统所导出的方程[131]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=P(t)x(t)+B(t)u(t),\quad y(t)=Q(t)x(t),\\ \dot{u}(t)&=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]y(t+\theta)\\ &\quad+\int_{-r}^{0}[d_\theta\mu(t,\theta)]u(t+\theta),\end{aligned} \tag{1.17}$$

其中 P,B,Q 皆为已知函数，η,μ 为有界变差的．

从以上 12 个例子可以大致看到我们所要讨论的对象的广泛性．同时注意到这些例子的共同特点之一是：诸方程的右方不仅

依赖于未知函数(例如 $x(t)$),而且依赖于未知函数的过去的值(例如 $x(t-\tau)$, $\tau>0$). 亦即当前发展的趋势明显地依赖于过去历史的状况. 一言以蔽之,我们需要考虑时间滞后的现象——简称"时滞"现象. 此时,方程组(1.1)应换为差分微分方程组

$$\dot{x}_i(t)=f_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),x_1(t-\tau_{i1}),x_2(t-\tau_{i2})\cdots x_n(t-\tau_{in})),\ \tau_{ij}>0,\ i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1.18}$$

这里,一般说来 τ_{ij} 又可以是 t 的函数. 至于初始条件,也不再象(1.2)那样简单,这点后面还要论述.

当所有的 $\tau_{ij}=0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 时 (1.18) 是 (1.1) 型的常微分方程. 所以应当说在大多数场合应用常微分方程作为动力系统的模型只是一种近似,而且这种近似必然是有条件的. 只有符合一定条件的系统才可以略去滞量,否则将失去必需的精确度甚至导致错误的数学描述.

§2.若干基本概念

对于差分微分方程组(1.18), 今后将不加说明地沿用类似于常微分方程的一系列概念. 诸如线性与非线性,齐次与非齐次,定常与非定常以及方程的阶、次等概念.

在说到差分微分方程的阶、次、线性与非线性时,必须把未知函数的过去的值与当前的值平等看待. 例如 $x(t-\tau)$ 与 $x(t)$ 的次数或者它们的导数的阶应同等看待. 于是 (1.4) 是线性齐次的二阶方程. (1.6)是非线性二阶系统. (1.8)为4阶非线性系统 (f_1, f_2 是非线性的). (1.9) 是一阶非齐次线性系统 ($f(t)\neq0$). (1.10) 是一阶线性齐次系统,以及 (1.12) 是 N 阶线性齐次系统等等. 而方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)x(t-1)$$

便是非线性系统.

在说到定常系统时要特别小心. 例如一个滞量的方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)), \tag{2.1}$$

f 显含t，不言而喻是非定常系统．若 f 不显含 t，τ又是常数，自然是定常系统．问题是 f 不显含 t 而 $\tau(t)$ 又是 t 的连续函数的情形，(2.1)实质上是非定常的．例如我们有

定理1．对方程

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-\tau(t))),\tag{2.2}$$

设 $\tau(t)$ 不恒等于常数，且满足

(1) $\tau(t)>\delta>0$，$\dot{\tau}(t)$ 存在且成立：$\tau(t)-t\dot{\tau}(t)\neq 0$．

(2) $t=\tau(t)s$，可以解得 $t=\phi(s)$，$\phi(s)$ 严格单调上升，当 $s\to\infty$ 时 $\phi(s)\to+\infty$．

则(2.2)施行自变量代换$t=\phi(s)$以后可以化为显含s的方程．

证．由 $s=t/\tau(t)$，$ds/dt=(\tau(t)-t\dot{\tau}(t))/\tau^2(t)$，

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dx(\phi(s))}{ds}\left(\frac{\tau(\phi(s))-\phi(s)\dot{\tau}(\phi(s))}{\tau^2(\phi(s))}\right)$$

$$=f(x(\phi(s)),x(\phi(s-1))),$$

或者

$$\frac{dx(\phi(s))}{ds}=\frac{\tau^2(\phi(s))}{\tau(\phi(s))-\phi(s)\dot{\tau}(\phi(s))}f(x(\phi(s)),x(\phi(s-1))).$$

记 $x(\phi(s))=y(s)$，则上式化为

$$\frac{dy(s)}{ds}=\tilde{f}(s,y(s),y(s-1)).\tag{2.3}$$

我们看到，滞量化为常数，但方程化为显含 s 的非定常系统．

例1．设方程(2.2)定义在$t\geqslant 0$ 上．$\tau(t)=(1+t)/(2+t)>0$（当$t\geqslant 0$时），$\dot{\tau}(t)$存在且 $\tau(t)-t\dot{\tau}(t)=[(2+t)+t(1+t)]/(2+t)^2\neq 0$，$t=\phi(s)=\frac{1}{2}[(4+s^2)^{1/2}+s-2]$．$t=0\Longleftrightarrow s=0$ 且$\dot{\phi}(s)>0$，当 $s\to\infty$ 时 $\phi(s)\to\infty$．故定理1的所有条件满足．此时相应的方程(2.3)为

$$\frac{dy(s)}{ds}=\frac{2+s^2+s\sqrt{4+s^2}}{4+s^2+s\sqrt{4+s^2}}f(y(s),y(s-1)).\tag{2.4}$$

在(2.4)中 $y(s)=x(\phi(s))$．其右方显含自变量 s．

现在假定(2.1)中 τ 为常数. 显然当 $\tau=0$ 时它退化为常微分方程，而当(2.1)之左方不出现导数时为一差分方程

$$x(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)). \tag{2.5}$$

由此看出，我们称(2.1)为差分微分方程是很自然的，并且初值问题的提法也完全类似：对给定的初始时刻 t_0，在 $[t_0-\tau,t_0]$ 上给定一个连续函数 $\phi(t)$. 要求一个函数 $x(t)$，定义在 $[t_0-\tau,A)$ 上（A 可以是 $+\infty$），且在 $[t_0-\tau,t_0]$ 上等于 $\phi(t)$ 以及在 $[t_0,A)$ 上满足(2.1). 通常记为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0].\end{cases} \tag{2.6}$$

关于初值问题的详细说明将在下一章中给出.

对差分微分方程，我们可以按照它的特点给出一种分类法. 如同把偏微分方程划分为椭圆型，双曲型与抛物型一样，不仅有划分原则，而且可以指出各类的理论及其应用上的特点. 先看一个简单的例子.

例2. 对常系数线性方程

$$a\dot{x}(t)+b\dot{x}(t-1)+cx(t)+dx(t-1)=0, \tag{2.7}$$

这里滞量为1，我们按其系数的不同取值把它划分为如下几种情况.

（1）当 $a\neq0,b=0,d\neq0$ 时 (2.7) 称之为滞后型的. 其特点是："方程中未知函数的最高阶导数不出现滞量".

（2）当 $a\neq0,b\neq0$ 时(2.7)称为中立型的. 其特点是："方程中除了未知函数的最高阶导数以外还出现有滞量的最高阶导数".

（3）当 $a=0,b\neq0,c\neq0$ 时，可以作一变量代换 $t=t_1+1$，使(2.7)化为

$$b\dot{x}(t_1)+cx(t_1+1)+dx(t_1)=0. \tag{2.8}$$

(2.8)称为超前型的. 其特点是："出现未知函数或者低阶导数的变元大于最高阶导数变元的情形". 这时 t_1+1 叫做超前变元，1为"超前量".

此外，还有两种退化情形，即 $a=b=0$ 时(2.7)为一差分方程；

$b=d=0, a\neq 0$ 为一常微分方程．对比例 2 更为一般的方程

$$x^{(n)}(t)=f(t,x(t),\cdots,x^{(l_0)}(t),x(t-\tau),\cdots,x^{(l_1)}(t-\tau)),\tag{2.9}$$

其中 $l_0\leqslant n-1$，l_1 为非负整数，$x^{(i)}(t)$ 表示 x 的第 i 阶导数．我们定义：

（1）当 $l_1<n,\tau>0$ 时(2.9)为滞后型．

（2）当 $l_1=n,\tau>0$ 时(2.9)为中立型．

（3）当 $l_1>n,\tau>0$ 时(2.9)为超前型．

显然，若 $l_1>n,\tau<0$，则(2.9)仍为滞后型的．若 $l_1<n,\tau<0$，则(2.9)仍为超前型方程．这只要做自变量代换立即可以推出．

最后，对更为一般的多个滞量方程

$$\begin{aligned}x^{(n)}(t)=f(t,x(t),\cdots,x^{(l_0)}(t),x(t-\tau_1),\cdots,x^{(l_1)}(t-\tau_1),\cdots,\\ x(t-\tau_m),\cdots,x^{(l_m)}(t-\tau_m)),\end{aligned}\tag{2.10}$$

同样设 $l_0\leqslant n-1$．记 $l=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} l_i$，$\sigma=n-l$，并且假定 $\tau_i>0,i=1,2,\cdots,m$．那末当 $\sigma>0$ 时称(2.10)为滞后型方程，$\sigma=0$ 时为中立型方程，$\sigma<0$ 时为超前型方程[46]．

按照我们的分类原则，方程(1.4)，(1.6)，(1.7)，(1.9)，(1.10)，(1.11)，(1.12)都是滞后型差分微分方程，简记为RDDE．在(1.8)中 r_{12} 与 r_{21} 都是非负的，所以也是RDDE．而(1.13)中 $K\neq 0$，所以是中立型差分微分方程，简记为 *NDDE*．方程(2.8)是超前型差分微分方程，简记为 *ADDE*．（这三种类型的缩写记号在文献中普遍出现，以后不再说明．）

对三种类型的方程，其解的记号有如下几种表示：$x(t)$，$x(t,t_0,\phi)$，$x(t,t_0,\phi,f)$（这里强调了方程的右端函数），以及 $\overset{\phi}{\underset{x}{}}(t,t_0)$ 等等．在一般情况下我们只沿用前两种记法．

为了本章的需要，先提一下稳定性的概念．设(2.1)中 $f(t,0,0)\equiv 0$，即它有零解．

若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当初始函数满足 $|\phi|<\delta$ 时恒有 $|x(t,t_0,\phi)|<\varepsilon(t\geqslant t_0)$ 则称(2.1)的零解是稳定的，若 δ 不依赖于 t_0，则称之为一致稳定的．