全国高等院校数学基础课教材

新编概率论与数理统计

主编　肖筱南

编著　茹世才　欧阳克智

王惠君　肖筱南

北京大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

新编概率论与数理统计/肖筱南主编. —北京：北京大学出版社，2002.1

ISBN 7-301-05263-4

Ⅰ.新… Ⅱ.肖… Ⅲ.① 概率论-高等学校-教材 ② 数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 072294 号

书　　名：新编概率论与数理统计
著作责任者：肖筱南　主编
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-05263-4/O·0517
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
　　　　　　850×1168　32 开本　13.125 印张　320 千字
　　　　　　2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷
印　　　数：0001—11000 册
定　　　价：19.00 元

前　言

概率论与数理统计是从数量方面研究随机现象规律性的数学学科.随着知识经济、信息时代的来临,研究随机现象的数学理论、方法及其应用愈来愈广泛,概率统计的思想方法已经渗透到了自然科学与社会科学的各个领域,并且还在继续拓广.

现代科学技术的迅速发展,使知识更新的速度不断加快.对此,作为高等工科、经济类院校重要基础课的概率统计教材应该如何适应当代知识经济发展的需要,不断开拓创新,已成为摆在我们面前的紧要任务.为了进一步提高概率统计的教学质量,更好地适应新世纪对高等工科及经济类院校培养复合型高素质人才的需要,我们在概率统计课程的教材建设与改革中,结合多年的教学研究与实践,在博采众家之长的基础上,紧扣教育部最新颁布的教学大纲,针对工科类、经济类院校学生学习概率统计的实际需要,几经修改编写了本书.在编写过程中,考虑到工科与经济类数学教学的特点以及学生报考工学、经济学硕士研究生入学考试的需要,我们在遵循本学科系统性与科学性的前提下,尽量注意贯彻由浅入深、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法,既注重概率统计基本概念、基本理论和方法的阐述,又注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养,以达到既便于教师教学,又便于学生自学之目的.

为了帮助各类学生更好地掌握本课程内容,本书每节分层次配有(A)基本练习题,(B)带有一定难度的提高练习题,此外,每章还配有总习题,以供读者复习、巩固所学知识.书末附有习题答案与提示,可供教师与学生参考.

本书可作为高等工科类、经济类院校“概率论与数量统计”课

程的教材或教学参考书.全书共分八章,第一章至第四章为概率论部分,需讲授约32～36学时,第五章至第八章为数理统计部分,其中第五章至第七章需讲授约22学时,第八章需讲授约12学时,各校可根据实际情况与专业需要讲授其中一部分或全部.

本书第一章由茹世才编写,第二章由欧阳克智编写,第三、四章由王惠君编写,第五章至第八章由肖筱南编写.全书由肖筱南制定编写计划并负责最后统稿定稿.

我们谨将本书奉献给读者,希望它能成为每位读者学习概率统计的良师益友.本书的编写与出版得到了北京大学出版社的大力支持与帮助,在此表示衷心感谢.

限于编者水平和时间仓促,书中疏漏与不当之处,恳切读者指正.

编　者

2001年10月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是数学的一个重要分支，它是研究随机现象统计规律性的一门学科，其应用广泛，是科技、管理、经济等工作者必备的数学工具. 本章通过随机试验介绍概率论中的基本概念——样本空间、随机事件及其概率，并进一步讨论随机事件的关系及其运算，概率的性质及其计算方法.

§1　随机事件及其运算

一、随机现象与随机试验

在自然界及人类社会活动中，所发生的现象是多种多样的，若从其结果能否准确预言的角度去考虑，可分为两大类：一类称为**确定性现象**，另一类称为**随机**(或**偶然**)**现象**.

所谓**确定性现象**，是指在一定的条件下必然发生(或必然不发生)的现象. 例如，在标准大气压下，把水加热到 100℃，此时水沸腾是必然发生的现象(而此时水结冰是必然不会发生的现象). 只要保持上述条件不变，任何人重复上述试验及进行观察，该现象的结果总是确定的，这类现象的结果是能准确预言的. 研究这类现象的数学工具是线性代数、微积分学及微分方程等经典数学理论与方法.

所谓**随机现象**，是指在一定的条件下，可能发生也可能不发生的现象，具有不确定性(或称为偶然性或随机性). 例如，掷一枚质地均匀的硬币，其落地后可能是有国徽的一面(称为正面)朝上，也可能是有数字的一面(称为反面)朝上，掷币前不能准确地预言. 又如，从含有不合格品的一批某种产品中，任意抽一件检验，其检验

结果可能是合格品,也可能是不合格品,事先无法准确地预言.

通常,人们不论研究何种现象,都离不开对其进行观察(测)或进行实验.为简便起见,我们把对某现象或对某事物的某个特征的观察(测),以及各种各样的科学实验,统称**试验**.为了研究随机现象,同样需要进行试验.这类试验的特征是,在一定的条件下,其试验的可能结果不止一个;一次试验中,可能出现某一结果,也可能出现另一个结果,究竟会出现哪一个试验结果,事先无法准确地预言.对于这类试验,人们实践中发现,就一次试验而言,其试验结果表现出不确定性(偶然性),似乎难以捉摸,但在大量重复试验下,其试验结果却呈现出某种规律性.例如,抛掷硬币试验,一次抛掷,哪一面朝上是随机的(或偶然的),但把同一硬币进行成千上万次抛掷,人们发现,"正面朝上"与"反面朝上"这两个试验结果出现的次数大致各占一半.又例如,从含有不合格品的一批某种产品中,任意抽取一件检验的试验下,"抽到合格品"与"抽到不合格品"两个试验结果都有可能发生,具有随机性(或偶然性),但当重复抽取时,"抽到合格品"的次数与抽取总次数之比却呈现出某种稳定性.随机现象的这种隐蔽着的内在规律性叫做**统计规律性**.本课程的任务就是要研究和揭示这种规律性.

显然,要获得随机现象的统计规律性,必须在相同的条件下,大量重复地做试验.在概率统计中,把这类试验称为**随机试验**,它具有下述三个特性:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,而究竟会出现哪一个结果,在试验前不能准确地预言;

(3) 试验所有的可能结果在试验前是明确(已知)的,而每次试验必有其中的一个结果出现,并且也仅有一个结果出现.

随机试验简称**试验**,并用字母 E 或 E_1, E_2 等表示.我们就是通过随机试验去研究随机现象的.

例 1 掷一颗骰子,观察出现的点数.这个试验就是一个随机

试验，记为 E_1. E_1 的所有可能的结果共有 6 个，即“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”. 试验前无法准确地预言会出现哪一个点数，但试验后必有且仅有其中的一个点数出现.

例 2 将一枚质地均匀的硬币连掷两次，观察出现正、反面的情况. 这里把硬币连掷两次作为一次试验(称为**复合试验**)，这也是一个随机试验，记为 E_2. 若用记号(第一次掷币可能出现的面，第二次掷币可能出现的面)表示试验结果，则 E_2 共有四个可能的结果：

(正面，正面)，(正面，反面)，(反面，正面)，(反面，反面).

例 3 记录电话交换台一小时内接到呼唤的次数. 这是一个随机试验，记为 E_3. 试验结果(即接到呼唤次数)的可能值为 0，1，2，…. 由于难以规定呼唤次数的上限，理论上认为每个正整数都是一个可能的试验结果.

例 4 五件产品中有三件正品(分别记为 Z_1,Z_2,Z_2)和两件次品(分别记为 C_1,C_2)，现从中任意取两件，观察取出的产品的正、次品情况. 这也是随机试验，记为 E_4. E_4 共有 $C_5^2=10$ 个可能的试验结果：(Z_1,Z_2)，(Z_1,Z_3)，(Z_2,Z_3)，(Z_1,C_1)，(Z_1,C_2)，(Z_2,C_1)，(Z_2,C_2)，(Z_3,C_1)，(Z_3,C_2)，(C_1,C_2).

例 5 从一大批某类电子元件中，任意抽取一件，测试其使用寿命(即能正常工作的时间). 这同样是一个随机试验，记为 E_5. 由于测试的结果是非负实数，并且也难以确定元件寿命的上限是哪一个非负实数，理论上为处理方便，认为任何一个非负实数都是测试的一个可能结果，故该试验的任一可能结果可记为 $t\in[0,+\infty)$.

二、样本空间

研究任何一个随机试验，不仅要搞清该试验所有可能的结果，还要了解它们的含义，而每一个可能的结果的含义是指试验后所观察(测)到的最简单的直接结果，它不包含其余的任何一个可能

的结果. 我们把试验后所观察(测)到的这种最简单每一个直接结果称为该试验的一个**基本事件**. 全体基本事件所构成的集合称为随机试验的**样本空间**. 样本空间通常用字母 Ω(或 U)表示. 为了区别不同试验的样本空间,也可以用 Ω_1,Ω_2 等表示. Ω 中的元素即基本事件,此时称为**样本点**,常用字母 ω(或 e)表示,必要时也可以用 ω_1,ω_2 等表示不同的样本点.

上面例题中,随机试验的样本空间分别为:

E_1: $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$;

E_2: $\Omega_2=\{$(正面,正面),(正面,反面),(反面,正面),(反面,反面)$\}$;

E_3: $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$;

E_4: $\Omega_4=\{(Z_1,Z_2),(Z_1,Z_3),(Z_2,Z_3),(Z_1,C_1),(Z_1,C_2),(Z_2,C_1),(Z_2,C_2),(Z_3,C_1),(Z_3,C_2),(C_1,C_2)\}$;

E_5: $\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$ 或 $\Omega_5=[0,+\infty)$.

从上述样本空间中,可以发现它们中有的是数集,有的不是数集;有的数集是有限集,有的则是无限集.

三、随机事件

当研究随机试验时,人们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现,而更关心的是满足某些条件的样本点在试验后是否出现. 例如,在例 5 中,测试某类电子元件的使用寿命以便确定该批元件的质量. 若假定使用寿命超过 1000 小时为正品,则人们关心的是试验结果是否大于 1000 小时. 满足这个条件的样本点组成了样本空间的子集. 我们把样本空间的子集称为**随机事件**,简称**事件**. 事件通常用大写字母 A,B,C 等表示,必要时也可以用 A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2 等表示,也可以用语言描述加花括号来表示. 例如在例 3 中,{呼唤次数不超过 5 次},例 4 中{取出的两件产品中恰有一件次品}等都是这种表示法. 显然,基本事件就是仅含一个样本点的随机事件;一个样本空间,可以有许多随机事件.

随机试验中，若组成随机事件 A 的某个样本点出现，则称事件 A 发生，否则称事件 A 不发生. 如例 1 中，若用 A 表示{出现奇数点}，即{1,3,5}，它是 Ω_1 的子集，是一个随机事件，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时，则称事件 A 发生. 同样，若用 B 表示{出现偶数点}，即{2,4,6}，它是 Ω_1 的子集，也是一个随机事件.

由于样本空间 Ω 是其本身的一个子集，因而也是一个随机事件，又因为样本空间 Ω 包含所有的样本点，所以每次试验必定有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，因而称 Ω 为**必然事件**. 又因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集，所以 $\varnothing$ 也是一个随机事件，由于 $\varnothing$ 不包含任何一个样本点，故每次试验 $\varnothing$ 必定不发生，因而 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

必然事件与不可能事件已无随机性可言，在概率论中，为讨论方便，仍把 Ω 与 $\varnothing$ 当作两个特殊的随机事件.

四、随机事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集，故事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算完全类同，但要注意其特有的事件意义.

设 Ω 是给定的一个随机试验的样本空间，事件 A,B,C，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是 Ω 的子集.

1. 包含关系

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称 A 是 B 的**子事件**，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

在这种情况下，组成事件 A 的样本点都是组成 B 的样本点. 这种包含关系的几何直观如图 1-1 所示.

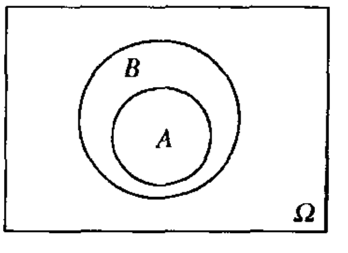

图 1-1　$A\subset B$

例如，在例 1 中，若 A 表示{出现奇数

点}，即事件{1，3，5}，若 B 表示{出现的点数不超过 5}，即事件{1，2，3，4，5}，显然 $B\supset A$.

2. 相等关系

若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$. 其直观意义是事件 A 与 B 的样本点完全相同.

3. 和事件

{事件 A 与事件 B 至少有一个发生}的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 是属于 A 或属于 B 的样本点组成的集合，其几何直观由图 1-2 所示(阴影部分).

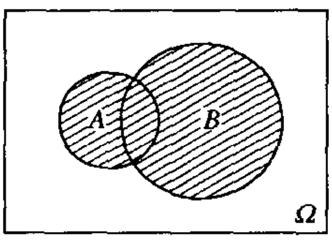

图 1-2　$A\cup B$

例如，在例 2 中，设 A 表示{第一次掷币出现正面，第二次掷币出现正面}，即 $A=$ {(正面，正面)}，B 表示{两次掷币恰有一次出现正面}，即 $B=$ {(正面，反面)，(反面，正面)}，则 $A\cup B$ 表示{至少有一次出现正面}.

一般地，把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生}的事件称为这 n 个事件的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地，把可列个事件即{$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生}的事件称为这可列个事件的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 积事件

{事件 A 与事件 B 同时发生}的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 事件 $A\cap B$ 是由既属于事件 A 又属于事件 B 的样本点组成的集合，其几何直观由图 1-3 所示(阴影部分).

例如，在例 4 中，设 A 表示{取出的两件中最多有一件次品}，即 $A=\{(Z_1,Z_2),(Z_1,Z_3),(Z_2,Z_3),(Z_1,C_1),(Z_1,C_2),(Z_2,C_1),$