数学知识丛书

〔日〕平冈忠著
马忠林译

新几何

知识出版社

数学知识丛书

〔日〕横地　清　　编

新　几　何

〔日〕平冈　忠　著

马忠林　译

知　识　出　版　社

数学知识丛书
新几何
〔日〕平冈忠 著
马忠林 译
知识出版社出版
（北京安定门外外馆东街甲1号）
新华书店北京发行所发行　陕西省印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张2.25　字数50千字
1987年1月第1版　1987年1月第1次印刷
印数：1—5,360
书号：13214·44　　定价：0.55元

内 容 提 要

本书是日本横地清教授为青少年数学爱好者编写的一套初等数学知识丛书，共33本。这套丛书的特点是通过对日常生活中经常遇到的具体现象的分析来讲述初等数学提高青少年学习数学的兴趣。《新几何》一书简单扼要地介绍几何学的发展历史，加深对欧氏几何的理解。同时用浅显的语言和实例，介绍了大家所不熟悉的非欧几何和拓扑学的初步知识。本书适合具有中学文化水平的读者阅读。

前　言

这本书写的是关于“新几何”的内容。

研究各种图形、空间性质的数学，叫作几何学。大家以前所学的关于图形的知识，准确地说，是根据欧几里得的思想编写的“欧几里得几何”。

和其他很多的学问一样，数学也取得了很大的发展，现在还在不断地发展着。于是，关于研究图形和空间的几何的分支，也不仅是欧几里得几何，也发展了其他的新几何。在这本书里写的是属于这类新几何的三种几何。

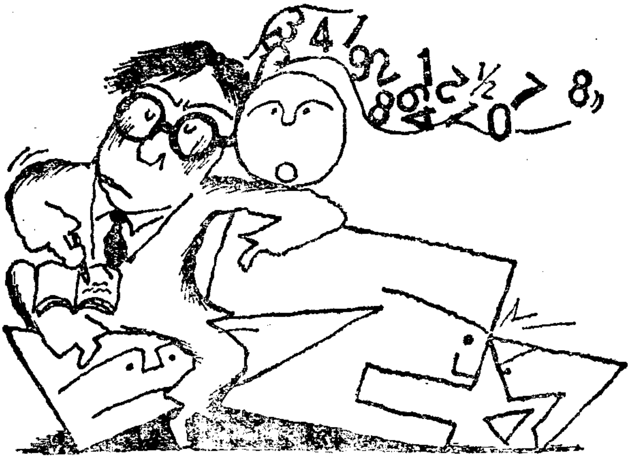
在我们周围，认为“数学已经很完善了，已经没有再发展的余地了”的大有人在，但这是没道理的。数学还有很多问题远远地没有得到解决，正是为了解决这些问题，而建立起了新的数学分支，数学才得到发展。在数学发展进程中，使用了哪些巧妙的观点和思考方法，从本书可以得到一些了解。

这类问题，对大家在学习数学是很重要的。

著　者

目　　录

第一章　欧几里得几何



在我们周围的建筑物，汽车，文具等，无论哪个都有形状和大小。还有，天棚和地板是平行的，与墙壁是垂直的，象这样它们之间有各种位置关系和相联系的关系。

还有，当我们仰视非常明朗的晴空时，将感到我们所在的空间是无边无涯的广阔。

研究这样的图形和空间的性质的数学，叫做几何学，但是，你们从小学到目前所学习的图形，是属于欧几里得几何的。

在本章要学习欧几里得几何是在什么时候，怎样产生的，也要学习它有什么特点。

§1 几何的起源

埃及是尼罗河的恩赐

在我们周围有四边形、立方体、圆柱体等等各式各样的图形。并且，这些图形的大小也都各不相同。又例如，如果用木板做长方体形的木箱时，就要研究木板边缘的直线长，板的面积，边缘直线和板之间是平行、还是垂直等关系。

研究这样的图形和空间各种性质的数学——几何，是从什么时候开始的呢。

现在非洲的埃及阿拉伯共和国，在以前很长时间就叫埃及。埃及有条大河。这条河自古以来就在撒哈拉沙漠地带造绿洲、湿润荒芜的沙地，真象慈母一样，被称为“慈母之河——尼罗”。

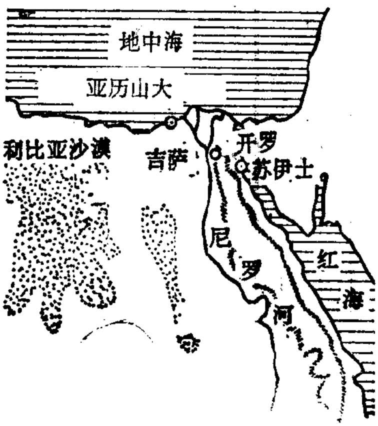


图1-1 古代埃及

居民在很早以前就居住在尼罗河下流流域，以农业和牧畜业为生。这个地区和美苏甫达米亚地方的巴比伦一起，称为世界上最古老的文明发祥地。在埃及开古代文明之花，被认为是托尼罗河之福。所以希腊的历史学家希罗德杜斯说“埃及是尼

罗河的恩赐物”。

几何的起源

可是，慈母般的尼罗河也并不是总在微笑。有时也会生气。每年一到雨季，尼罗河洪水的浊流由其两岸溢出，并且从上游洪流中带来很多泥砂，破坏了下游农田的界限。据古代的记录，此洪水从夏至开始大约持续一百天左右水量甚大而形成泛滥，以后水量减少一直持续到第二年夏至。周而复始地每年一次。

这种规律准确的洪水的周期性，竟使埃及的农业得到发展，使人们有了准确的时间观念并发明了测量。

也就是说，按着气候变化，预防洪水，进行播种、收获庄稼来经营农业。又从洪水到下次洪水到来的日期的周期计算出一年为365日的历法，因此也就发展了时间的观念。此外，为了修复被洪水冲坏了的农田边界人们必须对土地进行测量。

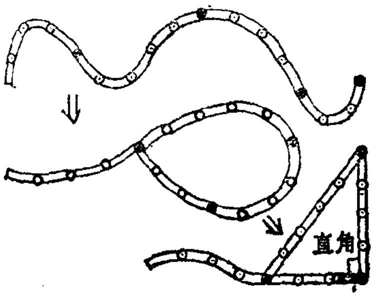


图1-2　用3：4：5的长度作直角

因为当时的测量是使用绳子，所以把测量土地的人称为绳丈师。他们利用太阳光线的影子来确定东西和南北的方向，确定某地点的位置。

又如图1－2，将长度比为3、4、5的绳子拉紧做出三角形，则可得直角。后来被叫作毕达哥拉斯定理（勾股定理）的定理，也是由经验得知的。

【例题1】 使$a^2+b^2=c^2$成立的正整数a,b,c的数组，叫做毕达哥拉斯数。设m，n（$m>n$）为正整数时，m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2是毕达哥拉斯数吗？

【解】设 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，

$$a^2+b^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2=c^2。$$

所以数组m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2是毕达哥拉斯数。

这里，m，n只要是满足$m>n$的任意正整数就可以，所以由例题1可知毕达哥拉斯数要多少有多少。

【问1】 设正整数l是大于1的奇数，$\frac{l^2-1}{2}$，l，$\frac{l^2+1}{2}$的数组是毕达哥拉斯数吗？

【问2】 试对例题1的m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2中的m，n代入适当正整数，求出数组

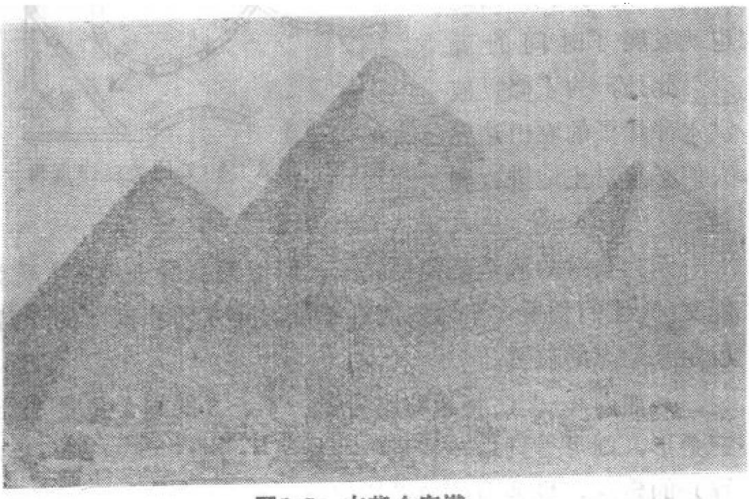


图1-3 吉萨金字塔

同理　也可以对问1中的$\frac{l^2-1}{2}$，l，$\frac{l^2+1}{2}$中的l，代入大于1的适当奇数，求出其数组。

【问3】 用问2所求出的数组，用细绳将这些数的长度在绳上做出记号，然后将绳拉紧做出三角形，实际验证做出直角的情形。

据说有名的吉萨金字塔建于纪元前2700年左右，它也标志着距今4600年以前的远古，测量和天文已很发达了。

如上所述，埃及从土地测量兴起了研究图形和空间性质的几何这门数学。

§2　欧几里得几何

欧几里得几何

在这里较详细地介绍，从小学起直到现在我们所学习的欧几里得几何是怎样的一门学问，以及它有什么特征。

首先，所谓欧几里得几何，是以古代希腊欧几里得这个人的名字命名的几何。欧几里得是纪元前300年左右的人，对他的生平还不甚了解，据说他跟伯拉图学习过，并且后来到亚力山大研究数学。


图1-4　欧几里得

欧几里得反复地研究了在他当时所能了解到的巴比伦和埃及，以及当时希腊的数学内容，

把它们按顺序加以整理，完成了共有13卷的《几何学原本》这一可观的著作。这部著作直到后来学者们整理他们所研究的材料时，在整理方法上仍被奉为典范。

《几何学原本》

由欧几里得整理撰写的13卷巨著，命名为《几何学原本》（以后简称《原本》）。这部书所写的内容不仅是关于图形的知识，他还很好地总结了当时所了解到的全部数学内容。

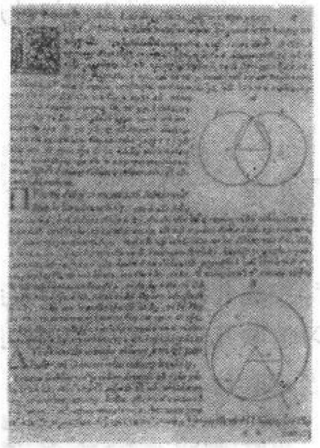


图1-5　《几何学原本》的一部分

现在，我们来看一看原本的内容。

原本是从明确说明书中要使用的23个名词的定义开始的（明确说明名词意义的命题，叫作定义）。

例如，象下面这样。

〔定义〕

1．点是没有部分的。

2．线是没有宽窄而只有长度的。

3．线之端是点。

……

23．平行线是在同一平面上向两方无限延长时，在任何一方也不相交的直线。

其次，还提出所谓5个公设（要求）和5个公理（共同概念）的假设。

所谓公设就是在学习几何时，希望任何人都承认上述定义中所述的点、线、直线、角、圆……之间所存在的关系的

明确叙述，有下面5条。

【公设】

1．通过任意的两点可引直线。

2．任意线段都可以任意延长。

3．以任意点为圆心，任意长为半径可以画圆。

4．凡直角皆相等。

5．一直线与二直线相交时，在其同侧两内角的和若小于二直角，则延长此二直线，它们必在小于二直角的一侧相交。

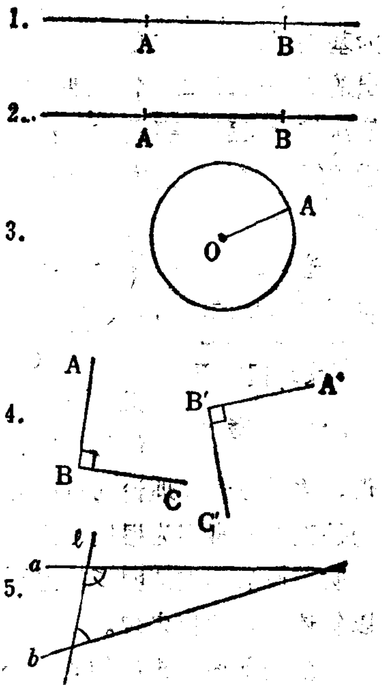


图1-6　欧几里得公设

再有，所谓公理者，即承认它是正确的，并且在此后的理论论述中把它作为基础事实。原本中所提出的公理不仅是几何公理，而是全部数学、乃至更广泛的其他科学都通用的基本事实。可举出以下5条公理。

【公理】

1．与同一个量相等的两个量，互等。

2．相等的量加另一相等的量，和量相等。

3．相等的量减另一相等的量，余量相等。

4．相互重合的量，相等。

5．全体大于部分。

数学理论的建立，总是要承认某些基本的东西，再以此为基础来建立。欧几里得就是以谁都认为是当然的如前面提出的5个公设和5个公理为基础，从定义、公设和公理出发依次推导出新的事实，从整体看，构成了完成的几何这一数学体系。这就是大家都熟知的以他的名字命名的欧几里得几何。

这样，2200多年后的今天，欧几里得几何一直是给世界各国对图形的学习以很大影响。

欧几里得几何的特征

在欧几里得原本中，在23个定义中定义了平行线。但是我们知道关于平行线的叙述，常常把前面的公设5叫作平行线公设。数学在建立理论的过程时，常以基本事实和在此以前认为是正确的事实为根据，来推论某一事实是否正确，这叫作证明。而后把被证明了的重要事实和性质，用最简要形式加以叙述的，叫作定理。

然而前面所提出的5个公设，公设1到公设4所说的内容，是容易理解的。而最后的公设5（平行线公设）的叙述方法很繁琐。与其他公设相比总有不自然的感觉。

于是，公设5成了问题。人们怀疑这个公设5是否能从其他公设1，2，3，4和公理1，2，3，4，5为根据进行证明。

此后，在欧几里得以后的2000多年期间，世界各国很多的数学家进行了研究，企图证明这个问题，但都以失败而告终。

可是，在各种研究当中，发现上述的平行线公设5和下面(1)、(2)所说的内容是完全一致的。

“通过不在一已知直线上的一已知点，只能引一条与此直线平行的线” （1）

“三角形的三个内角的和是二直角” （2）

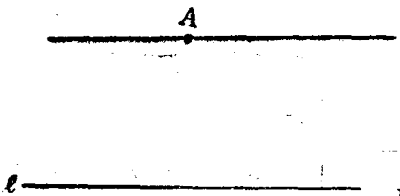


图1-7 过不在直线l上点A的平行线

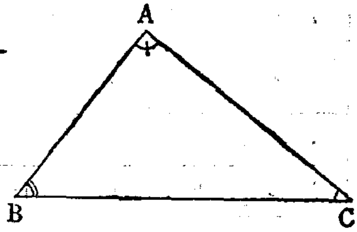


图1-8 三角形三个内角的和

围绕这平行线公设的研究，此后还有很多学者热心地进行着。终于在19世纪前半叶发现了与欧几里得几何不同的新几何。

与此新几何相比，承认前面所述的平行线公设，是欧几里得几何的重要特征。

关于这个问题后面还要论及。

解 答

【问1】 $$\left(\frac{l^2-1}{2}\right)^2+l^2=\frac{l^4-2l^2+1}{4}+l^2$$

$$=\frac{l^4+2l^2+1}{4}=\left(\frac{l^2+1}{2}\right)^2$$

所以，$\frac{l^2-1}{2}$，l，$\frac{l^2+1}{2}$ 的数组是毕达哥拉斯数。