六度带
高斯、克吕格坐标
换带表

纬　度 0°—55°

六度带编算小组编

地质出版社

六度带
高斯、克吕格坐标
换带表

纬　度 0°—55°

六度带编算小组编

地　质　出　版　社

本表包含6°带坐标换带表Ⅰ与换带简表Ⅱ，专供6°与6°带的控制点互相换算之用。表Ⅰ精度达1毫米，用于三角测量的精密计算，表Ⅱ精度1米，用于测图及其他低精度的计算。

本表附有使用方法和算例的说明，并对编算方法和误差分析等也作了简要叙述，关于本表详细的研讨，可参考编者所著“高斯、克吕格坐标的换带”一书。

六度带高斯、克吕格坐标换带表

纬 度0°—55°

六度带编算小组编

（根据测绘出版社纸型重印）

※

地 质 出 版 社 出 版

张家口地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

※

1973年6月北京新一版·1973年6月张家口第一次印刷

印数5230册·定价1.20元

统一书号：15038·（测绘-5）

6° 帶 坐 标 换 帶 表

目　　录

坐 标 換 帶 表 的 說 明

坐 标 換 帶 表

6° 帶高斯、克呂格坐标换帶表的説明

§1 坐标换帶所依据的公式

坐标的换帶，就是把一点在一投影帶的坐标换算为相隣投影帶的坐标；其法之一，就是利用换帶表。这本换帶表的編算，是依据作者所导出的公式，导出的方法：选定“补助点”M于分帶子午綫上，並采取已知点 P_1 的“对称点” P_2（对于橢球面上分帶子午綫而言），然后將有关“在投影平面上計算一点之坐标的方法与公式”（在此处M为已知点，P_2 为所求点）加以归納与演变，以得出直接的换帶公式。

现在实用上“在高斯投影平面上計算坐标”所用方向改化数 δ 与距离改化因数m的算式，仅适用于百公里以內之边長；为使换帶公式在最不利情况下达到1mm的精度（按下式的 Δx 为50公里与 Δy、y_0 各为240公里估計），須另求更精密的 δ 与m，得其式如下：

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= \frac{\Delta x}{6R_0^2}\left(3y_0+\Delta y\right)+\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta y\left(6y_0^2+4y_0\Delta y+\Delta y^2\right)-\frac{\eta^2 t}{3R_0^3}\Delta x^2\left(2y_0+\Delta y\right)\\
&\quad -\frac{\Delta x}{360R_0^4}\left(60y_0^3+90y_0^2\Delta y+45y_0\Delta y^2+7\Delta y^3\right)\\
m &= \frac{1}{6R_0^2}\left(3y_0^2+3y_0\Delta y+\Delta y^2\right)-\frac{\eta^2 t}{6R_0^3}\Delta x\left(6y_0^2+8y_0\Delta y+3\Delta y^2\right)\\
&\quad +\frac{1}{72R_0^4}\left(3y_0^4+6y_0^3\Delta y-3y_0\Delta y^3-\Delta y^4\right)+\frac{\Delta x^2}{24R_0^4}\left(y_0^2+y_0\Delta y\right)+\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{90R_0^4}\\
\Delta x &= x-x_0,\qquad \Delta y=y-y_0,\qquad \eta=e'\cos B_0,\qquad t=\tan B_0
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中：B_0、R_0、γ_0、（x_0，y_0）依次代表“起算点”（在此处为补助点M）的緯度、平均曲率半徑、平面子午綫收斂角、縱横坐标，（x、y）为“他端点”（在此处为 P_2 或 P_1）的縱横坐标，e' 为旋轉橢球体的第二偏心率。

由（1）式出發，按上述方法导出坐标换帶的一般公式如下：

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= x_0-n\Delta x_1+m\Delta y_1-m_1(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)-2n_1\Delta x_1\Delta y_1-m_2\Delta y_1(3\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)\\
&\quad +n_2\Delta x_1(\Delta x_1^2-3\Delta y_1^2)+m_3(\Delta x_1^4+\Delta y_1^4-6\Delta x_1^2\Delta y_1^2)+4n_3\Delta x_1\Delta y_1(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)\\
-y_2 &= y_0+m\Delta x_1+n\Delta y_1-n_1(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)+2m_1\Delta x_1\Delta y_1-n_2\Delta y_1(3\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)\\
&\quad -m_2\Delta x_1(\Delta x_1^2-3\Delta y_1^2)+n_3(\Delta x_1^4+\Delta y_1^4-6\Delta x_1^2\Delta y_1^2)-4m_3\Delta x_1\Delta y_1(\Delta x_1^2-\Delta y_1^2)\\
\Delta x_1 &= x_1-x_0,\qquad \Delta y_1=y_1-y_0
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

式中：（x_1、y_1）、（x_2、y_2）依次为已知点 P_1 在原坐标帶与相隣坐标帶之坐标，而

$$
\left.\begin{aligned}
& m=-\sin 2\gamma_0 & & n=-\cos 2\gamma_0 \\
& m_1=A\sin 3\gamma_0 & & n_1=A\cos 3\gamma_0 \\
& m_2=-C\cos 4\gamma_0-D\sin 4\gamma_0 & & n_2=C\sin 4\gamma_0-D\cos 4\gamma_0 \\
& m_3=\frac{5y_0}{8R_0^4}\sin 2\gamma_0 & & n_3=\frac{y_0}{12R_0^4} \\
& A=\cos\gamma_0\left\{\frac{y_0}{R_0^2}-\frac{2\eta^2 t}{R_0^3}y_0^2\tan\gamma_0-\frac{y_0^3}{3R_0^4}\right\} \\
& C=\frac{1}{6R_0^2}\sin 2\gamma_0+\frac{4\eta^2 t}{3R_0^3}y_0\cos 2\gamma_0 \\
& D=\left(\frac{y_0}{R_0^2}\cos\gamma_0\right)^2
\end{aligned}\right\}\qquad (3)
$$

为了証験(2)、(3)式之正确，作者曾将 Hristow 根据“复数表示的正形投影条件”所得之公式，加以与(2)、(3)等精度的扩充，得出(2)式中各系数为：

$$
\left.\begin{aligned}
m=&-2t(l_0\cos B_0)-\frac{2}{3}t(1-2t^2+3\eta^2+2\eta^4)(l_0\cos B_0)^3 \\
&-\frac{1}{15}t(4-22t^2+4t^4+30\eta^2-90\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^5 \\
n=&-1+2t^2(l_0\cos B_0)^2+\frac{2}{3}(2t^2-t^4+6\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^4 \\
m_1=&\frac{3}{N_0}t(1+\eta^2)(l_0\cos B_0)^2+\frac{1}{2N_0}t(1-13t^2)(l_0\cos B_0)^4 \\
n_1=&\frac{1}{N_0}(1+\eta^2)(l_0\cos B_0)-\frac{1}{6N_0}(1+31t^2-2\eta^2+55\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^3 \\
m_2=&-\frac{1}{3N_0^2}t(1+5\eta^2)(l_0\cos B_0)-\frac{1}{9N_0^2}t(37-26t^2)(l_0\cos B_0)^3 \\
n_2=&-\frac{1}{3N_0^2}(3-4t^2+6\eta^2-20\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)^2 \\
m_3=&\frac{5}{4N_0^3}t(l_0\cos B_0)^2 \\
n_3=&\frac{1}{12N_0^3}(1+6\eta^2-12\eta^2t^2)(l_0\cos B_0)
\end{aligned}\right\}\qquad (3)'
$$

式中 l_0 为“补助点”的經差，$N_0=R_0\sqrt{1+\eta^2}$ 为該点卯酉圈之曲率半径。应用y_0、γ_0之精密的“投影公式”，将（3）式化为（$l_0\cos B_0$）之函数，所得結果与(3)′式相較，仅 n_1 与 n_3 中之微項略有差异，其对于下面（4）式中y_2之最大影响（$\Delta y_1=240$km时）約为0.5mm。計算“換带表”时，(3)′式远不如（3）式之簡易。

（2）式适用于“补助点”选于分带子午綫上的任意位置（即x_0可为任意值）。但为换算簡便計，应选取一定的“补助点”，以使其 x_0 等于已知点 P_1 之 x_1，此时 $\Delta x_1=0$，于是由（2）式得实用公式如下：

$$\left.\begin{array}{l}x_2=x_1+(m+m_1\Delta y_1)\Delta y_1+\delta x=x_1+\{m+(m_1+m_2\Delta y_1)\Delta y_1\}\Delta y_1+\sigma x\\ \mp y_2=y_0+(n+n_1\Delta y_1)\Delta y_1+\delta y=y_0+\{n+(n_1+n_2\Delta y_1)\Delta y_1\}\Delta y_1+\sigma y\\ y_0\text{ 永为正值，} y_1\text{ 採用其在坐标系中应有之符号，}\\ \text{由}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{西}}{\text{东}}\text{帶換至}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{东}}{\text{西}}\text{帶时，採用 }\mp y_2\text{、}\Delta y_1=\pm y_1-y_0\end{array}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\delta x=m_2\Delta y_1^3+m_3\Delta y_1^4 & \sigma x=m_3\Delta y_1^4\\ \delta y=n_2\Delta y_1^3+n_3\Delta y_1^4 & \sigma y=n_3\Delta y_1^4\end{array}\right\}\quad(5)$$

（ 4 ）式中包含 δ 之式应用較簡， 但若 Δy_1 大于60公里， 且欲保持 1mm 之精度时，則須应用其 σ 式。

有关本节所述之詳情，可参看拙作“高斯、克吕格坐标的換帶”。

§2 換帶常数的計算

（ 3 ）与（ 5 ）式中之 y_0、m、n、m_1、n_1、m_2、n_2、δx、δy、σx、σy，命名为“換帶常数”， 可按一定間隔之整数 x_0 与分帶子午綫之經差 l_0 編算为表， 这就成为“$(2l_0)^\circ$帶換帶表”。这本“6°帶換帶表(表 I)”，即按 x_0=偶数公里与 $l_0=3^\circ$ 編成。

茲述編算方法如下：——

（一）內插公式与內插表

“內插法”可減輕計算工作，故常採用。在“換帶常数”的計算中， 採用白塞尔內插法。在最后換帶表（ 表 I ）中制定 y_0 的內插表时，採用斯提林內插法。

設有表列函数 $f(t)$ 及其各次差如下表:

列 号	t	f(t)	一次差 Δ'	二次差 Δ''	三次差 Δ'''	…
…	..	…				
−2	$t_0-2\omega$	$f(t_0-2\omega)$				
			$\Delta'_{-3/2}$			
−1	$t_0-\omega$	$f(t_0-\omega)$		Δ''_{-1}		
			$\Delta'_{-1/2}$		$\Delta'''_{-1/2}$	
0	t_0	$f(t_0)$		Δ''_0		…
			$\Delta'_{1/2}$		$\Delta'''_{1/2}$	
1	$t_0+\omega$	$f(t_0+\omega)$		Δ''_1		
			$\Delta'_{3/2}$			
2	$t_0+2\omega$	$f(t_0+2\omega)$				
…	..	…				

斯提林式

$$\left.\begin{array}{l}f(t_0+h)=f(t_0)+n\Delta'_0+\frac{1}{2}n^2\Delta''_0+\cdots\\ n=\frac{h}{\omega},\qquad \Delta'_0=\frac{1}{2}\left(\Delta'_{-\frac{1}{2}}+\Delta'_{\frac{1}{2}}\right)\end{array}\right\}\quad(6)$$

白塞尔式

$$\left.\begin{array}{l}f(t_0+h)=f(t_0)+n\Delta'_{\frac{1}{2}}+B_2(\Delta''_0+\Delta''_1)+\cdots\\ n=\frac{h}{\omega},\qquad B_2=\frac{1}{4}n(n-1)\end{array}\right\}\quad(7)$$

若二次差相等或其差 Δ''' 小于60，上两式可仅采用至二次差，此时两式形异而实同。

命
$$\delta=\frac{\Delta'_0}{\omega},\qquad \delta'=\frac{\Delta''_0}{\omega},\qquad d\delta=\frac{h}{2\omega}\delta' \tag{8}$$
（其中δ为每单位之“平均一次差”，δ' 为每单位之“二次差”，亦等于相邻两δ之差。）

则斯提林式变为下之形式：
$$f(t_0+h)=f(t_0)+h\{\delta+d\delta\} \tag{9}$$
按白塞尔式（至Δ''项）之反插式为
$$n=\frac{h}{\omega}=\{df+d(df)\}\div\Delta'_{\frac{1}{2}} \tag{10}$$
其中
$$\left.\begin{aligned} df&=f(t_0+h)-f(t_0)\\ d(df)&=-B_2(\Delta''_0+\Delta''_1)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

在内插計算中，編制下述之“内插表”——“数域之函数”表，最利实用。編制之法：先“反解”函数$z=f(t)$为$t=\Phi(z)$，使z等于拟定的某一“等差級数”z_1、z_2、$z_3\cdots$（如0.5、1.5、2.5…），求其相应之t_1、t_2、$t_3\cdots$，然后将各相邻两z之“中数”（如1、2、3…）列为下表：
$$\left.\begin{array}{llllll} t= & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \cdots\\ z=f(t)= & \dfrac{z_1+z_2}{2} & \dfrac{z_2+z_3}{2} & \dfrac{z_3+z_4}{2} & \cdots & \end{array}\right\} \tag{12}$$
就得“t数域之函数$f(t)$”表。用此表內插时：看出已知t位于某两个表列t值之間后，可立即查得 $z=f(t)$ 之值，其最大誤差为等差級数之“半差”，而此誤差（即半差）乃編制此表时所应事先拟定者。（8）、（11）式的$d\delta$、$d(df)$，皆可編成“数域之函数”表，編算本換带表时，曾多次用之。例如：若备有 B_2表以查n，则由下式就可編成“df 数域之函数 $d(df)$”表：
$$B_2=-d(df)/(\Delta''_0+\Delta''_1),\qquad df=n\Delta'_{\frac{1}{2}} \tag{13}$$
在換带常数的直接計算中，其引数間隔（ω）之选择，均遵守下之原則：力求ω甚大，但以仅需要簡单的二次差插算为限。

（二）B_0、y_0、γ_0、m、n 的计算

y_0、γ_0以及求R_0、η^2t 所需之B_0的决定，利用下述資料：

（1）編者的“緯度 0°—30° 的高斯、克吕格投影表”中的原始計算数值（較精密）。

（2）緯度30°—55°者：有关計算x之項，采用“苏联的投影表”；有关計算y、γ之各項，由另算得緯度每5′之精密值。

（3）緯度 15°—55° 的 R_0，根据“苏联的大地位置計算表”；緯度 0°—15° 的 R_0，按 $R_0=\frac{c}{V^2}$算得，而V为編算（1）項投影表中已算得者。

上述投影表均以緯度B为引数，但本換带表拟以“补助点”（經差$l_0=3°$）的x_0（偶数公里）为引数，开始計算时，仅已知（x_0、l_0），而不知B_0。故用下法利用投影表：

首先根据前述（1)、(2）項投影表之精密值，按 $l_0=3°$ 以及間隔5′的B算出x、

y、γ；然后根据（10）式，按偶公里数之 x_0 "反插"緯差所相应的"內插引数" n，且求 B_0；並用（7）式內插 y_0、γ_0，用（3）式計算 m、n。

此处所得与 x_0 相应的 B_0、y_0、γ_0，为以下其余换帶常数的"起算数据"。

前述各投影表，均系採用克拉索夫斯基橢球体；因此，这本換帶表，仅适用于以該橢球体为依据的高斯、克呂格坐标的换帶。

（三）m_1、n_1 的計算

根据（3）式，按 x_0 每20公里直接計算 m_1、n_1，然后用（7）式內插 x_0 每2公里之相应值。

（四）m_2、n_2、m_3、n_3 的計算

根据（3）式，按 x_0 每40公里同时直接計算 m_2、n_2、m_3、n_3，然后用比例內插法（即仅用（7）式中之 $\Delta'^1/_2$ 項），插算 x_0 每2公里之 m_2、n_2，並插算 x_0 每百公里中央（50公里）之 m_3、n_3，以供計算 δ、σ 之用。

（五）σ_x、σ_y、δx、δy 的計算

將 σ、δ 編成"Δy_1 数域之函数表"，应用最便。反解（5）式之 Δy_1，得出編算此表之公式:

$$(\Delta y_1)_x=(10^{15}m_3)^{\frac{-1}{4}}\sigma x^{\frac{1}{4}}\ ,\quad (\Delta y_1)_y=(10^{15}n_3)^{\frac{-1}{4}}\sigma y^{\frac{1}{4}} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}(\Delta y_1)_x&=\left(10^4 m_2^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}\delta x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}m_3\left(10m_2^{\frac{1}{3}}\right)^{-5}\delta x^{\frac{2}{3}}+\frac{m_3^2}{3(10^6 m_2^3)}\delta x\\(\Delta y_1)_y&=\left(10^4 n_2^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}\delta y^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}n_3\left(10n_2^{\frac{1}{3}}\right)^{-5}\delta y^{\frac{2}{3}}+\frac{n_3^2}{3(10^6 n_2^3)}\delta y\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

上兩式的 σ、δ 皆以（mm）为單位，Δy_1 以（km）为單位。此項"σ、δ"表，依 x_0 每百公里編一表，且按"σ、δ=0.5、1,5、2.5…"編算而得。編算时，m_2、n_2、m_3、n_3 均採用 x_0 每百公里中央（50公里）之相应值。为保証換帶計算之精度，用（15）式編算"δ 表"时，Δy_1 仅算至60公里，Δy_1 自此值起至120公里，則用（14）式編算"σ 表"。为简化上兩式之計算，应先編好 $(0.5)^i$、$(1.5)^i$、$(2.5)^i$ … 之表，其 $i=\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$。

（15）式为由"逐漸趋近法"解得的無穷級数之主要項，当 $\left(10^3\frac{m_3}{m_2}\Delta y_1\right)$、$\left(10^3\frac{n_3}{n_2}\Delta y_1\right)$ 大于1时，級数不收斂，此式不再适用。但其中 Δy_1 在其最大值60公里的情况下：$\left(10^3\frac{m_3}{m_2}\Delta y_1\right)$ 均未超过0.0017；$\left(10^3\frac{n_3}{n_2}\Delta y_1\right)$ 在 x_0=4450、4550公里时急剧变到其最大值，但亦仅为0.59、0.66，此时 $\delta y=0$。

（六）計算採用的小数位数

各"換帶常数"的計算，完全使用計算机，除（14）、（15）式中各項因子

外，均未使用对数。对于最后换帶表（表Ⅰ）所列之小数位数而言：求 m、n 之 γ_0 以及与 δ、σ 相应之 Δy_1 均多算一位，m_1、n_1、m_2、n_2 均多算兩位。至于 y_0：因投影公式之精度不足且为避免（二）項中劳而無益之高次差內插，故仅算至与"列表位数"相同的米下四位小数；实則 y_0 列表至四位小数，並非在求第四位之完全正确，仅在于避免换帶計算中內插 y_0 时發生过大的"湊整誤差"，以免加倍影响于 y_2，內插所得的 y_0 最后仍湊整至三位小数。

各"換帶常数"之計算过程中所用之小数位数，均已力求其不影响上述"計算小数位数"之精度。

§3 換帶表的編制与校核

（一）換帶表中各項的說明

表Ⅰ中各換帶常数的符号与單位，均已載于其数列的上方。各常数右旁之 δm、δn、δm_1、δn_1，各为相应常数的"每公里一次差"，供"比例內插"之用。δy_0 为 y_0 的"每公里的平均一次差"，各頁並載"Δx 数域之函数 $d(\delta y_0)$"表，以供按下式（参見（9）式）进行內插之用：

$$\left.\begin{aligned} &y_0 \text{ 之內插值} = y_0 + \Delta x\{\delta y_0 + d(\delta y_0)\} \\ &\Delta x = x_1 - x_0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中 x_1 为"換帶点"的縱坐标，x_0 为略小于 x_1 的"表列引数"。

"Δx 数域之函数 $d(\delta y_0)$"表，按下式（参見（8）式）編得：

$$\Delta x = \frac{4000}{(\delta y_1 - \delta y_0)} d(\delta y_0) \text{米} \tag{17}$$

其中 δy_1、δy_0、$d(\delta y_0)$ 均以 0.1(mm) 为單位。δy_1、δy_0 依次代表"內插間隔"下端与上端之 δy_0。每頁"$d(\delta y_0)$表"中表头上之数值，就是 $(\delta y_1 - \delta y_0)$ 之值。

表列小数之位数，不宜偏多偏少；偏多則編表与內插均感困难，偏少則精度不够。权衡得失，决定列表小数位数如表Ⅰ。

（二）換帶表之校核計算与統計

換帶常数全系二人对算，編成表Ⅰ后又作最后校核；其法：除全部檢算 δy_0、δm、δn、δm_1、δn_1 相隣項之差是否均匀外，又用下法：——

选取 $l = 3°\cdot5$ 之各点，其緯度 B 为每度(0°—55°)之3′、20′、40′。据此（3°·5，B）以及（-2°·5，B），用§2（二）項所述之投影表，算得各該点在本坐标帶与隣帶之坐标（x_1、y_1）与（x_2、y_2）。然后，根据本換帶表（表Ⅰ），將（x_1、y_1）換算为隣帶之坐标（x_2、y_2）。比較兩法所得之（x_2、y_2）是否相差过大，相差超过 3mm 时，則依次將上述之"校核計算"以及有关的換帶常数与投影表之計算，全部进行檢查。若檢查証其無誤，則略变 B 之分数，按上法另作"校核計算"，以驗（x_2、y_2）之相差。下表中为未經变更緯度的第一次"校核計算"之結果，各差異数均未超过 3mm。

上述"校核計算"之法，又可同时收取"校核新編投影表"之利。茲將"校核計算"中兩法所得（x_2、y_2）之差異情況統計如下表：

差異之糎数 (mm)	x_2 之差異情况		y_2 之差異情况	
	个数	百分数	个数	百分数
0	53	32.1	36	21.8
1	85	51.5	66	40.0
2	24	14.6	47	28.5
3	3	1.8	16	9.7
共 計	165	100.0	165	100.0

应注意：上述差異数，包含投影与换帶計算的兩种誤差在內。

（三）换帶計算結果的誤差分析

换帶結果之誤差的来源，分析如下：

（1）公式誤差

根据推演换帶公式（2）、（4）式时所保持的精度标准，在最不利情况下，换帶公式的誤差当在 1mm 以內。

（2）换帶常数的計算誤差

y_0、γ_0 的誤差中，包含其算式及其計算誤差。在§2（二）欵所述 y_0、γ_0 之直接計算中，由于採用投影表之精密值，其誤差不超过 0.16mm 与 0″.00016。就§2（二）欵所述 y_0、γ_0 之內插計算而言，按緯度每5′間隔計算的 y_0、γ_0，各算至 0^m.0001 与 0″.0001，其三次差已接近于零（以第四位小数为單位而言），內插时均已顧及其二次差，其所略而未計的高次差，不致影响第四位小数。总之：y_0 之計算誤差当不致超过 0.2mm，γ_0 之計算誤差不致超过 0″.0002，而由 γ_0 計算之 m、n，自必能保証第八位小数之正确。

其他各常数的計算，对其所用之算式而言，均能保証足够之精度。

（3）换帶結果中由换帶表引起之誤差

这种誤差，包含下述兩部份：

a．列表誤差—算得之常数列为表 I 时，含有"凑整誤差"，在最不利情况下，其所能引起换帶公式中各項之最大誤差略如下表：

x_2之各項最大誤差（mm）			y_2之各項最大誤差（mm）		
項目	用 δx 式	用 σx 式	項目	用 δy 式	用 σy 式
			$2y_0$	±0.10	±0.10
$m\Delta y_1$	±0.30	±0.60	$n\Delta y_1$	±0.30	±0.60
$m_1\Delta y_1^2$	±0.02	±0.07	$n_1\Delta y_1^2$	±0.02	±0.07
$m_2\Delta y_1^3$	——	±0.09	$n_2\Delta y_1^3$	——	±0.09
δx	±0.50	——	δy	±0.50	——
σx	——	±0.50	σy	——	±0.50
同符号之累积	±0.82	±1.26	同符号之累积	±0.92	±1.36

b. 內插誤差—是由內插換帶常数时所得增量的“湊整誤差”以及使用內插表不符的誤差所引起。在最不利情况下，其所能引起換帶公式中各項之最大誤差略如下表：

x_2之各項最大誤差（mm）			y_2之各項最大誤差（mm）		
項　　目	用 δx 式	用 σx 式	項　　目	用 δy 式	用 σy 式
			$2y_0$	±0.80	±0.80
$m\Delta y_1$	±0.30	±0.60	$n\Delta y_1$	±0.30	±0.60
$m_1\Delta y_1^2$	±0.02	±0.07	$n_1\Delta y_1^2$	±0.02	±0.07
$m_2\Delta y_1^3$	——	±0.09	$n_2\Delta y_1^3$	——	±0.09
δx	±0.78	——	δy	±0.26	——
σx	——	±0.02	σy	——	±0.02
同符号之累积	±1.10	±0.78	同符号之累积	±1.38	±1.58

应当注意：上兩表中“同符号之累积”之数值，仅为就換帶公式表面上看来所能出現之“最大誤差”，並非表示实际換帶結果中可能出現之值。就事实說：上表所載（δx、σx）与（δy、σy）之最大誤差，分別出現于 x_0 为 0 公里与6100公里处（且在 Δy_1 达到最大值时），但 0 公里处之 m、m_1、m_2 以及在6100公里处之 n、n_1、n_2，均非同时發生同符号的最大誤差；亦可确信：在 x_0 之任一值处，亦决無“如此湊巧”之可能。

§4　換帶簡表的編制

为便利地圖測繪所需以及其他精度要求不高之換帶計算，另据表Ⅰ編成“換帶簡表”如表Ⅱ。用此表之換帶公式如下：

$$\left.\begin{array}{l}x_2=x_1+m\Delta y_1+\varepsilon x \qquad \mp y_2=y_0+n\Delta y_1+\varepsilon y\\ y_0\ \text{永为正，}\ y_1\ \text{採用其在坐标系中应有之符号，}\\ \text{由}\begin{matrix}\text{西}\\\text{东}\end{matrix}\text{帶換至}\begin{matrix}\text{东}\\\text{西}\end{matrix}\text{帶时，採用}\ \mp y_2\text{、}\ \Delta y_1=\pm y_1-y_0\end{array}\right\} \tag{18}$$

其中
$$\varepsilon x=m_1\Delta y_1^2,\qquad \varepsilon y=n_1\Delta y_1^2 \tag{19}$$

簡表Ⅱ的 y_0、m、n 由表Ⅰ摘录，δy_0、δm、δn 各为 y_0、m、n 的“每公里一次差”。每頁表中載有按（19）式編算的“$\varepsilon\&$表”，其所需之 m_1、n_1 取自表Ⅰ：m_1 採用 x_0 每千公里中500公里之相应值，n_1 採用間隔約为 20×10^{-11} 的兩个 n_1 之中数，而“εy 表”之表头上所載 x_0 的“界限值”（公里数），即为相应于这兩个 n_1 者，每“界限值”下方之一行，仅适用于 x_1 在此“界限值”內者。

应用簡表Ⅱ換帶的結果，在最不利的情况下，其誤差不超过 1 米。

§5　換帶計算的示例与說明

（一）使用換帶表Ⅰ

換帶算式有兩种：在 Δy_1 不超过表Ⅰ中“δ 表”之 Δy_1 的最大值（60公里，六度分帶的重疊帶內之任何点，其 Δy_1 均小于此值。）时，使用（4）式中包含 δ 之式，否則使用其包含 σ 之式。在实际換帶計算的作業中：可用下例中的“格式”並用計算机进行；作業中应由兩人对算；或由一人計算，而用“所得換帶結果（x_2、y_2）反算

至原坐标帶”的方法以校核之，此时（x_2、y_2）应作为（x_1、y_1）。

現列举（4）式中兩种算式的換帶及其反算之算列如下表，表中“x_1，y_1”欄之值，即为所欲換帶之坐标值。

計算次序	計算項目	P 点	（反算校核）	Q 点	（反算校核）
1	x_1	1945 024.114	1943 254.254	1923 011.354	1926 685.567
16	$M\Delta y_1$	− 1 769.836	+ 1 769.836	+ 3 674.212	− 3 674.214
9	δx 或 σx	− 24	+ 24	+ 1	+ 1
17	x_2	1943 254.254	1945 024.114	1926 685.567	1923 011.354
8	$\Delta y_1 = \pm y_1 - y_0$	+ 56 011.101	− 55 986.425	−117 321.011	+117 429.528
2	y_1	+374 626.987	−262 657.436	+201 641.064	−436 334.085
3	y_0	318 615.886	318 643.861	318 962.075	318 904.557
15	$N\Delta y_1$	− 55 958.441	+ 55 983.116	+117 372.007	−117 263.496
10	δy 或 σy	− 9	+ 10	+ 3	+ 3
18	$\mp y_2$	+262 657.436	+374 626.987	+436 334.085	+201 641.064
4	$M \begin{cases} m \end{cases}$	−0.0316 1884	−0.0315 9100	−0.0312 7240	−0.0313 3025
14	$M_1\Delta v_1$	+ 2089	− 2087	− 4520	+ 4158
5	$N \begin{cases} n \end{cases}$	−0.9995 0000	−0.9995 0088	−0.9995 1090	−0.9995 0908
13	$N_1\Delta y_1$	+ 4 4017	− 4 4001	− 9 2377	+ 9 2297
6	$M_1 \begin{cases} m_1 \end{cases} 10^{-14}$	+ 37 305	+ 37 276	+ 36 938	+ 37 000
12	$m_2\,\Delta y_1$	——	——	+ 1 591	− 1 595
7	$N_1 \begin{cases} n_1 \end{cases} 10^{-14}$	+ 785 859	+ 785 931	+ 786 754	+ 786 606
11	$n_2\,\Delta y_1$	——	——	+ 631	− 631

現扼要說明計算方法如下：——

按“格式”中之“計算次序”进行时最为有利。

求出已知值 x_1 与表 I 中略小的 x_0 之差 Δx 后，將 Δx 置于計算机的“定数盤”上，分别乘以表 I 中相应的 $\{\delta y_0 + d(\delta y_0)\}$、$\delta m$、$\delta n\cdots$ 等，加其积之代数值于各相应的常数中，則得格式中“3至7”欄中之內插值。$d(\delta y_0)$ 之值，以 Δx 为引数由“$d(\delta y_0)$ 表”查得，其符号与 δy_0 同，若 Δx 小于表中之 Δx 的最小值时，則 $d(\delta y_0)$ 为零。

求出格式中“8”欄中之 Δy_1 后，首先据以查表得出“9、10”欄之 δx、δy 或 σx、σy，（查表时应注意 Δy_1、δ 之符号，σ 永为正值；若 Δy_1 小于表中之 Δy_1 的最小值时，則 δ、σ 为零。），然后，將此 Δy_1 置于計算机的“定数盤”上，依次計算“11至16”欄中各乘积。格式中所需之“加法”，見（4）式自明，其 M、N、M_1、N_1 各代数和，可用“心算”而不写出。

于此应說明“$\Delta y_1 = \pm y_1 - y_0$”与“$\mp y_2$”中符号的决定：在这本“6°帶換帶表”的使用范圍內（緯度55°，Δy_1 最大为120公里），換帶点永常位于其所欲換算之兩隣帶的中央子午綫之間，（$\pm y_1$）永为正値，而 y_2 与 y_1 之符号相反。在高緯度处，Δy_1 甚大之換帶点，可能位于其所欲換算之兩隣帶的中央子午綫之外，此时（$\pm y_1$）

为負値，而 y_2 与 y_1 之符号相同。以上两种情况中符号之决定，由（4）式中之規則可完全总括之。例如：第一例为“由西带换至东带”之情况，則 $\Delta y_1 = +y_1 - y_0 = +(+374626.987) - 318615.886 = +56011.101$，$-y_2 = +262657.436$，此 y_2 即为其“反算”中之 y_1。第一例之“反算”为“由东带换至西带”之情况，則 $\Delta y_1 = -y_1 = y_0 = -(-262657.436) - 318643.861 = -55986.425$，$+y_2 = +374626.987$。

(二) 使用换带简表 I

使用簡表 I 进行换带之例見下表（已知 x_1、y_1 之値与前例同），其算法可参考前例的說明，但有下列特点应予指出：

（1）二次差項 $d(\delta y_0)$ 在此处視为0。

（2）以 Δy_1 查“εy 表”时，应注意“表头”上 x_0 的“界限值”，应按 x_1 在此“界限值”內之一行的 Δy_1 以查 εy。如本例 $x_1 = 1945.0$ 公里，应按“$x_0 = 1938—2382$ 公里”之一行查表，以 $\Delta y_1 = 56.01$ 公里为引数查得 $\varepsilon y = +24.5$ 米。

（3）ε_x、ε_y 永为正値。

計算次序	計　算　項　目	P 点	(反算校核)
1	x_1	1945 024.1	1943 254.1
10	$m\Delta y_1$	− 1 771.0	+ 1 768.7
7	ε_x	+ 1.0	+ 1.0
11	x_2	1943 254.1	1945 023.8
6	$\Delta y_1 = \pm y_1 - y_0$	+ 56 011.4	− 55 986.9
2	y_1	+ 374 627.0	− 262 656.7
3	y_0	318 615.6	318 643.6
9	$n\Delta y_1$	− 55 983.4	+ 55 959.0
8	ε_y	+ 24.5	+ 24.5
12	$\mp y_2$	+ 262 656.7	+ 374 627.1
4	m　10^{-6}	− 31 619	− 31 591
5	n　10^{-6}	− 999 500	− 999 501

上表算例及其反算中所得之 x_2、y_2，与（一）款之精密計算值相較，可見其最大差未超过0.7米。

（表 Ⅰ）

6°帶

高斯、克吕格坐标

换 帶 表

X_0	y_0	δy_0	m	δm	n	δn
km	+ m	− m	− 10^{-8}	− 10^{-8}	− 10^{-8}	+ 10^{-8}
0	334 117.8591	0.0000	0 0000	1652.0	100000 000	0.0
2	117.8427	0165	0 3304	2.0	000	0.0
4	117.7930	0331	0 6608	2.5	000	0.0
6	117.7104	0496	0 9913	2.0	000	0.5
8	117.5947	0661	1 3217	1652.0	99999 999	0.0
10	334 117.4460	0.0826	1 6521	2.5	99999 999	0.5
2	117.2643	0991	1 9826	2.0	998	0.5
4	117.0495	1157	2 3130	2.5	997	0.0
6	116.8016	1322	2 6435	2.0	997	0.5
8	116.5208	1486	2 9739	1652.0	996	1.0
20	334 116.2070	0.1652	3 3043	2.0	99999 994	0.5
2	115.8600	1818	3 6347	2.0	993	0.5
4	115.4800	1982	3 9651	2.5	992	1.0
6	115.0670	2148	4 2956	2.0	990	0.5
8	114.6208	2314	4 6260	1652.0	989	0.5
30	334 114.1416	0.2478	4 9564	2.5	99999 988	1.0
2	113.6294	2643	5 2869	2.0	986	1.0
4	113.0843	2809	5 6173	2.0	984	1.0
6	112.5059	2974	5 9477	2.5	982	1.0
8	111.8946	3139	6 2782	1652.0	980	1.0
40	334 111.2503	0.3304	6 6086	2.0	99999 978	1.0
2	110.5731	3470	6 9390	2.0	976	1.0
4	109.8625	3635	7 2694	2.0	974	1.5
6	109.1191	3800	7 5998	2.0	971	1.0
8	108.3424	3965	7 9302	1652.0	969	1.5
50	334 107.5330	0.4130	8 2606	2.0	99999 966	1.5
2	106.6905	4295	8 5910	2.5	963	1.5
4	105.8149	4460	8 9215	2.5	960	1.0
6	104.9064	4626	9 2520	2.0	958	2.0
8	103.9646	4792	9 5824	1652.0	954	1.5
60	334 102.9898	0.4956	9 9128	2.0	99999 951	2.0
2	101.9820	5122	10 2432	2.0	947	1.5
4	100.9412	5287	0 5736	2.0	944	1.5
6	099.8672	5452	0 9040	2.0	941	2.0
8	098.7605	5617	1 2344	1652.0	937	2.0
70	334 097.6205	0.5783	11 5648	2.0	99999 933	2.0
2	096.4474	5948	1 8952	2.0	929	1.5
4	095.2414	6113	2 2256	2.5	926	2.0
6	094.0022	6278	2 5561	2.0	922	2.5
8	092.7302	6443	2 8865	1652.0	917	2.5
80	334 091.4249	0.6609	13 2169	2.0	99999 912	2.0
2	090.0867	6774	3 5473	2.0	908	2.0
4	088.7155	6939	3 8777	1.5	904	2.5
6	087.3111	7104	4 2080	2.0	899	2.5
8	085.8737	7269	4 5384	1652.0	894	2.5
90	334 084.4034	0.7434	14 8688	2.0	99999 889	2.0
2	082.9000	7600	5 1992	2.0	885	2.5
4	081.3635	7764	5 5296	2.0	880	3.0
6	079.7942	7930	5 8600	2.0	874	2.5
8	078.1917	8096	6 1904	1652.0	869	3.0
100	334 076.5560	0.8260	16 5208		99999 863	

164—166	
Δx(m)	d(δy_0)
24	2
73	4
121	6
170	8
218	10
267	12
315	14
364	16
412	18
461	20
509	22
558	24
606	26
655	28
703	30
752	32
800	34
848	36
897	38
945	40
994	42
1042	44
1091	46
1139	48
1188	50
1236	52
1285	54
1333	56
1382	58
1430	60
1479	62
1527	64
1576	66
1624	68
1673	70
1721	72
1770	74
1818	76
1867	78
1915	80
1964	82
2000	

X_0 km	m_1 $+$ 10^{-14}	δm_1 $+$ 10^{1}	n_1 $+$ 10^{-14}	δn_1 $-$ 10^{1}	m_2 $-$ 10^{-19}	n_2 $-$ 10^{-19}
0	0	20	826 064	0	0	684
2	41	20	064	0	1	4
4	82	20	064	0	3	4
6	123	20	064	0	4	4
8	164	20	064	0	6	4
10	205	20	826 063	0	7	684
2	246	20	063	0	9	4
4	287	20	062	0	10	4
6	328	20	062	0	2	4
8	368	20	061	0	3	4
20	409	20	826 060	0	14	684
2	450	20	059	0	6	4
4	491	20	058	0	7	4
6	532	20	057	0	9	4
8	573	20	056	0	20	4
30	614	20	826 055	1	22	684
2	655	20	053	0	3	4
4	696	20	052	1	5	4
6	737	20	050	0	6	4
8	778	20	049	1	7	4
40	819	20	826 047	1	29	684
2	860	20	045	0	30	4
4	901	20	044	1	2	4
6	942	20	042	1	3	4
8	983	20	040	2	5	4
50	024	20	826 037	1	36	684
2	064	20	035	1	8	4
4	105	20	033	1	9	4
6	146	20	031	2	40	3
8	187	20	028	1	2	3
60	1 228	20	826 026	2	43	683
2	269	20	023	2	5	3
4	310	20	020	1	6	3
6	351	20	018	2	8	3
8	392	20	015	2	9	3
70	1 433	20	826 012	2	51	683
2	474	20	009	2	2	3
4	515	20	005	2	3	3
6	556	20	002	2	5	3
8	597	20	825 999	2	6	3
80	1 638	20	825 996	2	58	683
2	678	20	992	2	9	3
4	719	20	988	2	61	3
6	760	20	985	2	2	3
8	801	20	981	2	4	3
90	1 842	20	825 977	2	65	683
2	883	20	973	2	6	3
4	924	20	969	2	8	3
6	965	20	965	2	9	3
8	2 006	20	961	2	71	3
100	2 047		825 957		72	683

Δy_1 $\pm$km	δx $\mp$mm
51.8	
	1
60.0	

Δy_1 $+$km	δy $-$mm
19.4	
	1
28.1	
	2
33.3	
	3
37.2	
	4
40.5	
	5
43.3	
	6
45.8	
	7
48.1	
	8
50.1	
	9
52.0	
	10
53.8	
	11
55.5	
	12
57.0	
	13
58.5	
	14
59.9	
	15
60.0	

Δy_1 $-$km	δy $+$mm
19.4	
	1
27.9	
	2
33.1	
	3
37.0	
	4
40.2	
	5
43.0	
	6
45.5	
	7
47.7	
	8
49.7	
	9
51.6	
	10
53.3	
	11
55.0	
	12
56.5	
	13
58.0	
	14
59.3	
	15
60.0	

Δy_1 km	σx mm
0.0	
	0
120.0	

Δy_1 km	σy mm
73.6	
	1
96.8	
	2
110.0	
	3
119.7	
	4
120.0	