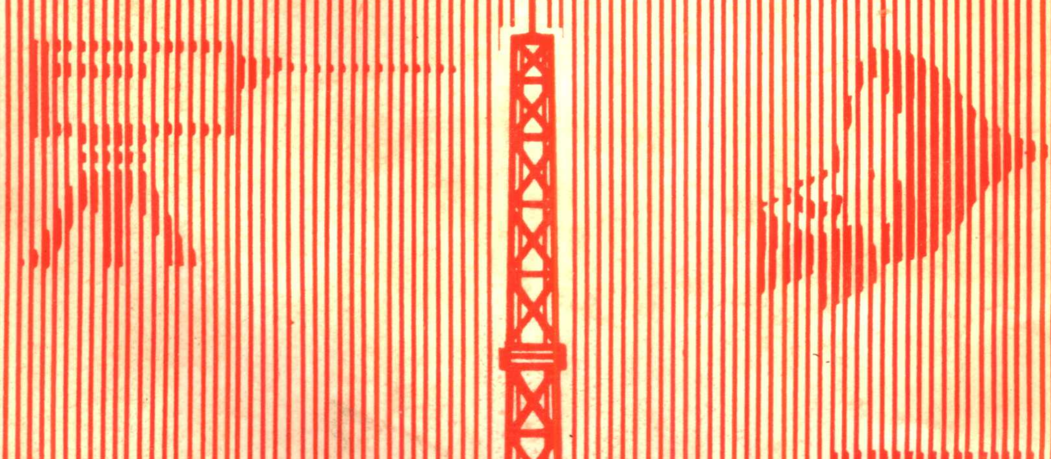
高等学校教材

计算机代数

袁仁保 编著



国防科技大学出版社

高等学校教材

计算机代数

袁仁保 编著

国防科技大学出版社

内 容 简 介

计算机代数是研究使用计算机进行公式推演的学科。本书的第一章介绍计算机代数的概貌。第二章系统地介绍REDUCE，它是一种可在微型机上运行的计算机代数语言。第三章介绍十一个应用实例，并附有实用程序。第四章和第五章介绍计算机代数语言实现技术。每章都有习题并给出了部分答案，附有参考文献。书末附有名词索引。

本书可用作计算机应用专业和软件专业高年级本科生和研究生的教材，亦可供有关科技人员参考。第二章和第三章可作为从事计算机科学与工程、数学、物理学、天文、力学、电学、生物、化学等学科领域工作的科技人员学习使用REDUCE的教材。

计 算 机 代 数

袁仁保 编著

责任编辑 何 晋

*

国防科技大学出版社 出版发行

国防科技大学印刷厂印刷装订

*

开本：787×1092 1/16 印张：15 字数：347千字

1989年12月第1版第1次印刷 印数：1—1500册

ISBN 7-81024-085-4

TP·17 定价：3.00元

出　版　说　明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次，不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲议中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材系按电子工业部制定的工科电子类专业教材1986～1990年编审出版规划，由“计算机与自动控制”教材编审委员会“计算机”编审小组组织征稿、评选、推荐出版的。

本教材由江西工业大学计算机系袁仁保教授编著，由哈尔滨工业大学计算机系郭福顺教授担任主审，中国人民解放军国防科学技术大学计算机系陈火旺教授担任责任编委。

本教材可供计算机及应用专业或软件专业本科生和研究生的计算机代数课程使用，参考时数为40学时。其主要内容有：

第一章，引论：计算机代数的研究对象，发展概况。

第二章，计算机代数语言REDUCE：REDUCE的语句、命令。

第三章，计算机代数应用。

第四章，计算机代数语言实现基本技术：长数运算，多项式运算，因式分解，模式匹配法，规范化简器，代数扩域法，自由变量的编译。

第五章，符号微分和符号积分：符号微分和符号积分的实现技术。

每章都有习题并给出了部分答案，其中带*号的题是为研究生准备的。各章都附有参考文献。书末附有名词索引。

在使用本教材时，删去第2.7节不会影响后续章节的学习；对于学过一种计算机语言的学生，可将第2.1节和第2.2节作为自学材料。

本书的第一章至第三章可作为非计算机专业的科技人员学习REDUCE的教材。

本书介绍计算机代数的语言、应用及实现。学过数据结构和编译原理的读者在学完本课程后将具有设计并实现一个计算机代数系统的基本知识。

郭福顺教授和陈火旺教授为本书提出过许多宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。由于编著者水平有限，目前国内外又无计算机代数课程的教科书可以借鉴，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编著者

1989年1月12日于南昌

（邮政编码：330029）

目　　录

第一章　引　论

1.1 计算机代数的研究对象

第一台计算机是为进行数值计算而研制的。今天，使用计算机进行数值计算是众所周知的事了。那么，公式推演是否也能由计算机来完成呢？这是第一台计算机问世后不久就有人提出过的问题。

公式推演在科学研究、经济建设中是经常遇到的。众所周知，在编制计算数值解的程序之前，公式的推导和化简是不可少的。例如，应将

$$baac^2abac-\left(\frac{(ca)^3b^2}{3}+\frac{3(abc)^2ba^2}{4}\right)a+0abc^7+\frac{3(ab)^3(ac)^2}{2} \tag{1.1}$$

化简为

$$\frac{a^4b^2c^2}{12}(9ab+8c) \tag{1.2}$$

有时所求的结果不是数值而是一个函数表达式或任意的符号表达式。例如，求一个函数的不定积分、求一个微分方程的解析解、将一个函数展开成泰勒级数或富里哀级数。即使是在需要数值解的情况下，由于数值计算会产生误差，而估计误差通常是很困难的；因此应尽可能先求得解函数。如果能先求得解函数，然后再按解函数计算就能得到更精确的数值解。总之，公式推演是经常遇到的，难于避免的。

1953年出现了第一个能推导符号微分的程序。现在已有了能求不定积分甚至微分方程的解析解的计算机语言了。经过三十余年的发展，逐渐形成了计算机科学的一个新分支，这就是计算机代数。

计算机代数(Computer Algebra)，也叫做符号与代数处理(Symbolic and Algebraic Manipulation)、符号与代数计算(Symbolic and Algebraic Computation)、符号数学计算(Symbolic Mathematical Computation)，国内曾经称之为公式推演(Formula Manipulation)。

计算机代数是一门研究使用计算机进行公式推演的学科，研究公式推演的算法和计算机语言与系统。计算机代数研究的对象包括各种数学表达式的化简、多项式的四则运算和求最大公因式、因式分解、常微分方程和偏微分方程的解函数、各种特殊函数的推导、函数的级数展开、符号矩阵和行列式的各种运算、线性方程组和高次方程的符号解、矢量运算、张量运算等等。由上可知，计算机代数所研究的对象不限于数学上代数学科的内容，而且包括了所有数学方面的符号演算的内容。

计算机代数与数学上的代数不同，这不仅表现在前者所涉及的数学问题比后者广泛，而且表现在研究的角度不同。代数可能满足于问题解的存在性；而计算机代数则要求给出问题解的具体函数形式，因而要研究求解的算法，并注意算法的效率。

计算机代数演算与数值计算也是不同的。例如，计算 $a(b+c)$．在数值计算时一般先计算括号内的和$b+c$，然后再将和与 a 相乘。而在计算机代数演算时，$b+c$是个符号和式，并不能"真正"加起来。因此，只能将$a(b+c)$展开成$ab+ac$，或者保留原状(在因式分解时）。又例如，用数值计算不可能将式(1.1)化简为式(1.2)．而计算机代数演算却可通过下述步骤，将式(1.1)化简为式(1.2)：

$$baac^2abac-\left(\frac{(ca)^3b^2}{3}+\frac{3(abc)^2ba^2}{4}\right)a+0abc^7+\frac{3(ab)^3(ac)^2}{2}$$

$\Big\downarrow$ 展开和式括号

$$baac^2abac-\frac{(ca)^3b^2a}{3}-\frac{3(abc)^2ba^2a}{4}+0abc^7+\frac{3(ab)^3(ac)^2}{2}$$

$\Big\downarrow$ 消去乘积的括号

$$baac^2abac-\frac{c^3a^3b^2a}{3}-\frac{3a^2b^2c^2ba^2a}{4}+0abc^7+\frac{3a^3b^3a^2c^2}{2}$$

$\Big\downarrow$ 各因式按字母顺序排列

$$aaaabbc^2c-\frac{a^3ab^2c^3}{3}-\frac{3a^2a^2ab^2bc^2}{4}+0abc^7+\frac{3a^3a^2b^3c^2}{2}$$

$\Big\downarrow$ 合并同类因式

$$a^4b^2c^3-\frac{a^4b^2c^3}{3}-\frac{3a^5b^3c^2}{4}+0abc^7+\frac{3a^5b^3c^2}{2}$$

$\Big\downarrow$ 将各项按字母顺序降幂排列

$$-\frac{3a^5b^3c^2}{4}+\frac{3a^5b^3c^2}{2}+a^4b^2c^3-\frac{a^4b^2c^3}{3}+0abc^7$$

$\Big\downarrow$ 合并同类项

$$\frac{3a^5b^3c^2}{4}+\frac{2a^4b^2c^3}{3}+0abc^7$$

$\Big\downarrow$ 消去系数为0的项

$$\frac{3a^5b^3c^2}{4}+\frac{2a^4b^2c^3}{3}$$

$\Big\downarrow$ 通分

$$\frac{9a^5b^3c^2+8a^4b^2c^3}{12}$$

$$\Big\downarrow \text{因式分解}$$

$$\frac{a^4b^2c^2}{12}(9ab+8c)$$

如果将数值计算比作为初等数学中的算术运算，那么计算机代数则可比作为初等数学中的代数运算。

1.2 计算机代数系统及应用

计算机代数语言是用于公式推演的语言，现在世界上有六十余种，它们可分为两大类：

第一类是通用系统，它们有较强的公式推演能力。最著名的是美国麻省理工学院的MACSYMA、兰德公司和犹他大学的REDUCE、IBM公司的SCRATCHPAD、加州理工学院的SMP、威斯康星大学的SAC，还有美国软件栈公司的muMATH. 我国江西工业大学研制的CASC(Computer Algebraic and Symbolic Computation)也已投入运行。

第二类是专用系统。这类系统是为解决数学、物理、理论化学或其它学科中的问题而专门研制的。例如，用于量子电动力学的ASHMEDAI、用于月球理论和广义相对论的CAMAL、用于高能物理的SCHOONSCHIP、用于张量处理的SHEEP、用于天体力学的TRIGMAN、用于求有理函数方程的解的ALTRAN，等等。

有一些计算机代数语言可在微型机上运行。例如，muMATH和REDUCE均可在IBM-PC/XT上运行。

为说明计算机代数语言的特点，下面举几个用REDUCE进行公式推演的例子。

例 1.1 计算偏微商

$$\frac{\partial(\sin(x)e^yz^4+\log(xyz))}{\partial x^2\partial y\partial z^3}$$

的REDUCE语句和输出的结果分别是

```
1: df (sin(x)*e**y*z**4+log(x*y*z),x,2,y,z,3);

        Y
 -24*E     *SIN(X)*Z
```

其中，冒号之前的自然数是语句序号（系统提示符），冒号与分号之间是REDUCE语句，分号之后（另起一行）是演算结果。语句和分号是用户输入的，在输入分号后还须按回车键(↲)才会出现结果。

例 1.2 计算偏微商

$$\frac{\partial\log(xy+z)}{\partial x^2\partial y\partial z^3}$$

的REDUCE语句和输出的结果分别是

```
2: df(log(x*y+z),x,2,y,z,3);

              3    3         2    2             2        3         8    8          7   7
(24*Y*( - 3*X  *Y  - 4*X  *Y  *Z  +X*Y*Z  +  2*Z ))/ (X  *Y  + 8*X *Y *Z +

      6    6   2       5    5   3          4    4    4           3    3   5         2    2
  28*X  *Y  *Z   +56*X  *Y  *Z    +  70*X  *Y  *Z  + 56*X  *Y  *Z   +  28*X  *Y  *

  6              7    8
  Z   + 8*X*Y*Z  + Z  )
```

例 1.3 计算不定积分

$$\int 2x^2e^{ax}\sin(x)dx$$

的REDUCE语句和输出结果分别是

```
3:   int(2*x**2*e**(a*x)*sin(x),x);

     (A*X)                     4    2                 3                 2    2
(2*E       *( -COS(X)*A  *X  +4*COS(X)*A  *X  -2*COS(X)*A  *X  - 6*COS(X

                   2                        2                          5    2
              )*A   + 4*COS(X)*A*X  -COS(X)*X   + 2*COS(X)+SIN(X)*A   *X

                          4                 3    2                 3
              -2*SIN(X)*A  *X  + 2*SIN(X)*A  *X  + 2*SIN(X)*A  +SIN(X)*A

                2                                      6       4       2
              *X  - 6*SIN(X)*A + 2*SIN(X)*X))/ (A  + 3*A  + 3*A  + 1)
```

使用REDUCE也可计算数表达式的值，这时所得结果是无误差的。

例 1.4 求含长数表达式的值

```
4: 12345678901234567890
   +112233445566778899*998877665544332211;
112107482103741000123582642475383579
```

例 1.5 计算含分数的表达式的值

$$\frac{3}{11}+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\times\frac{2}{7}$$

REDUCE语句和输出的结果分别是

```
5:   3/11+(1/3-5/6)*2/7;
10/77
```

从上面的例子可以看出，计算机代数语言多数是会话型的面向数学问题的语言。它们的输出几乎和通常的数学式子完全一样；而它们的输入也很 简 单 明 瞭，用户极易掌握。应指出，事实上计算机代数语言的语句分为两类：一类是面向数学问题的，用户使用它们可直接求解数学问题，而无须考虑问题的求解算法；另一类是一些基本语句，它们构成程序设计语言，用户使用它可编制求解数学问题的程序或给系统加入新的面向数学问题的语句。因此，计算机代数语言既是一个数学问题求解系统或说数学专家系统，又是一个可用于公式推演的高级程序设计语言。

由上述例子还可看出：计算机代数语言不仅具有符号演算的能力、而且还具有对数

值进行精确无误差计算的能力。因此它比数值计算语言更复杂，而且会有许多不同之处。设计与实现计算机代数语言时会遇到难以处理的问题。例如，计算机代数语言所得到的结果应是最简单的数学表达式。但是，什么是最简单的数学表达式？不同的用户会有不同的理解、不同的要求。这是因为一个数学表达式可以有许多不同形式的恒等表示，用户可以挑选而造成的。例如

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3=(a^2+b^2)(a+b)$$

有三个不同形式的恒等表示，不同用户的选择很可能是不同的。

计算机代数有着广泛的应用，应用范围从纯数学直至工业部门。例如，它已用于数论、射影几何、特殊函数、微分方程、天体力学、相对论、高能物理、理论物理、等离子体物理、电动力学、流体力学、理论化学、教育等学科，也已用于船体设计、直升飞机设计、电子显微镜的设计、机器人的手臂运动、轴采矿工厂的设计等等工业部门。计算机代数又和计算机科学技术内其它分支，如程序设计语言、编译原理、抽象数据处理、软件工程、人工智能、算法设计与分析、计算机用于教育等等有着广泛的联系。下面举两个实际应用的例子，它们在计算机代数的发展史上曾起过重要的作用。

例 1.6 月球轨道的计算

推导月球轨道作为时间的函数的公式是相当复杂的工作。1847年法国天文学家C.Delaunay开始推导这种公式。他花费了十年时间才得到结果，然后又花费了十年时间验算他的结果，直到1867年才公布了他所得到的计算公式。这在科学史上是个卓越的成就。一百多年来，人们使用它来计算月球的位置。1970年美国西雅图波音科学研究实验室的André Deprit等人想使用C.Delaunay的公式推导人造卫星的轨迹函数公式。为此，他们仅花费了二十小时的计算机时间，使用计算机代数语言重新推导了C.Delaunay的公式，结果发现了三处错误。他们的研究成果是计算机代数应用的一个有代表性的例子。

例 1.7 积分表的计算

积分表是物理学和工程的基石之一。但使用计算机代数，M.Klerer和F.Grossman发现：从1963年至1965年出版的八种常用积分表中，平均有10%的错误，最高错误率竟达25%。例如，1961年在英国出版的G.P.Bois的书“Tables of Indefinite Interals”的第113页有积分公式

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}\,(n\sqrt{x-b}+m\sqrt{a-x})}$$

$$=\frac{2\sqrt{a-b}\log\dfrac{m\sqrt{x-b}-n\sqrt{a-x}+\sqrt{(a-b)(n^2+m^2)}}{n\sqrt{x-b}+m\sqrt{a-x}}}{\sqrt{n^2+m^2}}$$

但用MACSYMA计算得

$$I=-\frac{2\log\dfrac{-m\sqrt{x-b}+n\sqrt{a-x}+\sqrt{(a-b)(n^2+m^2)}}{n\sqrt{x-b}+m\sqrt{a-x}}}{\sqrt{(a-b)(n^2+m^2)}}$$

可用手算来验证后者的正确性。

使用计算机进行数值计算节省了大量的人力物力，使用计算机进行公式演算同样会节省大量的人力物力，而且在某种意义下，用计算机进行公式演算所获得的成功标志着计算机“思考”数学问题正在由空想变成现实，科学计算正在经历一场革命。

1.3 计算机代数刊物和学术会议

美国计算机协会(Association for Computing Machinery，简称 ACM)的符号与代数处理专业委员会(Special Interest Group on Symbolic and Algebraic Manipulation，简称SIGSAM)是世界上最大的计算机代数学术团体。它出版季刊 SIGSAM Bulletin，该刊从1965年12月21日试刊后到目前为止，已正式发行23卷。从 1966年起，SIGSAM每五年召开一次大型的学术会议。从1986年起，改为每隔一年召开一次。第一次会议于1966年 3 月29日至31日在美国首都华盛顿举行。去年的会议是 7 月 4 日至 8 日在意大利的首都罗马举行的。每次会议都由ACM出版会议录。

思 考 题

1. 计算机代数与数学的联系、差别是什么?
2. 计算机代数语言是否一定要具有对数值进行精确无误差计算的能力？为什么?
3. 计算机代数的应用将会对科学研究和工程设计起什么作用?

参 考 文 献

[1] Van Hulzen, J.A., Calmat, J., Computer Algebra System, in [7].

[2] Calmet, J., Van Hulzen, J.A., Computer Algebra Applications, in [7].

[3] Barr, A., Feigenbaum, E.A., The Handbook of Artificial Intelligence, Vol.2, William Kaufman Inc., Los Altos. California, 1982.

[4] Deprit, A., Henrard, J., Rom, A., Lunar ephemeris: Delaunay's theory revisited, Science 168, 1970.

[5] Wang, P.S. (ed), Proceedings of the 1981 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, 1981.

[6] Char, B.W. (ed), Proceedings of the 1986 Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, 1986.

[7] Buchberger, B., ed al. (ed), Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation (Second Edition), Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] 衷仁保，计算机代数——关于计算机公式推导的学科，计算机研究与发展，第21卷第10期，1984年。

[9] 衷仁保，公式推演（计算机代数），计算机世界，1987年 3 月 8 日。

第二章　计算机代数语言REDUCE

本章介绍计算机代数语言REDUCE，所有例子都是REDUCE3.2在微型机IBM—PC/XT上运行的实例。由于REDUCE不仅在几种大型机上运行，而且在微型机上运行，因此它是流行较为广泛的一种计算机代数语言。

1974年A.C.Hearn等人设计并实现了REDUCE2，此后，REDUCE不断被改进。本教材使用的是最新的REDUCE3.2版本。

2.1　数、变量和表达式

2.1.1　REDUCE的字符集

REDUCE的字符集包括55个字符，语法可用巴科斯范式描述如下：

<字符>::=<字母>|<数字>|<算术运算字符>|<比较运算字符>|<特殊字符>

<字母>::=A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M|
　　　　N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z

<数字>::=0|1|2|3|4|5|6|7|8|9

<算术运算字符>::=+|-|*|/

<比较运算字符>::=>|<|=

<特殊字符>::=(|)|,|.|:|;|"|'|!| |$|%

特殊字符所枚举的第十个字符是“空格”字符。从语法上看，REDUCE不允许小写字母；但事实上，REDUCE允许用小写字母输入，这时系统自动地将小写字母转换成大写字母。此外，在某些计算机上运行的REDUCE版本使用更大的字符集。

2.1.2　数、算术运算

REDUCE有两类数：整数和实型数。

<无符号数>::=<数字>|<无符号数><数字>

<整数>::=<无符号数>|+<无符号数>|-<无符号数>

例如，-2,000,+5396,123456789123456789等等都是整数。在原则上整数可以是任意位长的；事实上，在不同的计算机上运行的REDUCE不同版本都规定了自己的整数的最大长度。

<定点数>::=<整数>.|<整数>.<无符号数>

<浮点数>::=<定点数>E<整数>

<实型数>::=<定点数>|<浮点数>

例如,32.1,-32.1,+32.1都是定点数。注意:321.也是符合语法的定点数。而0.321E3和3210E-1都是浮点数。以上列举的数都是实型数。实型数一定带有小数点。

<数>::=<整数>|<实型数>

按照语法,.5,-.11,+.24,1.2E0.5,+1.2E0.5都不是REDUCE的数,如果将它们当作数使用则会发生错误。

算术运算符+、-、*和/依次表示四则运算加、减、乘和除。REDUCE是一种计算机代数语言,对数进行精确运算。当两个整数进行加、减和乘运算时所得结果是整数。当两个整数相除时是消去公因数,得到的结果是个精确的既约分数或整数。下面是整数进行四则运算的实例。冒号之前的自然数是语句序号,是由系统自动给出的提示。冒号与分号之间的字符串是用户从键盘上输入的。分号与下一个语句序号之间是计算结果。

```
1:  1234+2345;

3579

2:  -1234--2345;

1111

3:  -1234*-34;

41956

4:  -1234/-34;

617/17
```

在两个实型数进行四则运算时,先将它们化为精确的分数,然后再运算,所得的结果一般为既约分数,但也可为整数。

```
5:  32.1+11.1;

*** 32.1 REPRESENTED BY 321/10

*** 11.1 REPRESENTED BY 111/10

216/5

6:  32.1-11.1;

*** 32.1 REPRESENTED BY 321/10

*** 11.1 REPRESENTED BY 111/10

21

7:  32.1*11.1;

*** 32.1 REPRESENTED BY 321/10
```

```
*** 11.1 REPRESENTED BY 111/10

85631/100

8: 32.1e-2/11.1e5;

*** 0.321 REPRESENTED BY 321/1000

*** 1110000.0 REPRESENTED BY 1110000

107/370000000
```

在带三个星号的行上，系统给出代换实型数的分数。事实上，在进行运算前，REDUCE将实型数都化为等值的分数或整数。不言而喻在同一个式子里同时出现整数和实型数是允许的。

```
9: 32.1e-1-1;

*** 3.21 REPRESENTED BY 321/100

221/100
```

以上的例子中数都不长，下面举两个长数运算的例子。

```
10: 333+1234567890123456789012345678 90
10: *987654321098765432109876543210;

12193263113702179522618503273362292333 22
374638011112635272 38

11: 987654321/1234567890123456789 0;

109739369/137174210013717 4210
```

再举一个计算含分数式子的例子。

```
12: 1/11-(1/3+1/6)*1/7;

3/154
```

由上述例子可以看出：

1. REDUCE可以进行任意长数的算术四则运算；
2. 实型数在运算前都要化为等值的分数。因此，能用整数或分数表示时就用整数或分数形式，以提高运算速度；
3. 使用分数运算可获得精确结果，但必须强调：REDUCE并未定义分数。以前提到的“分数”实际上都是REDUCE的除式。由于REDUCE进行精确运算，两数相除得到既约分数后不能再化简（不能化为近似值），因此呈现在用户面前的是“分数”形式。在进行语法分析时务必注意这点。

2.1.3 标识符

标识符的语法是

<标识符>::=<字母>|<标识符><字母>|<标识符><数字>

标识符是以字母开头的字母数字串。在多数系统中标识符可长至24个字符，但在IBM—