微机模糊控制

陈理君　符健豪　编著

WEIJI MOHU KONGZHI

武汉工业大学出版社

微机模糊控制

陈理君　符健豪　编著

武汉工业大学出版社

鄂新登字13号

内 容 简 介

全书共十三章，绪论中阐述了微机Fuzzy（模糊）控制产生的必然性、应用概况和发展趋势。前五章介绍学习Fuzzy控制理论必备的数学基础。后八章主要介绍典型Fuzzy控制器的工作原理及其设计方法、Fuzzy系统辨识及预测、算法简化型Fuzzy控制器、高性能Fuzzy控制器、硬件逻辑电路直接构成的Fuzzy控制器、Fuzzy控制器的性能分析及其调整等内容，并给出多个应用实例供读者学习参考。

本书不仅可作为大专院校自动化、计算机应用、生产过程控制、自动化仪表以及其他有关电类专业本科生、研究生、教师教学用书，还可供有关研究人员和工程技术人员作为自学读本或培训教材。

微机模糊控制
陈理君 符健豪 编著

武汉工业大学出版社出版发行
新华书店湖北发行所经销
仙桃市新华印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/16 印张：14.5 字数：297千
1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷
印数：1—3 000
ISBN 7—5629—0666—1/TP·12
定价：3.80元

前 言

众所周知，自从1965年L.A.Zadeh创立模糊集合论以来，短短的26年中，它的理论和应用都得到了飞速的发展。模糊集理论已广泛应用于系统工程、信息处理、控制工程等领域，并接二连三地取得辉煌而惊人的成果。

翻开近千页第的三届世界模糊系统协会大会（Seattle,1989.8）的论文选集的首页，醒目地见到这样一条标语：The Coming of Age of Fuzzy Logic。这预示着模糊集理论及其应用的研究将要从逻辑方面出现一个新的突破，产生一个更大的飞跃。

近年来，模糊集理论，随着微机控制的日益普及，越来越显示出它无限生命力和广阔的应用前景，特别是微机模糊逻辑控制技术的应用，已渗透到诸如军事、工业、农业、交通运输、生产管理、家用电器、能源开发利用等重要领域中。因此学习和掌握微机模糊控制理论和应用技术，已成为大专院校有关师生及广大工程技术人员的迫切需要，为此，我们编著了"微机模糊控制"一书，仅供读者在学习和工作时参考。全书总共十三章。绪论部分阐述模糊控制产生的必然性、应用概况和发展趋势。第一章至第五章为第一部分，它是模糊控制理论的数学基础，在注意其系统性前提下，着重介绍有关模糊数学基本内容。第六章至第十三章为第二部分，它是模糊控制原理与应用内容，除叙述其工作原理外，着重介绍Fuzzy控制器的几种类型的设计方法及其性能分析，最后介绍三个典型的应用实例。

本书内容作为武汉工业大学自动化系本科生及计算机应用和自动化研究方向的硕士研究生一门正式课程，作者主讲过多遍，经多次修改和补充后成为现在章节内容。书中有些章节直接引用了田方成、张俊福、区奕勤、张文修、黄道平、李宝绥、庞富胜、李友善、刘志俊、罗承忠、罗安、黄金丽、鲍新福、傅春生、邓聚龙、夏永伟、汪培庄、韩立岩、孙熊岳、周贤光、陈哲、李安华等的论著和文章内容，谨表衷心感谢。

本教材编写宗旨是力求从工程技术角度出发，突出基本理论、基本概念和基本方法。叙述力求简练，深入浅出。选材瞄准实用，注意理论与应用结合，设计与实践结合以及及全书的系统性、实用性和先进性。

北京师范大学罗承忠教授、中国科学院夏永伟研究员和武汉工业大学朱家万教授主审了本书的手稿，北师大韩立岩博士和上海纺织工专陈政君副教授对本教材作了评阅，他们诸位都提出了许多宝贵的意见和建议，对本书的修改定稿作出了珍贵的贡献，在此编者向他们表示最诚挚的谢意。

在编写本书过程中，自始至终得到国家建材局信息中心处长符健豪高级工程师的热忱支持，他还特意为本书编写了第十三章应用范例。另外，还得到李中南讲师、我的研究生项明、陈伟、肖忠和本科生陈韶频同学等多人在习题验算、绘图、腾写上的协助，编者谨此致谢。

因付印匆促，同时限于编者的水平，书中错误和不妥之处在所难免，敬请读者和各行专家、学者批评指正。

编著者

1992年4月于武汉工业大学

本书使用符号表

一 概念符号

模糊集合(Fuzzy Sets)	F集
普通集合	P集
论域	U、V、X、Y
普通集合	A、B、C
元素	u、v、a、b、c
特征函数	$\chi_A(u)$、$\chi_B(u)$
空集	ϕ
幂集(U的一切子集所组成集合)	$\boldsymbol{P}(U)$
F集	$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$
隶属度	$\mu_A(u)$、$\mu_B(u)$
U上的模糊集合的全体	$\boldsymbol{F}(U)$、$\boldsymbol{L}(u)$
	$A(u)$、$B(u)$
λ-截集	$A_\lambda=\{x\mid\mu_A(x)\geqslant\lambda\}$
支集	$supp$
上确界	sup
下确界	inf
模糊矩阵	$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{S}$、$\underset{\sim}{Q}$
集合直积	$A\times B$
普通关系	R、Q
模糊关系	$\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{Q}$
映　射	$\underset{\sim}{f}:U\to V;x\to f(x)$
模糊映射	$f:\underset{\sim}{A}\to f(\underset{\sim}{A})$
模糊变换	$\delta:F(U)\to F(V)$
普通扩张原则	$f:P(U)\to P(V)$
模糊扩张原则	$f:F(U)\to F(V)$
	$\underset{\sim}{f}^{-1}:F(V)\to F(U)$
$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的贴近度	$\delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$、$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$
外积	$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$
内积	$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$
模糊度	$D(\underset{\sim}{A})$
模糊积分	$\underset{\sim}{\int}$
以右边定义左边	$\triangleq$
A的λ截集	$A_\lambda=\{u\in U;A(u)\geqslant\lambda\}$
A的λ强截集	$A_{\lambda\cdot}=\{u\in U;A(u)>\lambda\}$
集合套的全体	$\boldsymbol{H}(x)$
$\underset{\sim}{R}$在x处的截影	$\underset{\sim}{R}\vert_x$
F集A的高度	$hat\ \underset{\sim}{A}$
偏差	E、$\tilde{e}$
偏差变化率	C、CE、$\dot{e}$
偏差累加(积分)	M、Σe
$\underset{\sim}{A}$的核	$Ker\ \underset{\sim}{A}$

二 运算符号

属于	$\in$
不属于	$\overline{\in}$
存在x属于A	$\exists x\in A$
包含	$\subseteq$
真包含	$\subset$
若P成立，则Q成立	$P\Rightarrow Q$
并	$\cup$
交	$\cap$
补	c
直积	$\times$
取大	$\vee$; max
取小	$\wedge$; min
连续作“并”运算	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$
连续作“交”运算	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$
连续取大	$\bigvee\limits_{i=1}^{n}$
连续取小	$\bigwedge\limits_{i=1}^{n}$
合成“$\vee$—$\wedge$”	$\circ$
对任意Y	$\forall Y$
矩阵拉直	$\vec{A}$

目 录

绪 论

绪　论

1.自动控制系统中存在着Fuzzy性问题

本世纪40年代发展起来的自动控制理论经历了几个时代之后已日臻完美，几十年来，它在实际应用中也取得了令人瞩目的硕果。然而，长期以来，以往的控制论在处理现实世界中许多“亦此亦彼”模糊现象的控制问题暴露了它的局限性，这也是现代控制理论在许多复杂系统难以付诸实现的主要原因之一。对于控制问题而言，系统的模糊性主要来自以下几个方面：

（1）建立被控制对象数学模型时存在模糊性：实际上，对于一些复杂系统，真正掌握系统的动态特性一般是很困难的。然而，为了运用经典或现代控制理论去实现系统的设计和综合，人们往往不得不采用一些简便的方法去建立系统的数学模型。但实际上，这种模型通常很难真实地描叙系统特性。原因主要有：模型的近似化（集中，定常参数，线性化等）、高阶系统的降阶模型、大系统的人为分割、参数估计的误差等等。可见这些都包含着一定程度的模糊性。另一方面，并不是所有的系统都能实现这种模型（低阶，线性，集中参数和非时变等）简化处理的。

（2）测量信息存在模糊性：对于许多复杂系统，一些重要的系统特性直接相关的参数在现有的检测技术条件下是不可测或测不准的。倘若对被控对象的机理不明，间接可测参数与直接不可测参数不能达到一一对应这种情况下，构造出来的控制系统的模糊性是不 言 自 明的。

（3）设计控制目标函数时存在模糊性：由于对一些复杂系统的动态行为不明了，或者为了控制系统实现的方便，人们往往把系统的多项目标设计问题转化为单一目标或少项目标的函数极值问题，并常常忽略许多约束条件，即使给出约束条件，也难免含有一定的模糊性。

2.Fuzzy集理论为问题求解奠定了基础

60年代中期问世的模糊理论为刻划客观世界中的模糊现象奠定了令人鼓舞的理论基础。模糊集理论并非提倡模糊思维，也没有要将我们的理论模糊化，或者说从本质上要去实现不精确的内含。相反，它是一种精辟的论说。模糊集理论所指的模糊性，即不够精确性是针对在所划分的类别与类别之间无明显的隶属到不隶属的转折。事实上，在客观世界中绝大部分的事物，说它们属于某一类或不属于某一类都不存在明显的分界线。

模糊集理论中模糊度仅仅是用来突出人类思维、概念和语言的一种元素，因为人脑通常是以不精确，非量化和模糊的方式进行思维及推理的。然而，也只是由于这种方式使人们具备了在模糊信息的环境下能够概括有用信息，并集中主要相关的方面做出决策的能力。而对于这种处理和解决问题的方式，无论用经典的还是现代的控制理论方法都是无法做到的。

实际上，复杂的过程常常是非线性和高维的多变量系统。为此，很难用解析的数学方法去描述。相反，大量有关过程的知识只能用语言的形式表白陈述。如果坚持要用既精确又有意义的数学方法刻划这类过程，其结果必将是随过程复杂性的增加，刻划的难度大 幅 度 上

升。而且，正如zadeh所提出的互克性原理，系统的复杂性愈高，描述其精确且有意义的程度就愈低，直到一个阈值，超过它，其精度与有意义两者是相互排斥的。

模糊控制技术是70年代初开始发展起来的。它产生和发展的主要原因在于对那些时变的非线性的复杂系统，无法获得精确的数学模型时，利用模糊控制能取得较好的效果。因为这些过程有大量的以定性的形式得到的先验信息以及仅仅是语言上规定的性能指标，并且，有时要求过程操作人员是系统的基本组成部分，所有这些都有不精确性的特点。应用现代控制理论是很难实现控制的，由人去操作却往往容易做到。这是因为过程操作人员的控制方法是建立在直观的和经验的基础上，他们凭借实践积累感性知识，“察言观色”，采取适当的对策完成控制任务。

模糊集理论之所以发展如此迅速，是因为它符合了人类对客观规律的认识。当人们对一个问题的研究越深入，面临的对象也就越复杂，影响因素越多，所涉及到的细节也越多。当忽略了一些细节在压缩了的低维空间上进行观察时，原本明确的概念也就变得不确定和模糊了。人类思维具有判别和处理不精确信息并从中得到具有一定精度结论的能力。模糊集理论能从数学的角度描述人脑的这种能力，从而为问题求解“智能化”奠定了基础。这也是它在控制、决策、学习、分类、诊断等智能应用领域中独占鳌头的根本原因。

3.Fuzzy控制工作原理初步介绍

某些工业过程难以实现自动控制，其困难可能来自难以对某一具体过程建立数学模型，以及由于过程的非线性、时变特性或者难以测量等等，然而这些难以自动控制的生产过程由人来控制却往往工作得很出色。

一般说来，操作人员的控制方法建立在直觉和经验之上，于是把人的控制经验归纳为用定性描述的一组条件语句，然后利用模糊集理论将其定量化，使控制器得以接受人的经验、模仿人的操作策略，这样就产生了模糊控制方法，这种方法可看成是一组探索式的判定规则，它有如下特点：

(1) 由于在人脑判定的过程中存在着不精确这个固有特性，使人的控制动作往往不稳定、不一致以及主观随意，因此也就很难精确解释操作人员的控制行为。

(2) 操作人员不但能对温度、高度等简单的度量作出反应，而且能观察诸如颜色、气味等、复杂的度量模式，甚至对无法度量的量例如相貌也可作出反应。这些观察均有它的主观性，但作出控制判定正是基于这些带有主观性的量。

一个有实际经验的控制工作者，通过对控制动作的观察、以及与操作人员交谈讨论，就能把操作人员的控制策略描述出来。所得到的是一组用语言表达出来的定性的不精确的判定规则。应用模糊集理论，构成一组条件语句规则，称为模糊控制规则，再运用计算机来模拟近似人脑的推理的方法进行观测与控制，从而构成模糊控制器，这种工业过程避开了用状态方程与传递函数表述，其工作原理如图1所示，具体控制过程是这样的：
如被控对象为一水箱（水温控制），人们已有这样的控制经验：“若水温偏高且温度不太上升则加一些冷水”；“若水温偏高且温度上升很快则多加一些冷水”；等等。这就是F控制规则，存在人脑中的“经验”，现已存放在“电脑”中。然而检测温度传感器输出是精确量(如mv数)，要把它转换成温度高、偏高、偏低等F语句，就要Fuzzy化。否则无法运用“规则”，另外，“多加些冷水”；“少加些冷水”是Fuzzy语句，最终得落实打开冷水阀门的大小，倒底开启几度，要精确量，故要Fuzzy决策，确定控制输出具体量值。

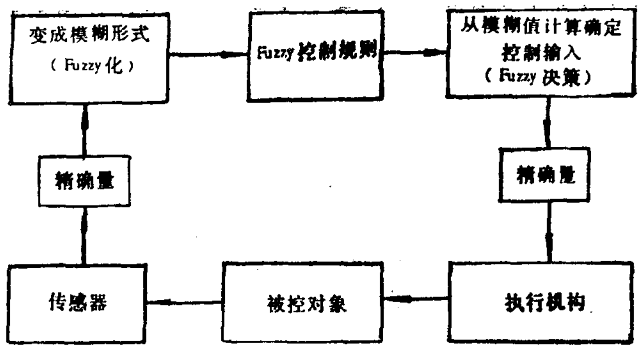

图1

实验表明模糊控制有以下几个特点：

①它不需要建立被控制对象的数学模型；

②它也能实现对时变非线性系统的控制；

③模糊控制对参数的变化有较强的适应性，对参数不敏感；

④控制质量高。

模糊控制理论在控制理论领域中所占据的位置如图2所示。

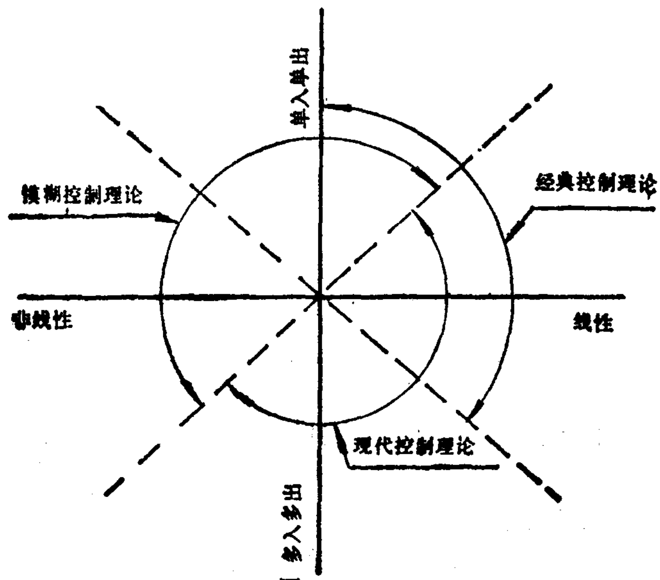

图2

显见的，F控制理论适用于线性的或非线性的单入单出和多入多出的被控对象。可控制领域复盖面极大，与现代控制理论相当，而控制算法及规则远比现代控制理论简单。

4.微机模糊控制技术的应用概况及其发展趋势

在自动控制领域中，对于难以建立数学模型、非线性和大滞后的控制对象，模糊控制技术具有很好的适应性。自从1974年E.H.Mamdani首先利用模糊集理论，进行蒸汽机和锅炉控制方面的研究并在实验室获得成功后，模糊控制技术的研究十分活跃。1980年丹麦F.L.Smidth公司第一个成功地将模糊控制技术应用到水泥窑炉自动控制中。自此后，模糊控制技术的应用日益广泛。在1987年第二届国际模糊系统学会会议上发表的研究成果中有关

控制、专家系统等应用研究成果占65%，与会代表一致认为，模糊系统的研究已经不是抽象的理论和思想，而是进入实用阶段。

模糊推理芯片和模糊计算机

在模糊控制中，模糊推理通常由微处理器或专用的模糊推理芯片完成。采用微处理器其推理水平一般为几个或几十个FLIPS（模糊推理速度），多数在工业过程控制中使用。但在机器人等要求高速工作的场合，通常采用专用的模糊推理芯片。1985年贝尔研究所的沪贝、杜边使用cmos数字技术，研制成功一秒钟进行8万次模糊推理（80KFLIPS）的VLSI模糊推理芯片，这个芯片使用4位离散数近似地表现〔0，1〕，规则数$N=16$。1988年 Rock Well公司国际科学中心的S.Chiu和沪贝推出模糊推理速度为250kFLIPS的模糊推理芯片。北加州大学的杜边用CAD完成能实现640kFLIPS的模糊推理芯片的设计和模拟。日本熊本大学的山川研制出10 MFLIPS的模糊推理芯片，这个芯片采用〔0v，5v〕的电压连续值表现〔0,1〕，是电压方式工作的芯片。日本东京法政大学工学部利用模糊触发电路开发出能记忆模糊信息的模糊存储器。1988年中国科学院半导体研究所王守觉、夏永伟等研制成功了多元逻辑（DYL）电路系列产品，共有20多个品种，DYL电路适用于二值、多值以及连续逻辑即模糊逻辑的运算处理。

1987年山川烈与日本立石电机公司合作，利用模糊推理芯片制作了一台模糊计算机。1988年山川烈又研制成功世界上第一个模糊计算机微处理器，这个微处理器采用一个叫“规则”，另一个叫“解模糊”两个芯片，不仅能象普通微处理器那样接受数字信息，而且能在模糊信息的基础上进行推理和运算，推理速度每秒一百万次。1988年，我国第一台模糊推理机，是在汪培庄教授指导下研制出来的，现陈列在北京师范大学数学系研究室，该模糊推理机是采用汪教授等人的数学构思和电路设计的，推理运算速度达到了每秒1.5千万次。目前他们又研制出一种多功能通用模糊卡（模板结构）可插入工业级计算机上，来实现对被控对象的模糊控制，从实验室运行情况看，确实控制质量高，鲁棒性好，工作稳定可靠，已达到实用阶段。1988年8月汪培庄教授在日本API Instruments公司，进行了基于他所提出的因素空间分析和真值流推理方案的规则模糊推理的硬件化研究，并完成了输入输出变数最大达2000个、能存储“IF X is A THEN Y is B”基本规则3万个左右的硬件和使它工作的软件STIm。日本法政大学1989年2月推出以32位微机为基础的适合模糊芯片开发的工作站。

通用模糊控制器及其软件的现状

模糊控制理论的早期应用是在一些特定对象的专用控制系统中，近年来通用模糊控制器的硬软件研究有了长足的进步。

日本立石电机公司1988年3月推出通用模糊控制器FZ-1000，1988年7月推出FZ-3000，1989年9月推出FZ-5000。FZ-3000使用专用模糊推理处理器，最高推理速度为1万FLIPS，控制周期约为2.5ms，I/0输入点数8端点，输出2端点，规则数最多128个，适合工业过程，机器人和一般机械控制使用。FZ-5000用专用模拟模糊推理芯片，最高推理速度约10万FLIPS，输入最多可达16端点，输出最多为12端点，适合机器人、超高速机械控制使用。1989年7月推出能在FC985、NEC PC9801RX/VX等工业级微机上工作的FS-2000型软件模糊系统，包含Max-Min等五种推理形式，推理速度约10ms（一个规则），控制周期可设定在1秒，输入端16点，输出4端点，适用于过程控制和模糊学习。

日本富士FARCOM公司1989年7月推出了MICREX-F500型模糊控制器，推理速度

为0.004秒/规则，控制周期0.2秒，输入为16端点，输出为4端点，规则数为128个，适合于过程控制用。

日本明电舍公司1987年4月推出明电模糊控制系统，由FA用微计算机μPORT-Ⅱ和模糊推理单元组成，推理速度为2～4ms/规则，控制周期为0.1～999.9s，可调，输入80端点，输出为38端点，规则数为250个，适合于工业过程和机器人控制使用。

日本奥井电机公司1989年6月推出FOC模糊控制系统FOC-98和FOC-2001AN，FOC-98推理速度1ms，控制周期0.01～999.9s，输入输出共12端点，规则数为128个。FOC-2001AH推理速度260μs，控制周期0.01～999.9s，输入3端点，输出1端点，规则数为64个，适合过程控制使用。

日本横河电机公司1989年10月推出模糊综合控制系统CENTUM-XL，控制周期在10s以上，输入输出达64端点，规则数为128个，适用于过程控制。该公司还推出一种利用模糊推理的具有过调量抑制功能的数字指示调节器UT-35和可编程调节器UP25。

英国Image Automation公司，在1989年，推出LINK MAN通用模糊控制器，计算机使用PDP11/73或者微机VAX-Ⅱ，输入输出接口最大可扩充到4096点，规则和控制用LCL控制语言。

APT仪器公司1989年推出采用专用硬件构成的3输入1输出通用模糊控制器。

上海仪器仪表工业公司职大都志杰等1987年研究成功使用单片机的比例因子式模糊控制器，1990年又研制出采用模糊决策算法的三回路模糊控制器。

北方工业大学计算机应用研究所田方成等在1989年，推出了自优化模糊控制器。

武汉工业大学自动化研究所，在1991年研究成功适用于建材行业生产过程自动控制的通用智能模糊控制模板：WUT-100F，WUT-200F和WUT-300F三种功能各异的板，它有标准接口，可插入STD BUS 工控机或全浮空STD BUS 工控机机笼内，构成微机模糊控制器。在1992年又研制出WHT-101Fuzzy调节器。

开发应用例

模糊控制技术目前已成功地应用在工业过程控制、设备控制、交通运输、机器人、家用电器等领域。诸如日本川崎铁厂的烧结均一性控制，日本电气玻璃公司的玻璃熔炉温度和液面控制，日本甜菜制糖公司的糖分抽出蒸馏塔控制，本溪钨钼厂九管还原炉选矿破碎过程控制，广州珠江水泥厂水泥回转窑自动控制，邯郸树脂厂PVC树脂聚合过程控制，黑龙江桦南县水泥厂干法水泥回转窑自动控制，张家口玻璃厂玻璃料道温度控制。

在设备控制方面，诸如，日本东京电力公司隧道挖掘装置控制，日本明舍公司的海底挖泥船控制，日本三菱电机公司的电梯群控管理，吉林工业大学的功率因数补偿控制器，东北工院的变频调速控制，冶金部金属制品研究所的全数字直流可逆调速系统的控制等。

在交通运输方面，诸如，日本日立系统研究所的列车控制系统，日本富士重工公司的汽车自动变速机构，日本日产汽车公司的汽车稳速行驶控制等。

其他方面，诸如日本东京法政大学的移动式机器人、往复式机器人控制、日本松下住宅设备公司的家用热水装置AX-1温控。

今后的发展趋势及研究课题

（1）在理论方面对规则型模糊推理方式进行整理，并对框架型其他推理方式进行研究；

（2）开发不需要预备知识就能组成控制系统的开发工具；

（3）在较大规模同时又很复杂的系统中推广应用；

(4) 对不受元函数束缚，能直接利用语言信息的控制方式进行研究；

(5) 对高速、不稳定系统的智能控制和非结构性系统的智能控制进行研究；

(6) 在硬件技术方面，从目前应用数字技术发展到应用模拟技术 光信息处理技术和神经网络技术；

(7) 设立将在控制领域中得到的成果推广应用到其它领域中去的大型研究方案。

第一部分　Fuzzy控制理论的数学基础——F集合与系统

第一章　F集合、分解定理与表现定理

§1.1　F子集及其表示法

设U表示一些对象的集合，称之为论域。对于U的一个子集A，我们可以用它的特征函$\chi_A(u)$数来表示。令

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1 & u\in A\\ 0 & u\in A^c\end{cases}$$

其中$A^c=u-A$，χ_A是定义于U上取值于$\{0,1\}$的函数，称为集合A的特征函数。若$\chi_A(u)=1$，则说u是A中的元素；若$\chi_A(u)=0$，则说u不是A中元素即“非此即彼”，由此出发我们给出模糊集合的定义。

F集

〔定义1-1〕　设U是论域，U上的一个模糊集合$\underset{\sim}{A}$由U上的一个实值函数$\mu_A:U\to[0,1]$示表。对于$u\in U$，$\mu_A(u)$称为u对$\underset{\sim}{A}$隶属度，而μ_A称为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。为简便计，常常用$A(u)$来代替$\mu_A(u)$。U上的模糊集合的全体记为$F(U)$。这样，对于论域U的一个元素u和U上的一个F子集$\underset{\sim}{A}$，不再简单地说u属于还是不属于$\underset{\sim}{A}$，而是说u在某种程度上属于$\underset{\sim}{A}$。隶属度$A(u)$正是u属于$\underset{\sim}{A}$的程度数量指标。若$A(u)=0$，则认为u完全不属于$\underset{\sim}{A}$；若$A(u)=1$，则认为u完全属于A；若$0<A(u)<1$，则说u在$A(u)$的程度上属于$\underset{\sim}{A}$，这时在完全属于$\underset{\sim}{A}$和完全不属于$\underset{\sim}{A}$的元素之间，呈现出中间过渡状态，或叫连续变化状态。这也就是$\underset{\sim}{A}$的外延表现出不分明的变化层次，表现出模糊性。即有“亦此亦彼”含意。

F子集的表示法

表示论域U上的一个模糊子集，原则上只需将每个元素$u\in U$附以该元素对模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度$\mu_A(u)$，然后将它们用一定形式构造在一起即可。下面为几种常用表示方法：

查德表示法

设论域为有限集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$\underset{\sim}{A}$为U上的一个F子集，论域U中的元素u_i，$i=1,2,3,\cdots,n$对F子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度为$\mu_A(u_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，查德将F子集$\underset{\sim}{A}$记为

$$\underset{\sim}{A}=\mu_A(u_1)/u_1+\mu_A(u_2)/u_2+\cdots+\mu_A(u_n)/u_n \tag{1-1}$$

或

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i \tag{1-2}$$

例如F集“几个”$\triangleq \underset{\sim}{s}$

$$\underset{\sim}{s} = 0.3/3 + 0.7/4 + 1/5 + 1/6 + 0.7/7 + 0.3/8$$

应该注意，上式记法不表示分式求和，只是用以说明$\underset{\sim}{A}$中有哪些元素，以及每个元素相应的隶属度是什么值。

若论域U为无限集，$\underset{\sim}{A}$可记为

$$\underset{\sim}{A} = \int_{\underset{\sim}{A}} \mu_A(u)/u \tag{1-3}$$

序隅表示法　向量表示法

这是一种查德表示法的简化法，用序隅表示$\underset{\sim}{A}$可记为

$\underset{\sim}{A} = \{(u_1, \mu_A(u_1)), (u_2, \mu_A(u_2)), \cdots, (u_n, \mu_A(u_n))\}$或用向量表示　$\underset{\sim}{A} = (\mu_A(u_1), \mu_A(u_2), \cdots, \mu_A(u_n))$。

具体给出隶属函数的解析式

当论域U为实数集R上的某区间时，直接给出F子集隶属函数的解析式，如“老年人”F子集$\underset{\sim}{O}$，其隶属函数为下式，图形如图1-1所示

$$\mu_0(u) = \begin{cases} 0, & \text{当}0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当}50 < u \leqslant 100 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{O} = \int_{50}^{100} \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} \Big/ u \tag{1-4}$$

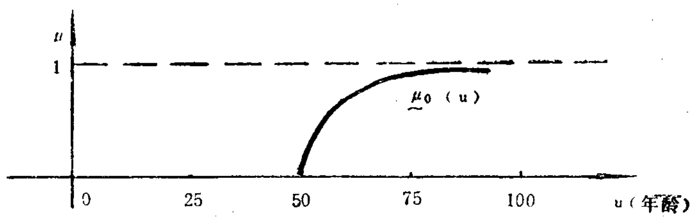

图1-1

§1.2　F集的运算及性质

定义模糊集合的运算方法，与定义普通集合运算方法一样，是利用运算模糊集合的隶属函数，来定义运算结果所得新模糊集合的隶属函数。两F集的具体运算，实际上就是逐点地对隶属度作相应的运算。现在，一般情况下仍沿用查德给出的定义。

〔**定义1-2**〕　设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in F(U)$，$\forall u \in U$

（1）$\underset{\sim}{A} = \phi$　当且仅当$\mu_A(u) \equiv 0$；

$\underset{\sim}{A} = U$　当且仅当$\mu_A(u) \equiv 1$。

（2）$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$　当且仅当$\mu_A(u) \leqslant \mu_B(u)$

称$\underset{\sim}{B}$包含$\underset{\sim}{A}$。

（3）$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$　当且仅当$\mu_A(u) = \mu_B(u)$

称$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$相等。

注意到$0\leqslant\mu_A(u)\vee\mu_B(u)\leqslant 1$；$0\leqslant\mu_A(u)\wedge\mu_B(u)\leqslant 1$；$0\leqslant 1-\mu_A(u)\leqslant 1$，我们有下面的定义

〔**定义1-3**〕 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathrm{F}(u)$，$\forall u\in U$，

（1）$\mu_{A\cup B}(u)\triangleq\mu_A(u)\vee\mu_B(u)$

称$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$为F子集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$之并集，$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$可记为

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\int_{u\in U}(\mu_A(u)\vee\mu_B(u))/u \tag{1-5}$$

（2）$\mu_{A\cap B}(u)\triangleq\mu_A\wedge\mu_B(u)$

称$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$之交集，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$可记为

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\int_{u\in U}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(u))/u \tag{1-6}$$

（3）$\mu_{A^c}(u)\triangleq 1-\mu_A(u)$

称$\underset{\sim}{A}^c$为$\underset{\sim}{A}$的补集，$\underset{\sim}{A}^c$可记为

$$A^c=\int_{u\in U}(1-\mu_A(u))/u \tag{1-7}$$

F集的并、交运算可推广到任意多个，设$A_t\in\mathrm{F}(u)t\in T$（$T$为指标集），则定义：

$$\mu_{\underset{t\in T}{\cup}A_t}(u)=\bigvee_{t\in T}\mu_{A_t}(u)=\sup_{t\in T}\mu_{A_t}(u);$$

$$\mu_{\underset{t\in T}{\cap}A_t}(u)=\bigwedge_{t\in T}\mu_{A_t}(u)=\inf_{t\in T}\mu_{A_t}(u)$$

这里显然有$0\leqslant\bigvee_{t\in T}\mu_{A_t}(u)$；$\bigwedge_{t\in T}\mu_{A_t}(u)\leqslant 1$。

图1-2给出了$\mu_{A\cup B}$，$\mu_{B\cap A}$，θ_{A^c}的示意图

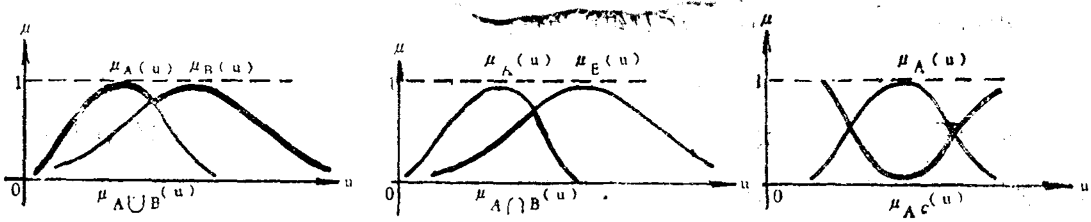

图1-2

〔例〕 设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$为四人组成的集合，U上的F子集$\underset{\sim}{A}$表示“学习优秀”，$\underset{\sim}{B}$表示“身体强壮”。若

$$\underset{\sim}{A}=(0.9,0.8,0.3,0.5);\ \underset{\sim}{B}=(0.6,0.8,0.4,0.7)$$

$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$表示“或学习优秀或身体强壮”，据定义有，

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=(0.9\vee 0.6,\ 0.8\vee 0.8,\ 0.3\vee 0.4,\ 0.5\vee 0.7)$$

$$=(0.9,\ 0.8,\ 0.4,\ 0.7)$$

要达到上述表示的“要求”显见x_1，x_2都行，x_4一般，x_3就不行了。