高等学校教学用書

近似計算講义

A. H. 克雷洛夫著

高等教育出版社

近似計算講义

高等学校教学用書

近似計算講义

A. H. 克雷洛夫著
吕茂烈　季文美譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的阿·尼·克雷洛夫(А. Н. Крылов)著“近似計算講义”(Лекции о приближенных вычислениях) 1950 年第五版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

近 似 計 算 講 义

A. H. 克雷洛夫著

呂茂烈　季文美譯

高等教育出版社出版　北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

商务印書館上海厂印刷　　新华書店發行

統一書号 13010·443　开本 787×1092 1/16　印張 23 1/8　插頁 1　字数 535,000　印数 1—2,500

1958 年 6 月第 1 版　1958 年 6 月上海第 1 次印刷　定价(8) ¥ 2.20

原書出版説明

杰出的苏联数学家、工程师阿・尼・克雷洛夫院士的"近似計算講义",是世界上近似計算教程的最早文献,并为其他作者后出的同类著述提供了范例。不同科学部門的工作者与工程师們,当他們要解决在实踐中所遇到的数学問題时,常須得到数値結果。对于他們,这本經典著作已成了必备之書。自然,阿・尼・克雷洛夫的这本書里所闡述的实用数学,其范圍在近几十年来已大为扩展,因为,在日常計算的实踐中要广泛牽涉到本書所未曾論及的一些問題,此外,現代科学技术对用机械自动解决数学問題所能提供的工具也大大增多了。可是,阿・尼・克雷洛夫的"講义",作为一本引导讀者进入实用数学这个重要部門的好書,仍然完全保持它的价值。

当作者在世时,"近似計算講义"出版过三次,最后一次是在1935年。1949年重新出版了这本書,刊入阿・尼・克雷洛夫院士全集(卷III,数学,第一册),由 B. И. 斯米尔諾夫院士主編。出版时曾重新审閱原文,并在某些地方由編者作了不大的修改。本書是按1949年科学院版重新排印的,并改正了該版中發現的一些印刷錯誤。

第一版序言

这本近似計算教程所包含的，是作者在1906年对会聚在 К. Май 旧制中学的一个小組講課用过的講义，小組里的人，在 Н. М. 韓特尔教授領导下，組成了一个自由听講的数学系。当时，这本教程用石印印出，份数不多，很快就卖完。

本版收納了石印版里的全部內容，此外，在第六章添入了一些关于內插法与机械求积的材料，又重写了关于微分方程近似积分的第七章。

本教程的內容看目录便知，至于在叙述方面，則假定讀者已熟悉高等代数学与微积分学基础，并且还具备一定的数值計算能力。

促使作者編写这本教程的动机如下：在現今一般数学分析書里所注意的，主要是在于絕对严格地建立基本概念，并严格証明从这些概念导出的全部結論。因此，往往对証明某一問題存在解答的事，以及对理論上来确定按任意准确度求此解答的可能性，討論得十分詳尽，但只以極少力量用于事情的实踐部分，卽很少注意如何求得准确度通常不大的近似解答；而实踐中則恰恰仅需要这样准确度通常不大的、但必須以最少时間与劳动得到的解答。作者所編写的这本近似計算教程，其目的就在于說明一些实际可用的方法，如計算数值方程的根、計算定积分、采用三角級数，以及求微分方程近似解等的方法。同时，这里所注意的，主要是在于如何并何时采用这种或那种方法，而不在于方法本身的原理在理論上的严密性。

作者沒有論及將函数展为自变量的冪級数，以及如何采用它們进行計算的問題，原因是，这些問題一般地在初等数学分析書里有十分詳尽的討論，至于求不定式的真值这一部分，只須令自变量取近于使表达式出現不定性时的諸值，并按这些值計算表达式的值，卽可得到大量練習。

本教程荣幸地承交通工程学院院务委員会載入学院文集，在序言的結尾，作者認为应向委員会致深切的謝意。

阿·克雷洛夫 1911年3月。

第二版序言

本教程的第一版早就卖完，可是，对这本書的需要，却經常从許多高等学校，特别是高等工業学校，以及設計室等各方面提出，因此，科学院編輯委員会特將本書列入于科学院出版的工程参考書彙編。

原稿已經过重新校閱，除一些必要的改正外，还作了一系列重要补充，即：在第五章叙述了加快三角級数的收斂及其求和的一般方法，又叙述了計算这类級数的周期与系数的方法，在第七章增加了关于微分方程数值积分的阿当姆斯–舒斗梅方法的叙述，最后还增加了第八章，叙述最小二乘法，但只限于这方法中为工程师与技术員所需要的部分。

阿·克雷洛夫 1932年9月。

目　录

第一章 引言 近似計算的一般規則

§1. 現今数学不仅被用来解答实用科学，如天文学、测地学与物理学上所遇到的問題，而且也被用来解答工程技术的各个部門中所遇到的問題。在这些应用中，往往不仅要求建立問題中所含各量間的关系，即不仅要写出适当的公式，而且还得將这些公式应用于特定情形，并按照所給的数据求出各未知量的数值。

在天文学与测地学里，通常先要叙述一些方法，說明如何完成这两門科学里所要遇到的数值計算。我們不来討論这些專門方法，而仅借用这些方法中能同样适用于任何种計算的共同原理；这里，我們主要將注意那些在工程技术問題里应用数学时所要遇到的計算。

§2. 無論哪个未知量，其数值計算所需要的数据，普通是借观测与量度而得到的。

大家知道，任何量度不可能进行得絕对准确；恰恰相反，量度的結果总会包含某些誤差，当重复量度时，由于得到与前一次不同的結果，就能够看出这种誤差。量度結果中的誤差界限正是根据它們彼此間的偏差来判断的。

当然，数据里的誤差也会使这些数据所决定的未知量产生誤差，甚至在按照完全准确的公式，并且完全准确地进行計算时，也会这样。

在工程技术問題里，求出未知量，普通是为了要在实际工作中用到它或按它的数值制出具体物件来。这又不可避免地發生施工和制造上的誤差；对于每件制品，都有所謂"公差"，即制品被認为合格的誤差界限。

由此可以明了，对于实用問題，沒有必要去按照絕对准确的公式并完全准确地进行計算；恰恰相反，可以采用明知是不准确的公式或方法来算，只要有把握使这样計算时所發生的誤差，不致超出本問題里所容許的界限。

可以应用不准确的或近似的計算公式和方法的理由是这样：实用中我們所注重的，普通不是計算过程本身，而是它的結果，因此力求以最少的劳动和最少的时間，获得足够准确的結果。

这种工程技术观点，正是本"講义"所持的观点，書中叙述下面这些实用近似計算的一般方法：(1)解数值方程，(2)求單积分与重积分的定积分数值，(3)求級数的和，以及(4)求常微分方程的数值积分。此外，我們还將介紹一些自动完成上述某几种运算时用到的机械裝置。

§3. 首先我們得講一講关于某一結果的准确度这个概念。

某个量的真值与它近似值之間的差額，称做这数值的絕对誤差。

仅指出絕对誤差，普通还不足以表明这个結果的价值。例如，如果只說出某一長度的誤差是1毫米，这还不能說明量度进行得是好还是坏，必須同时知道被量度那个量的本身值。

比如說，如果这1毫米的誤差是在量度10公里長的基綫时产生的，可以說，所得到的这个結果的准确度是空前未有的，可是，如果在量度金屬絲的直徑或金屬鈑的厚度时，將3毫米量成2毫米，那末，恐怕每个人都要說，这样的量度在任何地方也不会合用。

量度結果的价値，用相对誤差来表明就好得多。所謂某个量的相对誤差，是它絕对誤差对它本身值的比率。

显然，相对誤差总是用無名数表示；比如，前面第一个例子里的相对誤差是 $\frac{1}{10000000}$，第二个例子里的是 $\frac{1}{2}$。

某个量的相对誤差愈小，它也就被知道得愈准确；因此，我們用相对誤差来判断量度結果的准确程度。

任何計算与量度的結果都用数表示；可以約定这样来記数，使我們能够按照它本身的形式来判断它的准确度；为此只須这样規定：每个近似数里写出的全体有效数字，除末位以外都是可靠，只有末位数字可能有疑問，而且誤差还不大于1單位。

最准确的量度結果是称重量的結果；这里，对于約重1千克的物塊，可以准到 $\frac{1}{100}$ 毫克，这样，相对誤差只有 $\frac{1}{100000000}$；所以，称出数字的头八位能够可靠，到第九位才开始有疑問，或者說，所得到的結果准确到第九位。但是，要这样准确地来称重量，須非常細心而化費很多时間，比如在国际度量衡局①进行这一工作，就差不多需要24小时之久。

長度的最准确測量只能够到达第七位。在大部分工程問題中，准确到 $\frac{1}{1000}$ 就已足够，这是說，所有的計算都因而可按四位进行。

还須注意大数的写法。例如，設在数12732000之中，第四位已有疑問，这时我們把这数写成 1.273×10^7；假如是从第五位数字才开始有疑問，則这数可写成 1.2732×10^7。

同样，設某个量用整数表示，例如37，要指明这数中的誤差是从第五位开始，应該把它写成37.000。

§4. 現在讓我們来考察下面的問題：当用近似数进行各种算术演算时，它們对演算結果的准确度有什么影响？

加法演算　設給有下列諸数

$$N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_k;$$

其相对誤差分別为

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_k;$$

容易看出，这些数之和的相对誤差 ε，將在相加諸数的最大相对誤差与最小相对誤差之間。

事实上，設用

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_k$$

代表相加諸数的絕对誤差，可得

① Bureau International des Poids et Mesures.

$$\varepsilon=\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k}{N_1+N_2+\cdots+N_k}。$$

在另一方面，有等式

$$\varepsilon_1=\frac{\delta_1}{N_1},\quad \varepsilon_2=\frac{\delta_2}{N_2},\ \cdots,\ \varepsilon_k=\frac{\delta_k}{N_k},\tag{*}$$

因为所有这些分数(*)都只按它們的数值大小而論，所以，表示这些分数的分子的和与分母的和之比率的分数

$$\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k}{N_1+N_2+\cdots+N_k}$$

是介于这些分数中最大的一个与最小的一个之間。

因此，当全部相加数的大小彼此接近时（其中最大的一个与最小的一个的比率不超过10），須將这些数字写成同样位数，这样，和数中將会有同样多的可靠位数。

可是，常須將这样一些数相加，虽然已知它們具有同样准确度，但按大小来說，却彼此間相差很远；这时，可將演算手續簡化而不損害最后結果的准确度。

例如，設需將下列諸数相加：

52.374，2.8232，0.52181，0.014253，

这些数都是五位的。这时，不应这样相加：

$$\begin{array}{r@{.}l}
52&374\\
2&8232\\
0&52181\\
0&014253\\
\hline
55&733263
\end{array}$$

因为很明显，和数中末尾三位数字不可能会靠得住，这三位数字以及加成它們的那些数字都沒有必要写出来。所以，应該这样来进行演算：

$$\begin{array}{r@{.}l}
52&374\\
2&823\\
0&522\\
0&014\\
\hline
55&733
\end{array}$$

卽：先將相加諸数中最大的一个写下，其余各数在小数点后只須保留前面的几位，使其与最大的一个数在小数点后有同样多的位数（本例中是三位），而后面的几位小数則全部舍弃，这时，如果被舍弃的第一位数字等于或大于5，就在留下的最后一位数字上加1。

由于近似数相加，出現这样一个問題：誤差通常可能是正，也可能是負，因此，当相加的时候，可能会發生各个誤差相互抵消的情形，特别是在相加数很多的場合。这問題在概率論里研究并得到解决，而且我們就要在第五章回到这个問題。

乘法演算　这里可以証明，当相乘时，乘积的相对誤差等于相乘諸数的相对誤差之和。事实上，設相乘的兩数是 N_1 和 N_2，它們的相对誤差分别是 ε_1 和 ε_2，因此，这兩个乘数的眞值是

$$N'_1=N_1(1+\varepsilon_1),\quad N'_2=N_2(1+\varepsilon_2)。$$

这說明，乘积的眞值是

$$N'_1N'_2=N_1N_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)=N_1N_2[1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_1\varepsilon_2]。$$

分数 ε_1 和 ε_2 普通很小，比如为 $\frac{1}{1000}$，在这情形下，乘积 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 远較和数 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 为小，因而可以忽略不計，于是有

$$N'_1N'_2=N_1N_2[1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]=N_1N_2+N_1N_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

这样，对兩数相乘的情形証明了上述性質。

显然，这个証明也可以推广到随便多少个数相乘的情形。

除法演算 因为除以一个数 N，等于說乘以一个数 $\frac{1}{N}$，所以，当进行除法演算时，商的相对誤差等于被除数的相对誤差与除数的相对誤差之和。这里应当指出，仅在被除数与除数的絕对誤差兩者符号不相同的时候，商的相对誤差才达到这一大小。

乘冪的演算 从关于乘法所述，可以直接得知，一数平方的相对誤差，兩倍于这数的相对誤差；該数立方的相对誤差則为該数相对誤差的三倍，等等。这一性質对分数冪也是同样成立的。事实上，設 N_1 为被取乘冪之数的近似值，又 ε_1 为这数的相对誤差。在这情形下，眞值的大小是 $N=N_1(1+\varepsilon_1)$；由此取 p 次乘冪，有

$$N^p=N_1^p(1+\varepsilon_1)^p=N_1^p\left(1+p\varepsilon_1+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\varepsilon_1^2+\cdots\right)。$$

分数 ε_1 普通是足够的小，因而包含这分数高于一次的所有各項都可忽略不計，这样一来

$$N^p=N_1^p(1+p\varepsilon_1)=N_1^p+p\varepsilon_1N_1^p,$$

由此可知，N_1^p 的相对誤差为 $p\varepsilon_1$，这就証明了上述性質。

在許多計算里，常須用到数的平方与立方。对于自 1 至 10000 的整数，有編好的平方表与立方表，在这些表里的平方数与立方数都是完全准确給出的。

应用这些表时，要避免写出多余的位数。例如，設給有数

$$N_1=11.66。$$

这就是說，不能保証末位数字可靠，而这数的眞值，举例說，也可能是 11.67，但

$$11.66^2=135.9556,\quad 11.66^3=1585.242296,$$

又

$$11.67^2=136.1889,\quad 11.67^3=1589.324463。$$

由此十分明显，写出第四位以后的数字，或者甚至第三位以后的数字，全都無益，因为所有这些数字，对于所給的近似数来說并不可靠，写出它們也只白費功夫。

§5. 以近似数进行計算时，减法演算最为不利，特别是在差数与被减数及减数相較之下小得很多的場合。事实上，設給有数 52.287 与 51.939。我們看到，每个数里能保証前四位数字可靠，而且因为末位数字的誤差不会超过 1，所以这兩个已給数的相对誤差都不超过 $\frac{1}{50000}$。可是，在这兩数的差数 0.348 里，末位数字可能会有 2 單位的誤差，因而相对誤

差可能有$\frac{2}{348}$，即比較所給兩数的相対誤差要大到 300 倍。

因此，当計算时，应尽量設法变換公式，使兩个量的微小差数可直接算出，而不用計算这兩个量本身的値。如果做不到这点，就必須注意：若相減兩数各为其差数的 n 倍，則差数里的相对誤差將为各該数里的相对誤差的 $2n$ 倍。

由此可以明了，当某个量的一系列值彼此間相差不大时，按如下办法进行計算是有好处的，卽：只將其中的一个値直接算出，而为了得到其余各值，則只計算它們的那些补值（卽修正用的值），这些补值是用来加到直接算出的那个值上，以得到其余各值。可以按較低的准确度計算这些补值，而且补值比較該量的本值愈小，計算的准确度可以愈低。

天文学上，大部分計算就是按上述这一类方式进行的：总是尽量設法計算补值或偏差。

§6. 对数　在大部分計算里，对数是輔助工具，因此必須研究，当采用不同位数的对数进行計算时，將产生怎样的相对誤差。

最常用的对数表是 4、5 和 7 位对数表，这些表总是这样編造，要找出一个在表里沒有列出之数的对数，只須利用第一阶差分亦卽比例部分。这是由于如下的理由：兩个相鄰宗量之間的差数，与它們本身的值相較是足够微小的。事实上，設 N 和 $N+h$ 是順次排列的兩个宗量；这时，它們的对数（常用对数）之差为

$$\Delta=\lg(N+h)-\lg N=\lg\frac{N+h}{N}=\lg\left(1+\frac{h}{N}\right)。$$

但按已知公式，有

$$\lg\left(1+\frac{h}{N}\right)=M\left[\frac{h}{N}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3-\cdots\right], \tag{*}$$

式中 M 是常用对数的模数，等于 $0.43429\cdots$，为了在找对数时可以只用比例部分，应使公式 (*) 里的項

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2,$$

比起第一項来，小到不影响表里所列对数的末位数字；例如，对于四位对数，如果（实际上正是这样做）取

$$\frac{h}{N}<\frac{1}{100},$$

則

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2<\frac{1}{20000},$$

卽小于第五位的 5 單位；因此，在四位对数表里，宗量是由 100 至 1000 每隔 1 而排列的。

同样，在五位对数表里，取

$$\frac{h}{N}<\frac{1}{1000},$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2<\frac{1}{2000000}。$$

最后，在七位对数表里，宗量用自 10000 至 100000 的整数，由此

$$\frac{h}{N}<\frac{1}{10000}, \quad 而 \quad \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2<\frac{1}{200000000},$$

即小于0.000000005，这样就不会影响第七位。

因此，对于任何对数表，表差 $\varDelta$，即对应于 N 与 $N+1$ 的两个依次排列的对数之間的差数，可以足够准确地用如下公式表示

$$\varDelta=M\cdot\frac{1}{N}=0.434\frac{1}{N}。\tag{1}$$

由此很明显，設需求对数的某数 N_1 是在 N 与 $N+1$ 之間，即

$$N<N_1<N+1,$$

这时，令

$$N_1=N+h,$$

即得

$$\lg N_1=\lg N+0.434\frac{h}{N}=\lg N+h\cdot\varDelta。\tag{2}$$

用比例部分求所給数的对数，或者倒过来求，就是根据这个公式的。

表里所列出的全部对数都含有誤差，这些誤差可能有末位的 $\frac{1}{2}$ 單位。

由此可知，甚至当一个数完全准确地給出时，它的对数仍然只能近似地求到并具有上述誤差。

可是，如果这数也只近似地知道，比如說，它有相对誤差 $\frac{h}{N}=\varepsilon$，則由公式(2)可知，对数里將因該数本身的誤差而产生 0.43ε 的誤差。因此，要这誤差給予对数末位数字的影响不超过 $\frac{1}{2}$ 單位，应使数里的相对誤差仅及对数末位的1單位，即：对于四位对数，仅有 $\frac{1}{10000}$；对于五位对数，仅有 $\frac{1}{100000}$；等等，換句話說，对数尾数里共有多少位数字，就应当使数里有多少个可靠数字。

由此十分明显，对于一个近似数，比如說只有四位可靠数字的数，去找七位对数，是多么白費力气。

当根据已知对数倒过来求原数时，如果对数的誤差是它末位的1單位，則我們在所求出的数里所引进的相对誤差 ε 將等于这一位数字的 $\frac{1}{0.43}=2.30$ 个單位，对于五位对数，也就是說等于 $\frac{2.30}{100000}=\frac{1}{43400}$，这一誤差与数本身的大小無关。

由此可知，当已知对数求原数时，原数的第一位数字如果只有4或更小，它的可靠数字的个数恰与对数尾数里的相等，如果这数的第一位数字是5或者更大，則它的可靠数字的个数要比对数尾数里的少一。

这里假定了对数的誤差是它末位的1單位。必須指出，求某数用的对数普通是至少由另外兩个对数相加而成，正因为这样，这对数里的誤差等于它末位的1單位是完全可能的。

只有在求平方根时，特别是求高次根时，对数末位数字里大概不会有誤差。

由此得出如下的实用規則：計算用的数里有多少位，就用多少位的对数，因此，对于大部分工程技术問題，四位对数表已完全够用，甚至三位对数表也往往足够；可是三位对数表是

不值得采用的，用对数尺（普通称为計算尺——譯注）要方便得多，对数尺長 25 厘米，就能达到同样准确度。長 50 厘米的对数尺所能达到的准确度，就差不多和用四位对数表时一样。

§7. 当按对数进行計算时，应熟悉采用和及差的高斯对数。

設对于数 A 与 B，仅知它們的对数，需求这兩数之和的对数，即需求 $\lg(A+B)$。

設 $A>B$。显然有

$$\lg(A+B)=\lg A\left(1+\frac{B}{A}\right)=\lg A+\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)。$$

因为数 A 与 B 的对数是已知的，所以取差数 $\lg A-\lg B=\lg\frac{A}{B}$，就能够算出 $\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$ 的值。这在表里已做好；在这些表里，根据宗量 $\lg A-\lg B$，可以直接找到 $\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$；加上 $\lg A$ 后，就得到 $\lg(A+B)$。例如，設

$$\lg A=0.47712,$$
$$\lg B=0.30103;$$

这时
$$\lg A-\lg B=0.17609;$$

根据这一宗量，在和的对数表里找到

$\lg\frac{A}{B}$	$\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$
········	··············
0.176	0.22189
	40
0.177	0.22149
········	··············

可見，与宗量 0.17609 相对应的是 $0.22189-\ldots_{3.6}=0.22185$，这表明

$$\lg(A+B)=0.47712+0.22185=0.69897。$$

求差的对数表編造如下。我們有

$$\lg(A-B)=\lg A\left(1-\frac{B}{A}\right)=\lg A-\lg\frac{1}{1-\frac{B}{A}}。$$

令 $\frac{A}{B}=\alpha$，則 $\lg\alpha=\lg A-\lg B$，且对于宗量 α，可以算出

$$\lg\frac{1}{1-\frac{B}{A}}=\lg\frac{\alpha}{\alpha-1}=\lg\beta。$$

这些值在表里按如下形式排列

$\lg\alpha$	$\lg\beta$
······	······

这样地列表是为了減縮它的篇幅。事实上，当 α 自 1 变至 ∞ 时，β 自 ∞ 变至 1，并且当 $\alpha=2$ 时，同样有 $\beta=2$。

由等式 $\frac{\alpha}{\alpha-1}=\beta$，得 $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$；所以，如果以 $\lg\beta$ 代替宗量 $\lg\frac{A}{B}$，則它的对应值