全国基础力学课程教学基地系列教材

理论力学

工程动力学

西北工业大学理论力学教研室　编

和兴镇　主编

西北工业大学出版社

全国基础力学课程教学基地系列教材

理　论　力　学

（工 程 动 力 学）

西北工业大学理论力学教研室编
主　编　和兴锁
副主编　支希哲　刘小洋

西 北 工 业 大 学 出 版 社

【内 容 简 介】 本书是根据教育部高等工业学校理论力学教学的基本要求编写的。它是全国基础力学课程教学基地系列教材《理论力学》的工程动力学部分。全书共八章，分别讲述了质点和刚体的运动学、动力学Ⅰ。本书注重分析问题、解决问题的思路及方法，适用于课堂教学。

本书可作为高等工业学校机械、航空 航天、航海、土建、机电和动力等类专业理论力学课程的教材，也可供夜大学、函授大学相关专业及有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学：工程静力学、工程动力学、高等动力学/和兴锁主编．—西安：西北工业大学出版社，2001.6
ISBN 7-5612-1331-X

Ⅰ．理…　Ⅱ．和…　Ⅲ．理论力学-高等学校-教材　Ⅳ．031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15160 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址 西安市友谊西路 127 号，邮编 710072　电话：029－8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：西安电子科技大学印刷厂
开　　本：850 毫米×1 168 毫米　1/32
印　　张：9.5
字　　数：229 千字
版　　次：2001 年 8 月　第 1 版　2001 年 8 月　第 1 次印刷
印　　数：1～2000 册
定　　价：13.00 元

前　言

本书是以西北工业大学理论力学教研室历年来编写的各种学时《理论力学》教材为基础编写的。它是全国基础力学课程教学基地模块式《理论力学》教材的运动学和动力学Ⅰ模块，可作为机械、航空、航天、航海、土建、机电、动力等各专业的理论力学课程教材，也可供有关工程技术人员参考。

在编写过程中，我们参照了国家教育部制订的高等工业学校理论力学教学的基本要求，优化了课程内容，注意了课程的系列化问题，精简了课程的重复部分。在内容选材方面，我们力求坚持理论力学体系的完整性和严密性，定理证明和逻辑推理的严谨性，尽量做到叙述恰当，思路清晰，富于启发性，便于自学；同时坚持理论联系实际，加强了各专业的通用性。书中引伸和加选内容用“*”号标出。

此次编写是在西北工业大学理论力学教研室统一规划和组织下完成的，参加编写工作的有（按章节的顺序）和兴锁（第一～三章），侯美丽（第四章），汤波、韩小平（第五章），张劲夫（第六～第八章）。全书由和兴锁统稿并任主编，支希哲、刘小洋任副主编。

全书由蔡泰信教授主审，吕茂烈教授对本书的编写提出了不少宝贵意见，西北工业大学教材建设科、出版社的领导和编辑们给予许多关心和帮助，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2001 年 1 月

目　录

第一章　工程运动学基础

§1-1　工程运动学的任务和基本概念

静力学中我们研究了物体的平衡规律。要使物体处于平衡，作用于物体上的力系必须满足其平衡条件。当平衡条件不满足时，物体就不能保持平衡而要改变其原有的静止状态或运动状态。因此，研究了物体的平衡规律以后，需要进一步研究物体运动变化的规律。由于运动规律较之平衡规律要复杂得多，所以将其分为运动学和动力学两部分进行研究。下面要研究的运动学，它是用几何的观点研究物体的机械运动，只阐明运动过程的几何特征及其各运动要素之间的关系，而完全不涉及与运动变化有关的物理因素（如力、质量等）。

学习运动学的目的，一方面是为学习动力学提供必要的基础知识，另一方面也有其独立的意义。在工程实际中，不论是设计新产品、新设备或进行技术革新，首先要求产品或设备能完成一定的动作，即实现预先规定的各种运动。因此必须以运动学知识为基础，对传动机构进行必要的运动分析。

在运动学的研究中，通常将物体抽象为点和刚体两种模型。所谓点是指其形状、大小可忽略不计而只在空间占有确定位置的几何点。而刚体则可视为由无穷多个点组成的不变形的几何形体。当忽略物体的几何形状、尺寸而不会影响所研究的问题时，该物体就

可以抽象为一个点，否则必须视为刚体。

在运动学中，首先遇到的问题是如何确定物体在空间的位置。物体的位置只能相对地描述，即只能确定一个物体相对于另一个物体的位置。这后一物体被作为确定前一物体位置用的参考体。将一组坐标系固连在参考体上，则这组坐标系就称为**参考坐标系**或**参考系**。如果物体在所选参考系中的位置是随时间而变化的，就说该物体在运动，否则，该物体处于静止。在运动学中，所谓运动和静止都只有在指明了参考系的情况下才有意义。运动描述的相对性反映了物体机械运动的客观属性。

在运动学中，参考系的选择是任意的。描述同一物体的运动时，选用不同的参考系可以得到不同的结果。例如，当车厢沿轨道行驶时，对固连于车厢的参考系来说，车厢里坐着的乘客是静止的；但对固连于地球上的参考系，则乘客是随车厢一起运动的。因此，为了明确起见，必须首先指出问题中的参考系。在习惯上和一般工程问题中，总是选取固连于地球上的参考系。本书中如不特别说明，选用的参考系均固连于地球。

在运动学里，要用到**瞬时**与**时间间隔**这两个不同的概念。瞬时是指某一时刻，而时间间隔则是指两个不同瞬时之间的一段时间。例如，设火车从甲站开动的瞬时是 t_1，到乙站停止的瞬时是 t_2，则火车由甲站到乙站运行的时间间隔是(t_2-t_1)。时间间隔的长短表示过程的久暂。时间间隔的单位通常采用秒(s)，相应地，瞬时也用秒来表示。

§1-2　点的运动的矢量法

所谓点的运动就是指点在空间的位置随时间而改变。研究点的运动就是要确定每瞬时点在空间的位置、速度和加速度等。一般情况下，点在空间的位置随时间连续变化形成一条空间曲线，这条

曲线称为点的轨迹或路径。直线运动可看做曲线运动的一个特例。在曲线运动中，由于点运动的快慢和方向都在变化，所以用矢量表示点在空间的位置是方便的。

一、点的运动方程的矢量法

运动学中常把确定为研究对象的运动的点称为**动点**，**运动方程**（也称**运动规律**）表示动点在所选参考系中的位置随时间而变化的规律。

设有一动点相对于某参考体而运动，它在瞬时 t 的位置为 M，为了确定动点的位置，可在参考体上任选一点 O 作为参考点（定点或原点）。把由定点 O 画至动点 M 的有向线段 $\overrightarrow{OM}$（见图 1－1）作为矢量看待，并用 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 表示，$\boldsymbol{r}$ 则称为动点的**矢径**。当点 M 运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向都随时间在不断改变，即不同的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对应着不同的位置，这种用矢量确定动点位置的方法称为**矢量法**。当动点运动时，$\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的单值连续矢量函数，即

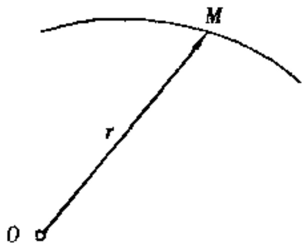

图 1－1

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

方程（1－1）称为点 M 的**矢量形式的运动方程**。变矢量 $\boldsymbol{r}$ 的末端随时间变化在空间绘出的曲线（简称**矢端图**）就是动点的运动轨迹。

二、点的速度的矢量法

设在瞬时 t，动点位于 M，矢径为 $\boldsymbol{r}$。经过 Δt，即在瞬时 $t+\Delta t$，动点运动到 M'，矢径变为 $\boldsymbol{r}'$，如图 1－2，在时间间隔 Δt 内矢径 $\boldsymbol{r}$ 的变化量为

$$\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MM'} \tag{1-2}$$

它表示在时间间隔 Δt 内动点位置矢的改变，称为动点在 Δt 时间内的位移。

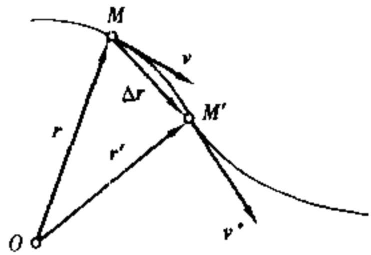

图 1-2

动点在 Δt 这段时间内运动的快慢程度，可用比值 $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 来描述，并以 $\boldsymbol{v}^*$ 表示，即

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \qquad (1-3)$$

式中，$\boldsymbol{v}^*$ 称为动点在 Δt 时间内的平均速度(见图 1-2)。

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\boldsymbol{v}^*$ 的极限称为动点在瞬时 t 的速度 $\boldsymbol{v}$，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1-4)$$

即动点的速度等于它的矢径对时间的一阶矢导数。其方向沿动点的矢端图(即轨迹曲线)在对应点的切线，并指向动点前进的方向。在国际单位制中，速度的单位是 m/s。

三、点的加速度的矢量法

动点作曲线运动时，不仅速度的大小可能改变，速度的方向也在改变(图 1-2)。为了描述每瞬时动点速度的大小和方向改变的情况，现引入加速度的概念。

设动点在 M 和 M' 的速度分别为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$，在时间间隔 Δt 内，动点速度的改变量为 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$(见图 1-3)。比值 $\Delta \boldsymbol{v}/\Delta t$ 称为动点在 Δt 时间内的**平均加速度**，即

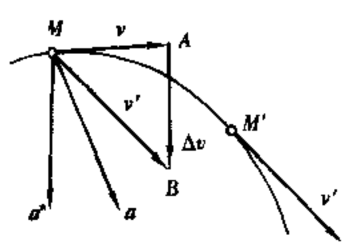

图 1-3

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (1-5)$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\boldsymbol{a}^*$ 的极限值称为动点

在瞬时 t 的**加速度** $\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{a}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} \qquad (1-6)$$

即动点的加速度等于它的速度对时间的一阶矢导数，或等于它的矢径对时间的二阶矢导数。其方向沿速度矢端图的切线，并指向速度矢端运动的方向。在国际单位制中，加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$。

思考题　若某瞬时 t_1，点的速度 $\boldsymbol{v}_1 = 0$，则必有 $\boldsymbol{a}_1 = 0$ 吗？

§1-3　点的运动的直角坐标法

一、点的运动方程的直角坐标法

设动点 M 作空间曲线运动(见图 1-4)。过固定点 O 作直角坐标系 $Oxyz$，设在瞬时 t，点 M 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，坐标为 x,y,z，把点 M 的矢径写成分解式，即有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (1-7)$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为固定直角坐标轴 x,y,z 的单位矢量。当点 M 运动时，这些坐标一般地可以表示为时间 t 的单值连续函数，即

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1-8)$$

式(1-8)称为点 M 的**直角坐标形式的运动方程**。动点的轨迹方程可由式(1-8)消去时间

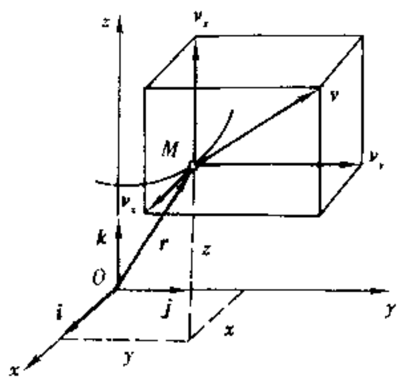

图　1-4

t 而得到。

二、点的速度在直角坐标轴上的投影

设点 M 作曲线运动，已知它的直角坐标形式的运动方程(1-8)。当函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 为已知时，动点 M 对应于任意瞬时 t 的位置也就完全确定。由式(1-4)及式(1-7)可知，点 M 的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) \tag{1-9}$$

考虑到固定坐标轴的单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是常矢量，故有 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=0$，所以式(1-9)可写为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

而矢量 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 也可以沿三个坐标轴分解，若以 v_x,v_y,v_z 表示速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x,y,z 轴上的投影(见图1-4)，则有

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

比较上两式，可得

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\v_y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\v_z&=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

即动点的速度在固定直角坐标轴上的投影，等于该点的对应坐标对时间的一阶导数。

有了速度的三个投影，就可以求得速度的大小和方向。速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \qquad (1-13)$$

速度的方向可用速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与各坐标轴正向间夹角的余弦来表示，即

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})&=\frac{v_x}{v}\\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})&=\frac{v_y}{v}\\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})&=\frac{v_z}{v}\end{aligned}\right\} \qquad (1-14)$$

式中 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})$，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})$，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})$ 分别表示速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与坐标轴 x，y，z 正向间的夹角。

三、点的加速度在直角坐标轴上的投影

由动点的速度分解式(1－11) 对时间 t 求导数可得其加速度，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \qquad (1-15)$$

于是，动点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 在固定轴 x，y，z 上的投影分别是

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \qquad (1-16)$$

即动点的加速度在固定直角坐标轴上的投影，等于该点速度的对应投影对时间的一阶导数，也等于该点的对应坐标对时间的二阶导数。

有了加速度的三个投影，就可以求得加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} \qquad (1-17)$$

加速度的方向可由加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴正向间夹角的余弦来

表示，即

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) &= \frac{a_x}{a}\\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) &= \frac{a_y}{a}\\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}) &= \frac{a_z}{a}\end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

思考题　点作直线运动，若沿其轨迹取固定坐标轴 Ox，试列写该点的运动方程及速度、加速度表达式。

§1－4　点的运动的自然法

一、自然轴系、曲率与曲率半径

当点沿已知曲线轨迹运动时，轨迹的几何性质会影响点的运动要素。在用自然法分析点运动的速度和加速度之前，我们先简要回顾空间曲线的有关几何性质。

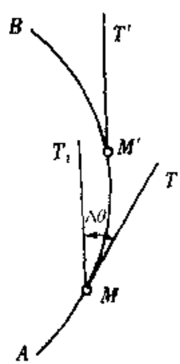

图　1－5

设有空间曲线 AB（见图 1－5），在其上任取相邻近的两点 M 和 M'，两点间的一段弧长 $\widehat{MM'}$ 以 Δs 表示；点 M 和 M' 处的切线分别以 MT 和 $M'T'$ 表示。自点 M 作 MT_1，使 MT_1 平行于 $M'T'$；所得 MT 与 MT_1 的夹角 $\Delta\theta$ 称为**邻角**，恒取正值，它表示 M 和 M' 处两切线方向的变化。$\Delta\theta$ 与 Δs 的比值 $\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ 是曲线在这段弧长 Δs 内切线方向变化率的平均值。它可以用来说明曲线在 Δs 内弯曲的程度，因此称为弧段 $\widehat{MM'}$ 的**平均曲率**。用 k^* 表示这个比值，有

$$k^{*} = \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

为了说明曲线在点 M 处的弯曲程度，应令点 M' 趋近于点 M。这样，平均曲率 k^{*} 将趋近于极限值 k，这个极限值就是曲线在点 M 处的曲率，即

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \tag{1-19}$$

曲率 k 的倒数称为曲线在点 M 处的**曲率半径** ρ

$$\rho = \frac{1}{k} \tag{1-20}$$

圆周的曲率半径就是圆周自身的半径。对于一般曲线，曲率半径的几何意义可说明如下。通过点 M 以及曲线上靠近 M 的另外两点作一圆周，则当这两个点向点 M 无限趋近时，这个圆将趋近于某个极限圆，它和曲线相切于点 M。这个圆称为曲线在点 M 的**曲率圆**。它的半径就是曲线在点 M 的曲率半径，而它的圆心则称为**曲率中心**。直线可以看成曲率半径 $\rho = \infty$ 的曲线。

现在介绍自然轴系。在图 1-5 中，通过点 M 作一个包含 MT 和 MT_1 的平面。当 M' 向 M 接近时，这个平面的位置将绕 MT 转动。当点 M' 趋于点 M，即当 Δs 趋于零时，这个平面将转到某一极限位置，而这个极限位置的平面也就是上述曲率圆的平面，并称为曲线在点 M 处的**密切面或曲率平面**。

通过点 M 作垂直于切线的平面称为曲线上点 M 处的**法面**。法面内由点 M 作出的一切直线都和切线垂直，因而都是曲线的**法线**。为区别起见，规定在密切面内的法线称为曲线在点 M 处的**主法线**（见图 1-6）。法面内与主法线相垂直的法线称为**副法线**。这样，切线、主法线和副法线在点 M 形成三面正交架。

现在规定：切线方向的单位矢量以 $\boldsymbol{\tau}$ 表示，指向弧坐标 s（见后）增加的一方，主法线方向的单位矢量以 $\boldsymbol{n}$ 表示，指向曲线凹边（即指向曲率中心），副法线方向的单位矢量以 $\boldsymbol{b}$ 表示，且有

$$b = \tau \times n$$

由 τ,n,b 三个单位矢量确定的正交轴系称为**自然轴系**(见图 1-6)。对于曲线上的任一点,都有属于该点的一组自然轴系。当点运动时,随着点在轨迹曲线上位置的变化,其自然轴系的方位也随之而改变。所以 τ,n,b 都是随着点的位置而变化的变矢量。

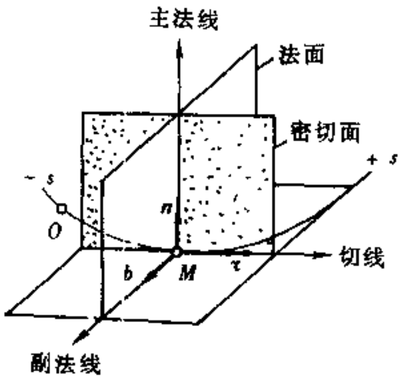

图 1-6

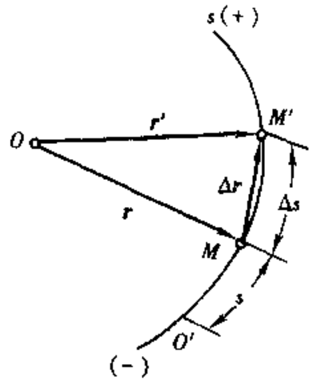

图 1-7

二、点的运动方程

设动点 M 沿已知轨迹曲线运动(见图 1-7)。在轨迹上任取一点 O' 为参考点(原点)。为了唯一地确定动点在轨迹上的位置,把轨迹的一端定为运动的正方向,另一端定为运动的负方向。点在轨迹上某瞬时 t 的位置,可由参考点 O' 到点 M 的那段轨迹的弧长 $\widehat{O'M}$ 表示,并根据动点在参考点的哪一边加上相应的正负号。这种带正负号的弧长称为**点的弧坐标**,用 s 表示。当点运动时,其弧坐标 s 随时间不断变化,是 t 的单值连续函数,即

$$s = f(t) \tag{1-21}$$

方程(1-21)称为**以自然法表示的动点的运动方程**。