高等学校教材

过程装备力学基础

■陈 旭 主编
■蒋家羚 主审

化学工业出版社
教材出版中心

高 等 学 校 教 材

过程装备力学基础

陈 旭 主编

蒋家羚 主审

化 学 工 业 出 版 社
教 材 出 版 中 心
·北 京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

过程装备力学基础/陈旭主编．—北京：化学工业出版社，2001.12
高等学校教材
ISBN 7-5025-3345-1

Ⅰ．过…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．化工过程-化工设备-工程力学-高等学校-教材　Ⅳ．TQ051

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 081956 号

高等学校教材
过程装备力学基础
陈　旭　主编
蒋家羚　主审
责任编辑：程树珍
责任校对：马燕珠
封面设计：蒋艳君
*
化学工业出版社
教材出版中心　出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：（010）64918013
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市燕山印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 787×1092 毫米 1/16　印张 13　字数 314 千字
2002 年 1 月第 1 版　　2002 年 1 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-3345-1/G·898
定　价：21.00 元

前　言

根据“过程装备与控制工程”专业课程体系及教学计划，各校对原“化工设备与机械”本科专业课程设置进行了重新调整。本教材主要参照了余国琮、胡修慈、吴文林教授主编的《化工容器及设备》的第一篇内容，并进行了改编。本书系统介绍在“过程装备”设计中所应用的工程力学方面的基本理论和基本知识。主要内容包括弹塑性理论的基本内容、薄板理论、旋转薄壳理论，机械振动等。此外，增加了部分近年来发展的新知识，如广泛用于压力容器分析设计的有限单元法，疲劳设计，断裂力学等方法。总学时约为 48 学时，各校可根据实际情况选用。以达到注重素质，加强基础，减少讲授总学时，增加学生自学时间的目标。

其内容的安排作了如下考虑，弹塑性力学基础和板壳理论约 32 学时，以精讲多练为原则，每章后都附有习题，以便学生自学和练习。作为容器设计的理论基础，应为必修内容。高速回转件的应力与变形和机械振动的基本理论共 8 学时，作为化工机器及设备振动的基础知识；蠕变、疲劳、断裂分析和有限单元法简介共 8 学时，介绍基本概念和应用实例。本书中加“*”的章节为选用教材，各校可根据各自的教学计划需要选用。

本书编写分工如下：天津大学陈旭编写第 1～7 章，太原理工大学段滋华编写第 2～3 章，天津大学谭蔚编写第 4～6 章，太原理工大学张铱芬编写第 8 章。天津大学吴文林对本书的编写提出许多意见。全书由陈旭主编，浙江大学蒋家羚主审，郑水英参加了部分章节的校审工作。

由于作者水平有限，错误及不妥之处在所难免，望读者提出意见以便更正。

编者

2001 年 12 月

内 容 简 介

本书介绍在“过程装备”设计中所应用的工程力学方面的基本理论和基本知识。主要内容包括弹塑性理论的有关内容、薄板理论、旋转薄壳理论、机械振动、疲劳设计、断裂力学及有限单元法等。

本书可作为“过程装备与控制工程”专业基础课程教材，亦可供相关专业工程技术人员参考。

目　　录

第一章　弹性力学基本方法和平面问题解答

第一节　弹性力学的内容和基本概念

一、弹性力学的内容

弹性力学是研究物体在弹性范围内由于外载荷作用或物体温度改变而产生的应力、应变和位移。就这一方面而言，弹性力学的任务和材料力学是相似的。材料力学中关于弹性体的均匀连续假设和各向同性假设也适用于弹性力学。

弹性力学和材料力学不同处在于材料力学主要研究杆件和比较简单的杆件系统，且在研究杆件和杆件系统时，为简化数学推导，基于大量实验观察的基础上，采用了关于变形和应力分布的假设，并以一个有限大的单元体作为研究对象；而弹性力学除了研究杆件外，还研究平面问题及空间问题，在研究这些问题时，并不采用变形或应力分布之类的假设，由于结构和受力的复杂性，以无限小的单元体作为研究和分析问题的出发点，并由力平衡方程、几何方程和物理方程等构成数学-力学问题求解。

二、弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。

作用于物体的外力可以分为体积力（体力）和表面力（面力）两种。体力是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力；面力是分布在物体表面上的力，例如流体的压力和接触力。

物体在外力作用下将产生变形。为了抵抗这种变形，其内部就要产生相互作用力，称之为内力。内力在各点的集度就是各点的应力。对于应力，通常都用它沿作用截面的法线方向和切线方向的分量，即正应力 σ 和切应力 τ 来表示。因为这些分量与物体的形状改变或材料的强度有直接的关系。

为了考察物体受载后内部某一点 P 的应力，在 P 点从物体内取出一个微小的正六面体，它的棱边平行于坐标轴，长度为：$PA=\Delta x$；$PB=\Delta y$；$PC=\Delta z$，如图 1-1 所示。将每一个面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。为了表明应力的作用面和作用方向，在正应力 σ 上加一个坐标角码，例如 σ_x 是指作用在垂直于 x 轴的面上，并与 x 轴方向平行的正应力；在切应力 τ 上加两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴，例如 τ_{xy} 是指作用在垂直于 x 轴的面上而沿 y 轴方向的切应力。如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一

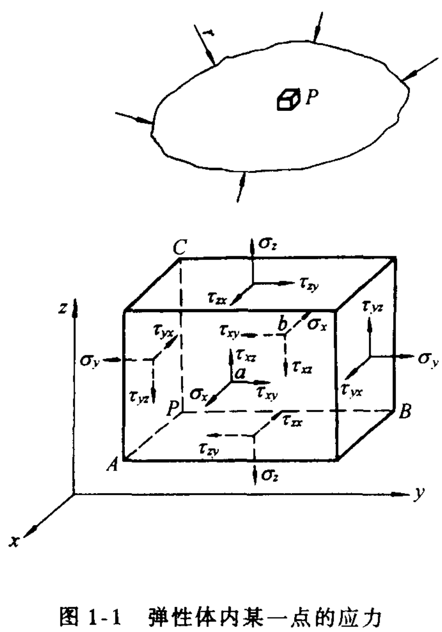


图 1-1　弹性体内某一点的应力

个正面。在这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。反之，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1-1 所示的应力分量全部都是正的。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接正六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，见图 1-1，写出力矩平衡方程为

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\ \frac{\Delta y}{2}-2\tau_{xy}\Delta y\Delta x\ \frac{\Delta z}{2}=0$$

由此得到

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

同样可以建立其余两个相似的方程，可得出

$$\tau_{zx}=\tau_{xz},\ \ \tau_{xy}=\tau_{yx}$$

这就证明了切应力互等定律，即作用在两个垂直面上且垂直于该两面交线的切应力，大小相等，正负号也相同。因此，切应力记号的两个角码可以互换。

于是，九个应力分量中，只有六个独立的未知量，即三个正应力 σ_x、σ_y、σ_z 和三个切应力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。和材料力学的分析相似，利用静力平衡，过 P 点所作的任意斜截面上的应力，都可用上述六个应力分量来确定。所以，这六个应力分量确定为 P 点的应力状态。应力分析的目的，就是确定物体受载后各点的六个应力分量，进而求得主应力，作为强度设计的依据。

物体的形状可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体受外载后的变形，也可以归结为长度的改变和角度的改变。如求物体内某点 P 的变形，可在 P 点沿坐标轴 x、y、z 正方向取三个微小线段 PA、PB、PC，如图 1-1 所示。物体变形后，PA、PB、PC 的长度以及它们之间的直角一般都将改变，各线段的每单位长度的伸长或缩短称为线应变，用字母 ε 表示；各线段之间的直角改变，以弧度为单位，称为切应变，用字母 γ 表示。在线应变 ε 上加一个坐标角码表示伸缩的方向，如 ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变；在切应变 γ 上加两个坐标角码，表示那两个线段之间的直角改变，如 γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段即 PB 与 PC 之间的直角改变。线应变以伸长为正，缩短为负；切应变以直角变小时为正，变大时为负。这些规定和正应力、切应力的符号规定是相对应的。

物体内任一点的位移，用它在 x、y、z 三轴上的投影 u、v、w 来表示。沿坐标轴正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。弹性力学所研究的绝大多数是静不定问题，必须综合应用平衡（应力、体力、面力之间的关系）、几何（应变、位移、边界位移之间的关系）和物理（应力、应变之间的关系）三个方面的方程才能得到问题的解答。

三、弹性力学基本方程

1. 平衡微分方程

在物体内任意一点 P，割取一个微小的正六面体，如图 1-2 所示。它的六面体垂直于坐标轴，沿 x、y、z 方向的长度分别为 dx，dy 和 dz。因为应力分量是 x，y，z 坐标的函数，所以作用在小单元体三对面上的应力分量是不同的。

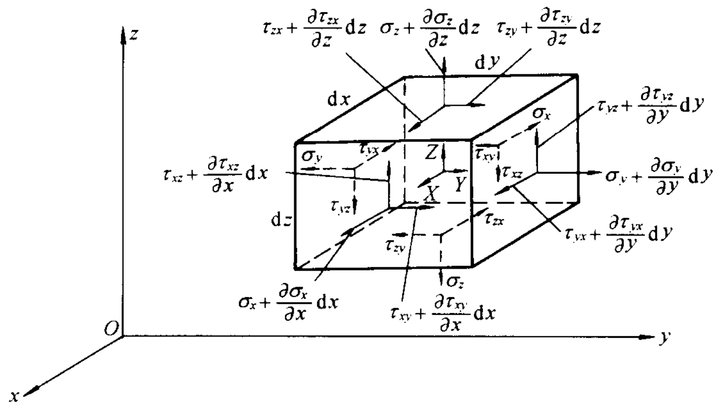


图 1-2　单元体受力分析

在垂直 x 轴的两个面上应力分别为

$$\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \sigma_{xz}\text{和}\ \sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\ \tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx,\ \tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx;$$

在垂直 y 轴的两个面上的应力分别为

$$\sigma_y,\ \tau_{yx},\ \tau_{yz}\text{和}\ \sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy,\ \tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy,\ \tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy;$$

在垂直 z 轴的两个面上的应力分别为

$$\sigma_z,\ \tau_{zx},\ \tau_{zy}\text{和}\ \sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz,\ \tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz,\ \tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz;$$

因为正六面体是微小的，各面上所受的应力可以认为是均匀分布，其合力作用在对应面的中心。正六面体上的外力为体力，沿 x，y，z 轴的分量为 X，Y，Z。体力 X，Y，Z 也可以认为是均匀分布，其合力作用在体积中心。正六面体的受力情况如图 1-2 所示。

由图 1-2 所示的正六面体可列出三个静力平衡方程。

沿 x 轴的力的平衡方程 $\sum F_x=0$

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz-\tau_{yx}dxdz$$
$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdz+Xdxdydz=0$$

化简以后，两边同除以 $dxdydz$ 后，

得
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0$$

同理由 $\sum F_y=0$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0 \qquad (1\text{-}1)$$

由 $\sum F_z=0$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0$$

式（1-1）即为物体的平衡方程式，对于这一微正六面体的力矩平衡条件同样可以导出切应力互等定律

$$\sum M_x=0,\ \tau_{yz}=\tau_{zy}$$
$$\sum M_y=0,\ \tau_{xz}=\tau_{zx} \qquad (1\text{-}2)$$

$$\sum M_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

2. 几何方程

当物体变形后的各点位移分量确定后，各微元体的应变分量也相应地确定了。所以位移分量与应变分量之间有着密切的关系，而这种关系纯属几何方面的，这将在第二节中给出平面问题几何方程的推导，这里直接给出空间问题的几何方程如下

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

它给出了六个应变分量和三个位移分量之间的关系。

3. 物理方程（广义虎克定律）

在完全弹性的各向同性体内，应变分量与应力分量之间的关系式，即物理方程，可以由在材料力学中已经得到广义虎克定律给出

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

式中 E 是弹性模量，G 是切变模量，μ 是泊松比，这三个弹性常数之间有如下关系

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1-5}$$

以上导出的 3 个平衡微分方程式（1-1），6 个几何方程式（1-3）和 6 个物理方程式（1-4），是弹性力学空间问题的 15 个基本方程。这 15 个基本方程式中包含 15 个未知数：6 个应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}；6 个应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}；3 个位移分量 u、v、w。基本方程数目和未知函数的数目相等，在适当的边界条件下是能得到解答的。

第二节　弹性力学的平面问题

一、平面应力和平面应变

任何弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系。因此，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状，承受的是某种特殊的外力，就可以把空间问题简化为平面问题。这样处理，可以大大减少分析和计算的工作量，而仍能满足工程上的精度要求。

平面问题可分为平面应力问题和平面应变问题。当弹性体的一个方向尺寸很小，例如薄板，在板的边缘有平行于板面并沿板厚均匀分布的力作用，如图 1-3 所示，图中 S 为板厚。对于这类问题，由于两个板面上无外载作用，因而两个板面上的应力分量为零

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{S}{2}}=0 \quad (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{S}{2}}=0 \quad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{S}{2}}=0$$

又因为板很薄，外力不沿厚度变化，应力沿着板的厚度又是连续分布的，所以在整个板内的所有点都有 $\sigma_z=0, \tau_{zx}=0, \tau_{zy}=0$。六个应力分量只剩下平行于 xOy 面的三个应力分量，即 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$，而且它们只是坐标 x, y 的函数，与 z 无关。这类问题称作平面应力问题。

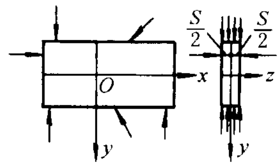
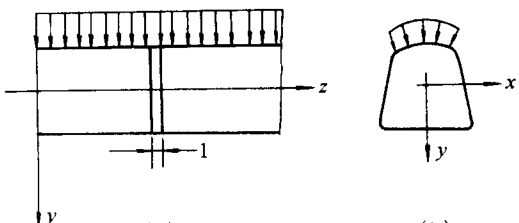


图 1-3　平面应力示例

当弹性体的一个方向尺寸很大，例如很长的柱形体。在柱形体的表面上，有平行于横截面而不沿长度变化的外力，如图1-4(a)所示。若柱形体无限长，则柱形体任一点的应力分量、应变分量和位移分量都不沿 z 方向变化，而只是 x、y 的函数；此外由于在 z 方向柱形体的结构型式和受力都相同，因此任一横截面都可以看做是对称面[图 1-4(b)]，而对称面在 z 方向的位移必须为零，所以柱形体内任一点都只有 x，y 方向的位移 u、v。由于对称，$\tau_{zy}=0, \tau_{zx}=0$，这样六个应力分量剩下四个，即 σ_x，σ_y，σ_z 和 τ_{xy}。这类问题称做平面应变问题。



(a)　(b)

图 1-4　平面应变示例

有些问题，例如承受内、外压的圆管和重力坝等，虽然不是无限长，但实践证明，对于离开两端较远之处，按平面应变问题进行应力分析，得出的结果具有足够的精度，能满足工程要求。

二、平面问题的基本方程

1. 平衡方程

对于平面应力问题，$\sigma_z=0$，$\tau_{zx}=0$，$\tau_{zy}=0$。

对于平面应变问题，在 z 方向还作用有正应力 σ_z，但 σ_z 是自成平衡的，$\tau_{zy}=0$，$\tau_{zx}=0$。

于是由式 (1-1)，平面问题中的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

两个微分方程包含三个未知量：σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，所以是静不定问题，必须考虑变形关系，才能解出未知量。

2. 几何方程

现在来推导平面问题中应变分量和位移分量间的关系式。在图 1-3 所示薄板和在图1-4(b)所示的薄片上的任意点 P，沿 x 轴、y 轴取微小长度 $PA=\mathrm{d}x$，$PB=\mathrm{d}y$。假设薄板或薄片受力后，P、A、B 分别移动到 P'、A'、B'。P 点移动到 P' 点的位移分量为 u，v，如图 1-5 所示。A 点横坐标比 P 点有一增量 $\mathrm{d}x$，所以 A 点移动到 A' 点的位移分量为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，

$v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$。$B$ 点的纵坐标比 P 点有一增量 $\mathrm{d}y$，所以 B 点移动到 B' 点的位移分量为 $u+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$，$v+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。

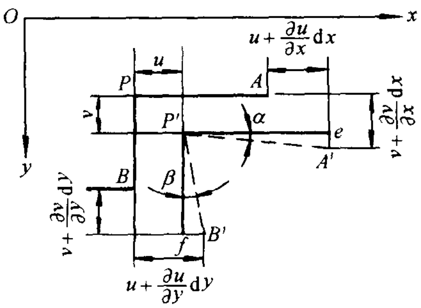


图 1-5 在直角坐标中的位称

由于 $P'A'$ 的倾斜角 α 和 $P'B'$ 的倾斜角 β 很小。所以 PA 的线应变 ε_x 为

$$\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}\approx\frac{\left[\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)+\mathrm{d}x-u\right]-\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

PB 的线应变 ε_y 为

$$\varepsilon_y=\frac{P'B'-PB}{PB}\approx\frac{\left[\left(v+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}y-v\right]-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

PA 和 PB 之间的直角变化即切应变 γ_{xy} 为

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}&=\alpha+\beta\approx\tan\alpha+\tan\beta=\frac{A'e}{P'e}+\frac{B'f}{P'f}\\&=\frac{\left(v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-v}{\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)+\mathrm{d}x-u}+\frac{\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)-u}{\left(v+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}y-v}\\&\approx\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

这里采用了小变形下的近似关系 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+1\right)\mathrm{d}x\approx\mathrm{d}x$，$\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+1\right)\mathrm{d}y\approx\mathrm{d}y$

于是，平面问题中的几何方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\\gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1-7}$$

3. 物理方程

在平面应力问题中，$\sigma_z=0$，$\tau_{yz}=0$，$\tau_{zx}=0$。将它们代入式（1-4），得到平面应力的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

并且 $\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{xz}=0$

此外，式（1-4）中的第三式变为

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$$

可以用来求薄板厚度的变化。

在平面应变问题中，$\tau_{zy}=0$，$\tau_{zx}=0$，$\varepsilon_z=0$。将它们代入式（1-4），得

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \gamma_{zy} = 0, \gamma_{zx} = 0$$

将上面的第三式代入第一式和第二式，经整理得到平面应变问题的物理方程为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

比较式（1-8）、式（1-9）可见两种平面问题的物理方程在形式上是相似的，仅系数不同。如果在平面应力的物理方程式（1-8）中将 E 换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换为$\frac{\mu}{1-\mu}$，就得到平面应变问题的物理方程式（1-9）。以上导出的 2 个平衡微分方程式（1-6），3 个几何方程式（1-7）和 3 个物理方程式（1-8）或式（1-9），是弹性力学平面问题的 8 个基本方程。这 8 个基本方程式中包含 8 个未知数：3 个应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}；3 个应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}；2 个位移分量 u、v。基本方程数目和未知函数的数目相等，在适当的边界条件下是能得到解答的。

三、平面问题的边界条件

平面问题的边界条件有以下三种。

1. 位移边界条件

若弹性体在边界上给定位移分量$\bar{u}$、$\bar{v}$，它们是边界坐标的已知函数。作为基本方程的位移分量 u、v 则是坐标的待求函数，当代入边界坐标时，必须等于该点的给定位移，即要求

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \tag{1-10}$$

式（1-10）就是位移边界条件。

2. 应力边界条件

若弹性体在边界上给定表面力分量$\bar{X}$、$\bar{Y}$，它们在边界上是坐标的已知函数。作为基本方程解的应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}则是坐标的待求函数。在边界上，应力分量与给定表面力之间的关系——即应力边界条件，可由边界上小单元体的平衡条件得出。

在边界上取出小单元体，它的斜面 AB 与物体的边界重合，如图 1-6 所示。用 N 代表边界面 AB 的外法线方向，并令 N 的方向余弦为

$$\cos(N, x) = l$$
$$\cos(N, y) = m$$

若边界面 AB 的长度为 ds，则 PA 和 PB 的长度分别为 $l ds$ 和 $m ds$。垂直于图面的尺寸取为一个单位。作为在边界上的已知面力沿坐标轴的分量为$\bar{X}$、$\bar{Y}$。

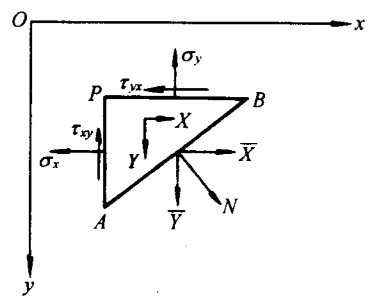


图 1-6　应力边界条件

由平衡条件$\sum F_x = 0$，得

$$\bar{X}\,ds\times 1-\sigma_x l\,ds\times 1-\tau_{yx} m\,ds\times 1+X\frac{l\,ds\,m\,ds\times 1}{2}=0$$

略去高阶微量并各项同除以 ds，并令 ds 趋于零，则得

$$l(\sigma_x)_s+m(\tau_{yx})_s=\bar{X}$$

式中$(\sigma_x)_s$，$(\tau_{yx})_s$是应力分量的边界值。

同样，由平衡条件$\sum F_y=0$，得

$$m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s=\bar{Y}$$

于是得到物体边界上各点应力分量与面力分量之间的关系式，即平面问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}l(\sigma_x)_s+m(\tau_{yx})_s&=\bar{X}\\ m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s&=\bar{Y}\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

当边界垂直于某一坐标轴时，应力边界条件的形式将大为简化：在垂直于 x 轴的边界上，x 值为常量，$l=\pm 1$，$m=0$，应力边界条件简化为

$$(\sigma_x)_s=\pm\bar{X},(\tau_{xy})_s=\pm\bar{Y}$$

在垂直与 y 轴的边界上，y 值为常量，$l=0$，$m=\pm 1$，应力边界条件简化为

$$(\sigma_y)_s=\pm\bar{Y},(\tau_{yx})_s=\pm\bar{X}$$

可见，在这种情况下，应力分量的边界值等于对应的面力分量。

3. 混合边界条件

当物体的一部分边界具有已知位移，而另一部分边界具有已知面力时，则具有已知位移的边界可应用式（1-10），具有已知面力的边界可应用式（1-11）。此外，还可能在同一部分边界上出现混合边界条件，即两个边界条件中的一个是位移边界条件，另一个则是应力边界条件。

四、圣维南原理

在求解弹性力学问题时，使应力分量、形变分量、位移分量完全满足基本方程并不困难；但要使得边界条件也得到完全满足，却往往发生很大的困难（因此，弹性力学问题在数学上被称为边界值问题）。

另一方面，在很多的工程结构计算中，都会遇到这样的情况：在物体的一小部分边界上，仅仅知道物体所受的面力的合力，而这个面力的分布方式并不明确，因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件。

在上述两种情况下，圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理可以这样来陈述：如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同），那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

五、平面问题的解法

在弹性力学里求解未知的应力分量、应变分量和位移分量，按基本变量的选定可分为：应力法、位移法和混合法等三种。

应力法是以应力分量作为基本未知函数，综合运用平衡、几何和物理方程，得到只包含应力分量的微分方程，由这些微分方程和边界条件求出应力分量，再用物理方程求出应变分量，用几何方程求出位移分量。