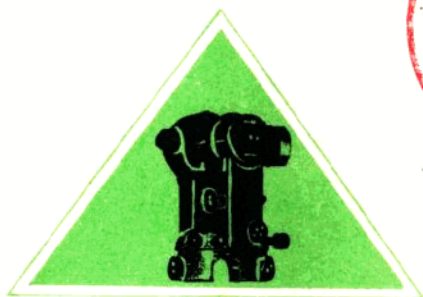


987/36

44032

测边三角网平差计算手册

田 文 纯



《河北测绘》编委会

987/36

测边三角网平差计算手册

田 文 纯

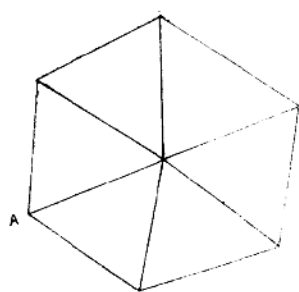
《河北测绘》编委会

前 言

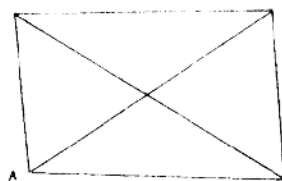
随着电磁波测距仪的广泛应用，测边三角网，作为一种布网形式，已相应问世，测边网比测角网精度高，在一定的条件下，有它一定的优越性。

本手册，仅就测边网平差和精度估算，作系统的研讨：包括各种网形和插点等三十八种图形。根据各种不同图形，采用角闭合法、边闭合法、边角混合闭合和坐标闭合等条件平差。对不适宜采用条件平差的图形则采用间接观测平差，根据图形的不同特点，选择一套比较简单的平差方法和精度估算方法。除同类图形选择一个算例外，其余图形均有算例，可供城市、工矿、水利、交通等工程测量部门的测绘人员在实际作业中参考。本手册承大连工学院范家鼎教授和冶金部西安冶金勘察公司孙觉民高级工程师和沈阳冶金勘察公司孙镇高级工程师审校。就此表示深切谢意。由于作者水平有限，缺点和错误之处，希望读者批评和指正。

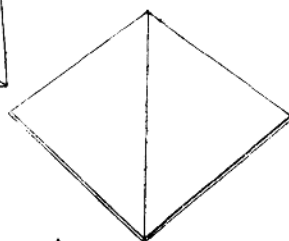
作者



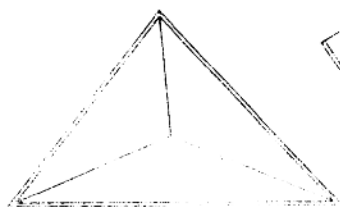
图一



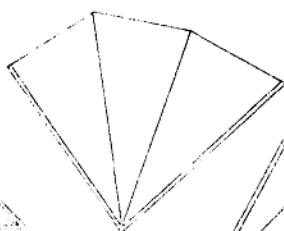
图二



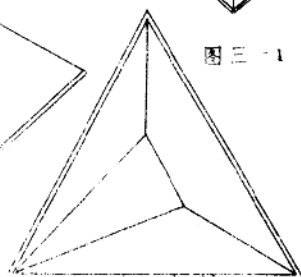
图三-1



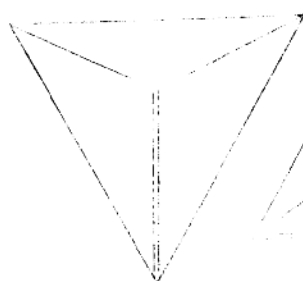
图三-2



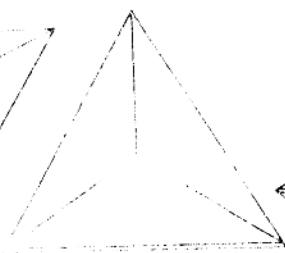
图四-1



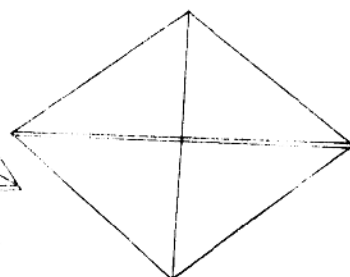
图四-2



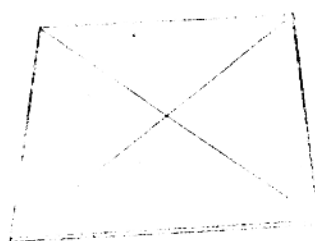
图四-3



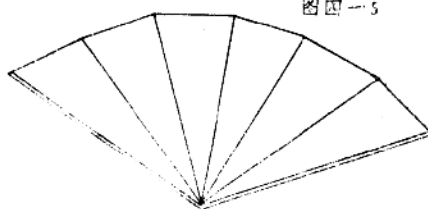
图四-4



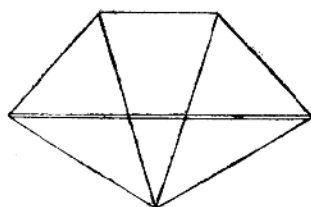
图四-5



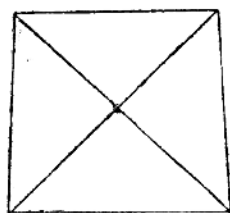
图四-6



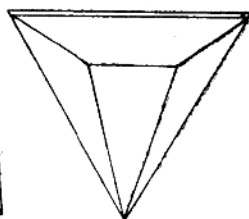
图四-7



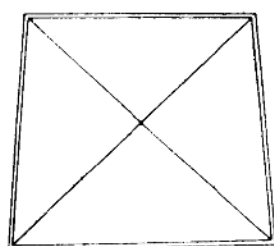
图六-1



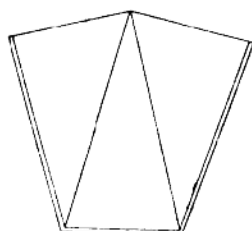
图六-2



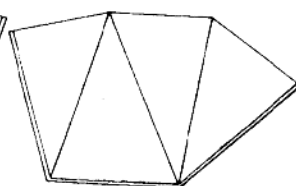
图六-3



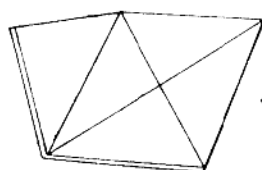
图七-1



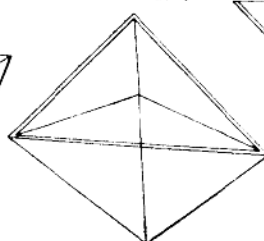
图七-2



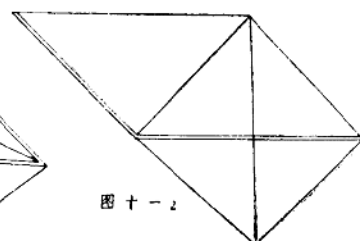
图八



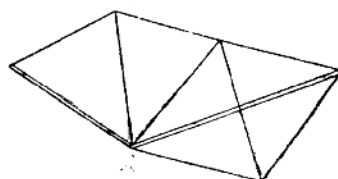
图九



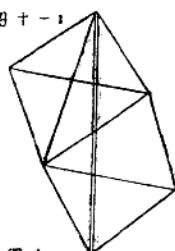
图十-1



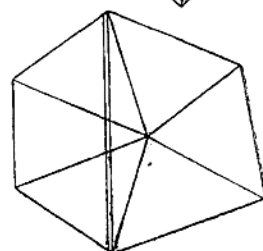
图十-2



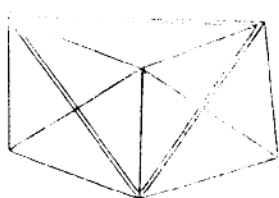
图十一



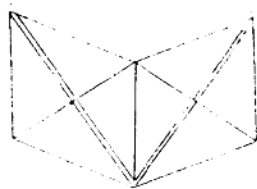
图十二



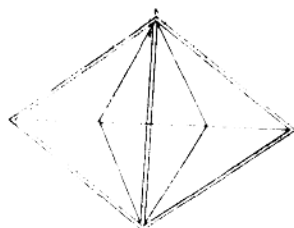
图十三



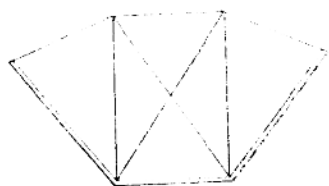
图十四-1



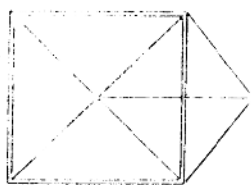
图十四-2



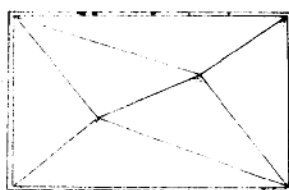
图十五



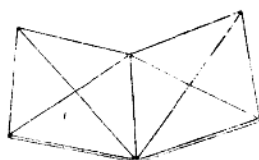
图十六



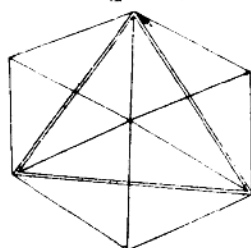
图十七



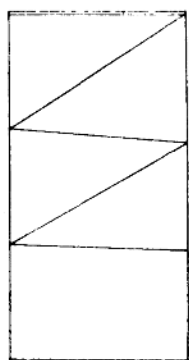
图十八



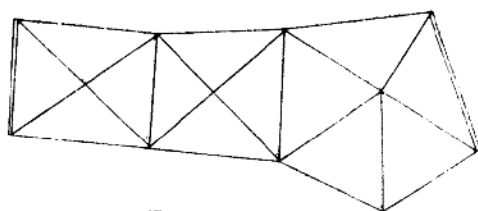
图十九



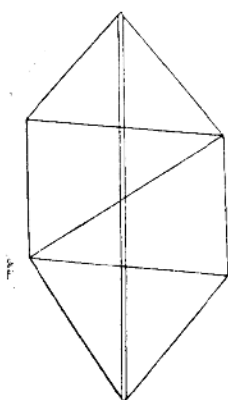
图二十



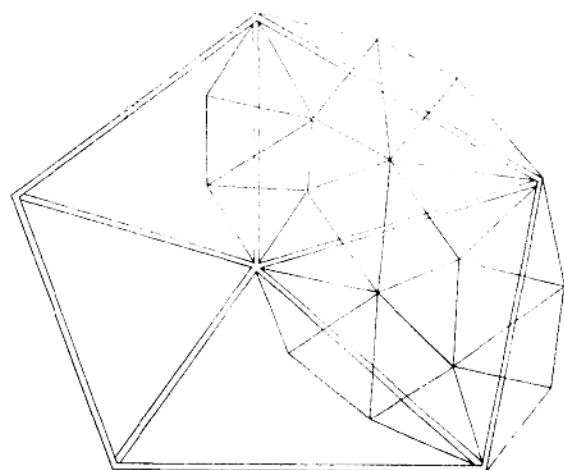
图二十一



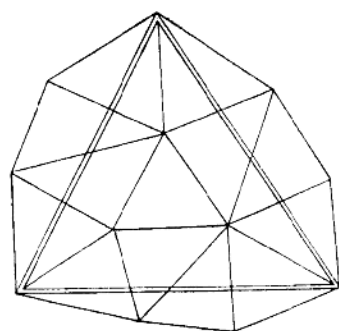
图二十二



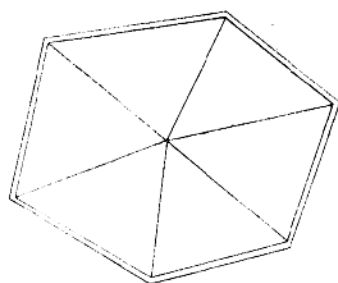
图二十三



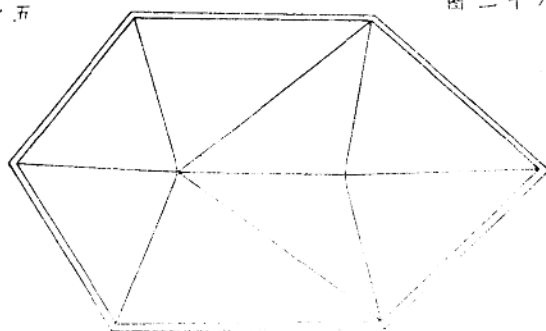
图二十四



图二十五



图二十六



图二十七

目 录

第一章：条件观测平差.....	1
（一）条件方程式的个数.....	1
（二）角闭合条件方程式的列立.....	1
（三）计算步骤.....	3
（四）纵横坐标条件方程式的列立.....	59
（五）边闭合条件方程式的列立.....	65
（六）定向角条件方程式的列立.....	70
第二章：间接观测平差.....	81
第三章：测边三角网、锁的精度估计.....	88
（一）两端有已知方位角的测边三角锁的精度估计.....	88
（二）仅一端有一个方位角的测边三角锁的精度估计.....	90
（三）两端有已知方位角的测边大地四边形锁的精度估计.....	90
（四）仅一端有方位角，正大地四边形锁的精度估计.....	92
（五）一对角为 60° 的平行大地四边形锁的精度估计.....	93
（六）测边正三角形双锁的精度估计.....	95

第一章

条件观测平差

(一) 条件方程式的个数

1、具有一个方向和一个固定点的网条件方程式的个数

当有一个点为已知,再决定另一个点位时,需要一条边和一个方位,以后每决定一个点位,需要两条边。设待定点有 P 个,必需有 $2P-1$ 条边,我们知道条件方程式的个数,就是多余观测的个数。从所有观测的个数 n 中减去必需的观测个数 $2P-1$,就是条件方程式的个数,用公式表示:

$$\gamma = n - (2P - 1) = n - 2P + 1$$

γ 是条件方程式的个数

例一、如图一是一个中点多边形,观测12条边, 6个待定点, A为已知点: 即 $n=12$
 $P=6$, $\gamma = 12 - 2 \times 6 = 0$

例二、图二是一个大地四边形, A为已知点, 观测6条边, 3个待定点, 即 $n=6$,
 $P=3$ 。

$$\gamma = 6 - 2 \times 3 + 1 = 1$$

在网中每有一个中点多边形或一个大地四边形, 就有一个条件方程式。

2、非自由网条件方程式的个数

网中有两个以上的已知点, 称为非自由网, 在非自由网中, 每决定一个点位, 需要两条边。设 P 为待定点的个数, 需要 $2P$ 条边。从观测的个数 n 中减去必需的观测个数 $2P$, 即为多余的观测个数, 则条件方程式的个数, 用公式表示: $\gamma = n - 2P$

例一、如图三一1, 图三一2, 观测3条边, 1个待定点,

$$n=3 \quad P=1$$

$$\gamma = 3 - 2 \times 1 = 1$$

例二、如图十一, 观测8条边, 3个待定点, $n=8$

$$P=3 \quad \gamma = 8 - 2 \times 3 = 2$$

例三、如图二十七, 观测24条边, 9个待定点,

$$n=24 \quad P=9 \quad \gamma = 24 - 2 \times 9 = 6$$

(二) 角闭合条件方程式的列立

角闭合条件方程, 象测角三角网的图形、站、和, 条件方程一样, 不同的是: 测角三

角网观测的是角,改正的也是角,而测边三角网观测的是边长,角度是用三条边长计算出来的,角度改正数是边长改正数的函数,也就是说,测边三角网,直接改正边长,间接改正角度。如下面三角形 $\triangle ABC$ 中, S_1, S_2, S_3 是观测的三条距离,用余弦定理计算 γ 角:

$$S_3^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\gamma$$

微分上式:



$$2S_3V_{S_3} = 2S_1V_{S_1} + 2S_2V_{S_2} - 2S_2\cos\gamma V_{S_1} - 2S_1\cos\gamma V_{S_2} + 2S_1S_2\sin\gamma \frac{V\gamma}{\rho}$$

以后均以或是误差代替微分量,将上式化简:

$$V\gamma = \rho \left[\left(\frac{\cot\gamma}{S_1} - \frac{\csc\gamma}{S_2} \right) V_{S_1} + \left(\frac{\cot\gamma}{S_2} - \frac{\csc\gamma}{S_1} \right) V_{S_2} + \frac{\csc\gamma S_3}{S_1S_2} V_{S_3} \right]$$

上式角改正数,就是用边长改正数表示的,我们叫做角改正数方程式,仔细观察 V_{S_3} 的系数是有规划的。

V_{S_1}, V_{S_2} 的系数:夹角 γ 的余切除以本边长,再减去夹角的余割除以相邻的边长。

V_{S_3} 的系数:夹角的余割乘其相对边长,除以夹角两边长的乘积。

V_{S_3} 的系数用电子计算器计算是很方便的,如使用三角函数表,可将角改正数方程式变成如下形式:

$$V\gamma = \rho \left[\left(\frac{1}{S_1 \tan\gamma} - \frac{1}{S_2 \sin\gamma} \right) V_{S_1} + \left(\frac{1}{S_2 \tan\gamma} - \frac{1}{S_1 \sin\gamma} \right) V_{S_2} + \frac{S_3}{S_1S_2 \sin\gamma} V_{S_3} \right]$$

V_{S_1}, V_{S_2} 系数:1除以本边长乘夹角的正切,减去1除以夹角的正弦与另一相邻边的乘积。

V_{S_3} 的系数:夹角的对边,除以夹角的正弦与其两边的乘积。掌握以上规划,看图就可以列立。

$$\text{设转换系数: } g_{S_1}^r = \left(\frac{\cot\gamma}{S_1} - \frac{\csc\gamma}{S_2} \right) = \left(\frac{1}{S_1 \tan\gamma} - \frac{1}{S_2 \sin\gamma} \right)$$

$$g_{S_2}^r = \left(\frac{\cot\gamma}{S_2} - \frac{\csc\gamma}{S_1} \right) = \left(\frac{1}{S_2 \tan\gamma} - \frac{1}{S_1 \sin\gamma} \right)$$

$$g_{S_3}^r = \frac{\csc\gamma S_3}{S_1S_2} = \frac{S_3}{S_1S_2 \sin\gamma}$$

角改正数方程式简写成下式

$$V\gamma = \rho (g_{S_1}^r V_{S_1} + g_{S_2}^r V_{S_2} + g_{S_3}^r V_{S_3})$$

如例一的中点多边形,中心点条件方程式:

$$Vr_1 + Vr_2 + Vr_3 + Vr_4 + Vr_5 + w = 0 \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} Vr_1 &= g_{s_1}^{r_1} V_{s_1} + g_{s_2}^{r_1} V_{s_2} + g_{l_1}^{r_1} V_{l_1} \\ Vr_2 &= g_{s_2}^{r_2} V_{s_2} + g_{s_3}^{r_2} V_{s_3} + g_{l_2}^{r_2} V_{l_2} \\ Vr_3 &= g_{s_3}^{r_3} V_{s_3} + g_{s_4}^{r_3} V_{s_4} + g_{l_3}^{r_3} V_{l_3} \\ Vr_4 &= g_{s_4}^{r_4} V_{s_4} + g_{s_5}^{r_4} V_{s_5} + g_{l_4}^{r_4} V_{l_4} \\ Vr_5 &= g_{s_5}^{r_5} V_{s_5} + g_{s_1}^{r_5} V_{s_1} + g_{l_5}^{r_5} V_{l_5} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

将(2)式代入(1)式,最后条件方程式为

$$(g_{s_1}^{r_1} + g_{s_1}^{r_5}) V_{s_1} + (g_{s_2}^{r_1} + g_{s_2}^{r_2}) V_{s_2} + (g_{s_3}^{r_2} + g_{s_3}^{r_3}) V_{s_3} + (g_{s_4}^{r_3} + g_{s_4}^{r_4}) V_{s_4} + (g_{s_5}^{r_4} + g_{s_5}^{r_5}) V_{s_5} + g_{l_1}^{r_1} V_{l_1} + g_{l_2}^{r_2} V_{l_2} + g_{l_3}^{r_3} V_{l_3} + g_{l_4}^{r_4} V_{l_4} + g_{l_5}^{r_5} V_{l_5} + w = 0 \dots\dots\dots(3)$$

注: r 角超过 90° , $\cos r$, $\tan r$ 要变号

l, S 以百米为单位, $\rho = 2.062$

(3)式中 V_s 系数的计算按表格进行,详见以后算例。

精 度 评 定

边长权函数式 $f_s = V_s$

方位角权函数式 $f_\alpha = [\pm Vr] = f[Vr]$

Vr 可从角方程式表中直接取用

单位权中误差公式 $\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{r}}$

权倒数公式 $\frac{1}{\rho} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} \dots\dots\dots$

中误差公式 $m = \mu \sqrt{\frac{1}{p}}$

两相邻点位中误差 $M = \sqrt{m_s^2 + (\frac{m_\alpha}{\rho} S)^2}$

(三) 计算步骤

- 1、抄录起算数据:如已知坐标、距离、方位角和观测距离等,
- 2、用余弦定理计算列立角闭合条件方程式所用的角度,
- 3、按表格计算边长改正数 V_s 的系数,然后纵向相加得条件方程式的系数,
- 4、列立边长和方位角的权函数 f_s, f_α ,

5、组成法方程式并解算，

6、将法方程式的联系数K代入改正数方程式，得边长改正数 V_s ，

7、将边长改正数 V_s 代入角改正数方程式，横向相加得角改正数，

8、用改正后的边长和角度计算坐标，

9、用坐标反算边长，检验平差后的边长，

10、精度评定。

注：观测边长要经过定常数、乘常数、大气、球差、折光差、和需要的投影，改化等项改正后，才能平差计算。

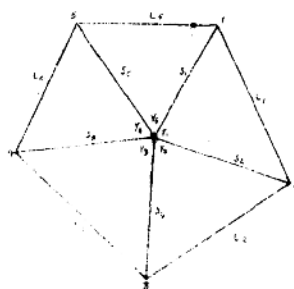
算例一，中点多边形

$$n = 10 \quad p = 5$$

$$\gamma = 10 - 2 \times 5 + 1 = 1$$

条件方程式： $Vr_1 + Vr_2 + Vr_3 + Vr_4 + Vr_5 + w = 0$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 - 360^\circ = +72.4$$



图一

已知坐标：点号 $\begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \end{matrix}$ 已知方位角： $\alpha_{0.1} = 30^\circ 00' 00''$

观 测 距 离				计 算 角		
s	改正数	l_i	改正数		γ	改正数
178.437m	+6.2mm	270.100m	-7.8	1	73° 39' 52".8	-20.6
259.072	+8.0	375.585	-5.3	2	71 21 32.4	-11.9
367.068	+7.2	429.491	-4.7	3	76 19 59.3	-9.5
325.990	+5.0	300.015	-4.6	4	56 19 27.7	-8.1
308.72	+8.6	335.480	-7.8	5	82 20 20.2	-22.3

$$w = +12.4$$

方程式系数计算表

Vr_i	Vs_1	Vs_2	Vs_3	Vs_4	Vs_5	Vl_1	Vl_2	Vl_3	Vl_4	Vl_5	Vr_i
1	-0.491	-0.971				+1.255					-20.6
2		-0.323	-0.649				+0.860				-11.9
3			-0.514	-0.424				+0.762			-9.5
4				-0.381	-0.315				+0.738		-8.1
5	-0.581				-1.076					+1.267	-22.3
a	-1.009	-1.294	-1.163	-0.805	-1.391	+1.255	+0.860	+0.762	+0.738	+1.267	-w
Vs, Vl	+6.2	+8.0	+7.2	+5.0	+8.6	-7.8	-5.3	-4.7	-4.6	-7.8	

$[vv] = 446.26$ 上表计算 s, l 以百米为单位 $\rho = 2.062$

最后条件方程式

$$-1.009Vs_1 - 1.294Vs_2 - 1.163Vs_3 - 0.805Vs_4 - 1.391Vs_5 + 1.255Vl_1 + 0.860Vl_2 + 0.762Vl_3 + 0.738Vl_4 + 1.267Vl_5 + 72.4 = 0$$

法方程式组成和解算

$$11.67k + 72.4 = 0$$

$$k = -6.202$$

用 k 乘上表 a 栏, 得边长改正数 Vs Vl 用 Vs Vl 乘上表各项, 横向相加, 求得中心角改正数 Vr 。

最后坐标计算

点号	方位角 c f u	距离 m	x	y
0			0	0
0—1	30 00 00	178.443	154.536	89.222
0—2	103 39 32.2	259.080	-61.180	251.753
0—3	175 00 52.7	367.075	-365.686	31.899
0—4	251 20 42.5	325.995	-104.279	-308.868
0—5	307 40 2.1	308.881	188.749	-244.501

精度评定

$$\text{单位权中误差} \quad \mu = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm 21.1\text{mm}$$

$$0-2\text{边长的权函数式} \quad fs_2 = V_{s_2}$$

$$\text{权倒数} \quad \frac{1}{p_{s_2}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} = 1 - 0.14 = 0.86$$

$$\text{边长中误差} \quad m_{s_2} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{s_2}}} = \pm 19.6\text{mm}$$

$$0-2\text{边方位角权函数式} \quad f_{\alpha_{02}} = V_{\alpha_{02}} = -0.491V_{s_1} - 0.971V_{s_2} + 1.255V_{s_3}$$

$V_{\alpha_{02}}$ 可直接从系数计算表中取出

$$\text{权倒数} \quad \frac{1}{p_{\alpha_{02}}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} = 2.76 - 0.95 = 1.72$$

$$\text{方位角中误差} \quad m_{\alpha_{02}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\alpha_{02}}}} = \pm 27.4''$$

$$\text{相对点位中误差} \quad M_{02} = \sqrt{m_{s_2}^2 + \left(\frac{m_{\alpha_{02}}}{\rho} s_2\right)^2} = \pm 39.6\text{mm}$$

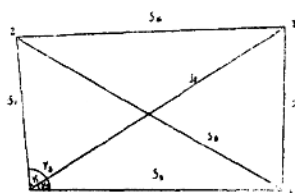
算例二、大地四边形

$$n=6 \quad p=3$$

$$\gamma = 6 - 2 \times 3 + 1 = 1$$

$$\text{条件方程式: } Vr_1 + Vr_2 - Vr_3 + w = 0$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = +12.6$$



图二

已知坐标: 点号 $\begin{matrix} x & y \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ 已知方位角 $\alpha_{12} = 10^\circ 00' 00''$

s_i	观测距离	改正数	v_{r_i}	计算角	改正数
1	860.205	-5.5	1	$41^\circ 14' 31.4''$	-3.6
2	806.242	+9.5	2	$34 \quad 30 \quad 33.7$	-4.1
3	707.125	-6.5	3	$75 \quad 44 \quad 52.5$	-4.9
4	1204.174	-6.2			
5	800.022	-6.4			
6	989.924	+7.8		$w = +12.6$	

方程式系数计算表

V_{r1}	V_{s1}	V_{s2}	V_{s3}	V_{s4}	V_{s5}	V_{s6}	V_{r1}
1	+0.032	-0.193		+0.258			-3.6
2		-0.202	+0.070		+0.265		-4.1
-3	+0.199		+0.199			-0.324	-4.9
a	+0.231	-0.395	+0.269	+0.258	+0.265	-0.324	= w
V_s	-5.5	+9.5	-6.5	-6.2	-6.4	+7.8	

$$[VV] = 302.99$$

最后条件方程式

$$+0.231V_{s1} - 0.395V_{s2} + 0.269V_{s3} + 0.258V_{s4} + 0.265V_{s5} - 0.324V_{s6} + 12.6 = 0$$

法方程式的组成和解算

$$0.523K + 12.6 = 0$$

$$K = -24.092$$

最后坐标计算

点号	方位角	距离	x	y
1			0	0
1-2	10° 00' 00"	806.199	793.951	139.995
1-3	51 14 27.8	1204.184	753.873	939.006
1-4	85 44 57.4	806.226	59.759	804.018

精度评定

$$\text{单位权中误差 } \mu = \sqrt{\frac{[VV]}{r}} = \pm 7.8\text{mm}$$

1-2边长权函数式 $f_{s1} = V_{s1}$

$$\text{权倒数 } \frac{1}{p_{s1}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$\text{边长中误差 } ms_2 = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{s1}}} = \pm 6.5\text{mm}$$

1-2边方位角权函数式 $f_{a12} = +0.032V_{s1} - 0.193V_{s2} + 0.258V_{s4}$

$$\text{权倒数 } \frac{1}{p_{a12}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} = 0.105 - 0.043 = 0.062$$

方位角中误差

$$m_{\alpha_{13}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\alpha_{13}}}} = \pm 1''.9$$

相对点位中误差

$$M = \sqrt{m_{r_2}^2 + \left(\frac{m_{\alpha_{13}}}{\rho} S_2 \right)^2} = \pm 11.0 \text{mm}$$

算例三

图三一1、图三一2，是同类图形，均是已知三点插一点，以图三一1为例，

$$n=3 \quad p=1$$

$$\gamma = 3 - 2 \times 1 = 1$$

条件方程式：\$Vr_1 + Vr_2 - B + w = 0\$

$$w = \gamma_1' + \gamma_2 - B = -8''.2$$

已知坐标

	x	y
A	900.000	100.000
B	0	0
C	100.000	900.000

已知距离

$$S_{AB} = 905.538 \text{m}$$

$$S_{BC} = 905.538$$

$$S_{AC} = 1131.371$$

已知方位角

$$\alpha_{BA} = 6^\circ 20' 24''.7$$

$$\angle B = 77^\circ 19' 10''.6$$

$$w = -8''.2$$

s	观测距离	改正数	γ	计算角	改正数
1	565.660	+4.7	1	38° 39' 44''.4	+4''.1
2	583.125	+9.8	2	38 39 18.0	+4.1
3	583.055	+9.8			

方程式系数表

Vr	Vs_1	Vs_2	Vs_3	Vr
1	+0.091	+0.376		+4''.1
2	+0.091		+0.376	+4.1
a	+0.182	+0.376	+0.376	=w
Vs	+4.7	+9.8	+9.8	

最后坐标计算

点号	方位角	距离	x	y
B			0	0
A	6° 20' 24".7			
1	45 00 13.2	565.6647	399.960	400.011

$$[VV] = 214.17$$

最后条件方程式

$$+0.182Vs_1 + 0.376Vs_2 + 0.376Vs_3 - 8.2 = 0$$

法方程式组成和解算

$$0.316k - 8.2 = 0 \quad k = +25.960$$

精度评定

$$\text{单位权中误差} \quad \mu = \sqrt{\frac{[VV]}{\gamma}} = \pm 14.6 \text{mm}$$

$$\text{B-1边长的权函数式} \quad f_{s_1} = Vs_1$$

$$\text{权倒数} \quad \frac{1}{p_{s_1}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} = 1 - 0.1 = 0.90$$

$$\text{边长中误差} \quad m_{s_1} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{s_1}}} = \pm 13.8 \text{mm}$$

$$\text{B-1边方位角权函数式} \quad f_{\alpha_{B1}} = V_{\alpha_1} = +0.091Vs_1 + 0.376Vs_2$$

$$\text{权倒数} \quad \frac{1}{p_{\alpha_{B1}}} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} = 0.150 - 0.079 = 0.071$$

$$\text{方位角中误差} \quad m_{\alpha_{B1}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{\alpha_{B1}}}} = \pm 3''.9$$

$$\text{相对点位中误差} \quad M_{B,1} = \sqrt{m^2_{s_1} + \left(\frac{m_{\alpha_{B1}}}{\rho}\right)^2} = \pm 17.4 \text{mm}$$