

第六届全国计算流体力学会议论文集

计算流体力学的理论、方法和应用

中国力学学会办公室 编
全国计算流体力学会议组委会

科学出版社

第六届全国计算流体力学会议论文集
计算流体力学的理论、方法和应用

中国力学学会办公室 编
全国计算流体力学会议组委会

科学出版社

1992

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书根据 1992 年 5 月第六届全国计算流体力学会议上的报告编选而成。内容涉及计算理论和方法、网格技术、流场显示和计算流体力学的工程应用,对于从事有关研究工作的人员有参考意义。

第六届全国计算流体力学会议论文集

计算流体力学的理论、方法和应用

中国力学学会办公室 编
全国计算流体力学会议组委会

执行编辑 赵大刚 谢剑璠 郭文海
责任编辑 李成香

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100707

中国科学院力学研究所联合计算中心排版

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992 年 4 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1992 年 4 月第一次印刷 印张: 23 3/4

印数: 1—1 500 字数: 548 000

ISBN 7-03-002933-x / O · 545

定价: 22.00 元

第六届全国计算流体力学会议 组织委员会

组 长: 张涵信

副组长: 陈耀松 黄兰洁

成 员: 卞荫贵 朱自强

许协庆 庄礼贤

陈九锡 李德元

苏纪兰 忻孝康

汪翼云 沈孟育

季仲贞 范正翘

林超强 林 逸

黄明恪 傅德薰

前 言

这本论文集是根据全国第六届计算流体力学会议录用的报告经整理、编选而成。论文包含计算方法和理论、网格生成技术、计算流场显示、计算流体力学的工程应用诸方面。我们将这些大体反映我国计算流体力学工作研究状况的论文收集成册，目的是希望在更大的范围内交流，以促进我国计算流体力学研究工作的进一步发展。

全国计算流体力学会议已经连续开了六次。前五届均由中国力学学会和中国空气动力学学会主办。这一届除上述两个学会外，主办学会又增加了中国航空学会和中国宇航学会，并得到了中国空气动力研究与发展中心、北京应用物理及计算数学研究所、中国科学院大气所、北京大学力学系、中国科学院力学所联合计算中心、福州大学等单位的支持和资助，对此深表感谢。这也说明，计算流体的研究工作，越来越受到各方面的关注，我们对此感到欢欣鼓舞。我们希望，我国的计算流体力学工作者，能重视计算流体力学的工程应用，重视与实验研究工作的结合和实验验证，重视与分析研究的结合，重视吸收相邻学科的新成果，在发展计算方法、计算理论上作出新成绩，在流场显示等计算后处理上迈出新步伐，在流动机理研究上作出新进展，在工程应用上达到新水平。

在论文编选过程中，中国力学学会办公室、中国科学院力学所联合计算中心的同志做了大量具体工作，在此也表示感谢。

全国计算流体力学会议
组织委员会
1992.3

目 录

邀请报告

数值模拟与解析分析	庄逢甘, 张涵信 (1)
计算地球流体力学的一些新进展	曾庆存 (12)
计算生物流体力学若干最新进展	吴望一 (17)
计算流体力学的可视化问题	李德元, 金其杰 (24)
计算流体力学中并行算法发展概况	敖 超, 王平治 (30)

会议论文

二维黎曼问题的数值计算	吴雄华 (35)
非惯性系中三维跨声速欧拉流的一个高分辨率显格式	王保国, 卞荫贵 (39)
二维欧拉方程有限元算法和自适应网格加密技术	周春华, 杨岷生 (43)
求解航天飞机高超声速无粘绕流的自适应有限元方法	徐守栋, 吴望一, 严宗毅, 温功碧 (47)
Euler 方程的广义 Riemann 不变量及其在守恒格式中的应用	李松波 (51)
一个三级四阶常微分方程差分格式的构造	秦孟兆, 朱文杰, 张梅青 (55)
可压缩复杂流场的一种守恒分区方法	周继根 (59)
改进的显式完全平方守恒差分格式及检验	董加瑞, 季仲贞 (63)
人工压缩方程的 OBLC 区域分解法	林明森, 黄兰洁 (67)
一种求解三维 Navier-Stokes 方程组的无矩阵运算显隐差分格式	刘景梅, 刘 斌, 向一敏 (71)
非正交贴体坐标系 N-S 方程的简易数值方法	陈九锡, 温广成 (75)
二维完全 N-S 方程组有限元分析和计算	曹树声, 刘连元, 童秉纲, 姜贵庆 (79)
流动结构及其物理尺度分析在数值计算流场中的作用	庄逢甘, 高 智 (83)
模拟突然起动来流绕圆柱问题的分区混合方法	孙德军, 尹协远, 庄礼贤 (87)
复杂多连通区域分块计算的研究	严建平, 许学谔, 岑可法, 凌理华 (91)
蜗壳流场中确定分流线的原理和有限元的迭代计算	章本照, 密 柯 (95)
不可压粘性流动的 MAC 格式的解耦稳定性分析	周 钢, 周 松 (99)
跨音速翼型和机翼的反设计计算方法	朱自强, 夏智勋, 吴礼义 (103)
跨音速翼型设计的一种满足正则化条件的反设计方法	朱自强, 夏智勋, 吴礼义 (107)
曲线网格自动生成中的源项计算方法	武晓松, 吴国钊 (111)
推进优化网格生成方法	张玉伦, 陈作斌, 余 涛 (115)
椭圆型变换网格的内点密度控制	卢晨曦, 糜振星, 缪国平, 刘应中 (119)
三维空间网格表面及其等值线投影可见性的确定方法	刘杰克, 郑胜秋 (123)
直接模拟蒙特卡罗方法中的一个新算法——随机取样频率法	樊 菁, 沈 清 (127)
Monte-Carlo 直接仿真含化学反应稀薄流的算法研究	石于中, 任 兵, 吴其芬 (131)
对传统预处理方法的若干数值研究	雷光耀, 张石峰 (135)
CFD 中发展并行计算的策略探讨	任 兵, 李秀英 (139)

三维流体力学计算后处理软件包的生成与显示	刘慎之, 刘景梅, 刘 斌, 向一敏 (143)
计算空气动力学流场可视化与动画制作初探	卢 笙, 邓小刚, 沈 清 (147)
跨音速翼型上激波 / 边界层干扰的自适应控制计算	
.....	马 侠, 蒋金贵, 张绵纯, 肖林奎 (151)
用二维 N-S 方程计算汽车绕流的地面效应	朱国林 (155)
一种用于叶轮机内部三元分离流动预测的 Euler 方程求解方法 ...	丰镇平, 沈祖达 (159)
航天飞机简化外形高超声速小攻角粘性绕流的数值模拟 ...	沈 清, 高树椿, 张涵信 (163)
航天飞机无粘绕流流场数值计算	郭智权 (167)
航天飞机简化外形的气动特性	叶友达, 张涵信, 高树椿, 郭智权 (171)
航天飞机轨道器高超声速无粘流场的数值模拟	毛枚良, 叶友达, 张涵信 (175)
航天飞机超声速粘性绕流问题的数值模拟	马延文, 傅德薰 (179)
钝头体超音非平衡绕流的数值求解	陈炳木, 张裕平, 郭祥东 (183)
复杂外形三维欧拉方程计算	陈红全, 黄明恪 (187)
机身附面层折射对桨扇噪声的影响	黄文剑, 胡章伟 (191)
轴对称喷管内外流场的数值计算	邵继锋, 温功碧, 吴望一 (195)
喷流流场有限元数值模拟	王 岩, 毛国良, 姜贵庆 (199)
离心叶栅湍流流场的数值研究	武晓松, 吴国钊 (203)
用贴体坐标方法计算后向台阶内圆柱绕流问题	严建平, 任安禄, 许学谔 (207)
飞机亚跨超绕流流场数值模拟研究	张玉伦, 余 涛, 陈汝贤, 陈作斌 (211)
过山气流的风场和湍流特征的数值研究	张志新, 骆振欧, 谭伯彦 (215)
超声速主流与横向喷流复杂干扰流场数值模拟	周伟江, 马汉东, 李 锋 (219)
捆绑火箭有攻角无粘数值计算	杨永健, 张鲁民 (223)
再入弹抛壳气动特性研究	柳 森, 张鲁民 (227)
平面方舵高超音速粘性绕流的数值模拟	邓小刚, 张涵信 (231)
三维跨音速叶栅粘流的数值模拟	黄东涛, 沈孟育 (235)
超音速内流 NS 方程的 ENO 格式数值解研究	马汉东 (239)
应用矩函数求解含激波跨声速流道及叶栅气动反命题	刘高联, 郭加宏 (243)
关于斜流泵的开发与研究——转轮水力损失的预测	
.....	徐天茂, 钱 晓, 陈文学, 张赛珍 (246)
翼型非定常运动的数值模拟	郭文海, 付德薰, 马延文 (247)
等速上仰翼型分离流动的数值计算研究	孙 茂, 王家禄, 罗 江 (251)
翼型——扰流片的分离气动特性计算	陈劲松, 孙少鹏 (255)
非定常分离流场的数值模拟和特性研究	唐登斌 (259)
表面吸气对圆柱非定常绕流的影响	陈南茜, 孙以均 (263)
驱动方腔流动的 Hopf 分叉	刘 宏, 傅德薰, 马延文 (267)
振动襟翼的非定常气动力特性研究	王保育, 李 锋, 汪翼云, 崔尔杰 (271)
大迎角机翼-机身组合体非定常流的数值模拟	叶正寅, 杨永年 (275)
跨声速机翼颤振分析的时域解法	张建柏 (279)

蒸汽凝结两相流的特征线理论计算在冷凝激波管内应用	樊怀国, 何卓烈 (283)
氮经强激波的高解	胡振华, 沈 青, 徐晓燕, 吴万泉 (287)
激波与物体相互作用的数值模拟	陆夕云, 庄礼贤 (291)
跨音速翼型绕流的有粘 / 无粘干扰数值解	李凤蔚, 鄂 秦 (295)
自适应网格技术求解平板层流边界层流动	叶 涛, 任安禄 (299)
湍流半方程模型的讨论和应用	余泽楚, 陈 兰 (303)
高超声速层流尾迹的数值模拟	张涵信, 黎作武 (307)
自由剪切层中离散涡的数值模拟	林建忠, 魏中磊 (311)
时间相关有限体积多重网格法求解跨音叶栅粘性绕流	张耀科, 祁昌军 (315)
高温空气化学反应的 DSMC 模拟	吴万泉, 沈 青, 胡振华, 徐晓燕 (319)
曹娥江河口段环境容量及绍兴市排污口合理位置的研究 ...	程杭平, 韩曾萃, 谢先德 (323)
溢油和含油废水对舟山海域水质影响的数值分析	耿兆铨, 倪勇强, 程杭平 (327)
河口咸水入侵的数学模型及物理模型预测	韩曾萃, 邵雅琴, 卢祥兴 (331)
尾矿库溃坝的数值模拟	汪德灌, 韩国其 (335)
二维波造波机理数值模拟	贺五洲 (339)
海流方程多态解问题	季仲贞, 周广庆 (343)
VOF 方法数模直墙式建筑物前的波浪破碎过程	王永学 (347)
绕圆柱振荡流动的数值解法	胡 畅, 是长春, 陈耀松 (351)
计算振荡圆柱粘性绕流的有限差分法	陆夕云, 夏 南, 庄礼贤 (355)
定常流对深潜圆柱的辐射及绕射问题的影响	吴 岩, 陶建华 (359)
溃坝波的传播与过方柱绕流计算	吴家红, 韩庆书 (363)
浸没铅直圆柱的垂荡水动力计算	谢 南 (367)
二维不可压非定常层流边界层计算	陈则霖, 杨 超 (371)
炼钢炉内二次燃烧流场的数值计算	孙 仁, 吴文勇, 鲁守智 (375)
升力面方法预报非定常螺旋桨水动力	陈家栋 (379)
铝电解槽内流动的数值模拟	黄兆林, 杨志峰, 吴江航 (383)
求解浅水方程的有限体积法	张廷芳, 段小宁 (387)
超空泡轴对称回转体附加质量	吴品奇, 杜君芬 (391)
射流引爆 TATB 的理论研究及数值模拟	曹菊珍, 张铁桥, 陈贤林 (395)
聚能射流的数值与解析耦合计算方法	杭义洪, 李维新, 于志鲁 (399)
微机黑油模型软件 WJHY 研制	周维四, 韩子臣 (403)
轴对称曲边渐扩燃烧室内两相流动的数值模拟	梁正阳, 许晋源, 严传俊 (407)
高 Froude 数气固悬浮流通过水平圆管时固体颗粒温度的计算	刘 超, 于性念 (411)
180° 弯管内的发展流动的数值研究	宋保军, 李杜鹃, 谷传纲 (415)
农田水热循环数值研究	姚德良, 沈卫明, 李家春 (419)
小巨型电脑——ALLIANT	何乐平 (423)
作者索引	(429)

数值模拟与解析分析

庄逢甘 张涵信

(航空航天部科技委)(空气动力研究与发展中心)

一、引言

60年代以前, 计算空气动力学作为一门独立学科尚未形成, 那时求解气动问题理论上主要依据解析分析方法。解析方法的优点之一是能给出各物理量之间的显式关系, 便于分析流动机理, 同时还能满足当时飞行器工程设计的要求。近几年来, 求解气动问题, 数值模拟成为主要手段, 计算空气动力学已成为一门新兴的学科发展迅速。但是随着数值模拟能力的大幅度提高, 求解问题的复杂性和应用范围要求不断增大, 给我们提出了一系列重要的问题: 如何分析越来越复杂的计算结果——数据海洋? 如何解释计算给出的流动现象是物理的还是非物理的? 如何适应物理问题而改进现有计算方法的不足? 对于这些问题, 解析分析是能够发挥应有的作用的。特别是气动方程的非线性, 在有些情况下存在分叉、突变和混沌等非线性行为, 借助于解析分析来阐明其性状和机理, 更是需要的。因此我们认为数值模拟与解析分析相结合是今后进一步发展计算空气动力学的一个重要方面。

关于利用解析分析改进和发展数值方法, 文献中已有很多成功的例子, 例如 Murman 和 Cole^[1] 的混合差分格式, Jameson^[2] 的旋转差分格式, Godunov^[3] 利用黎曼解的物理概念发展的 Godunov 方法, 以及近几年来我们发展的 NND 格式^[4]。随着对物理问题深入了解, 更好的数值方法必将相继出现。这种解析分析与数值模拟结合的重要性是显而易见的。本文将不进行这方面的专门讨论。本文将着重通过一些例子说明解析方法在分析计算结果和流动机理方面的作用。

二、激波计算中的倍周期现象

定常一维 NS 方程所描述的正激波运动方程可表示为

$$\frac{du}{dx} = \beta \frac{(u-1)(u-u_2)}{u} \quad (2.1)$$

这里 u 是用激波上游的速度无量纲化的速度, u_2 为相应的激波下游速度, $u_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_\infty^2})$, 其中 γ 为绝热指数, M_∞ 为激波远上游的马赫数, $\beta = \frac{3}{8} \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{\rho_\infty u_\infty}{\mu}$, μ 为粘性系数, ρ_∞ 为激波远上游的密度。激波远上下游, 方程(2.1)满足条件

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty, & u \rightarrow 1 \\ x \rightarrow +\infty, & u \rightarrow u_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

现在来分析上下游解的性质。把 x 轴划分为均匀网格, 并且设网格的结点号为 n , 沿 x 正向 n 增加如图1。在激波上游最左边结点的物理量已知, 所以为了研究物理量的变化, 我们建立结点 $n+1$ 与左结点 n 上的物理量关系。利用

Taylor 展开式并略去 $(\Delta x)^2$ 以上的二阶小量得

$$u^{n+1} = u^n + \tilde{\beta} \frac{(u^n - 1)(u^n - u_2)}{u^n}$$

式中 $\tilde{\beta} = \beta \Delta x$ 相当于网格雷诺数。在上游 u 可表达为 $u = 1 + \varepsilon$, 这里 $\varepsilon \ll 1$, 将此关系代入上式, 略去 ε^3 以上小量后可得

$$y^{n+1} = \alpha_u y^n (1 - y^n) \quad (2.3)$$

式中

$$\begin{cases} \alpha_u = [1 + \tilde{\beta}(1 - u_2)] \\ y = -\frac{\tilde{\beta}u_2}{1 + \tilde{\beta}(1 - u_2)}\varepsilon \end{cases} \quad (2.4)$$

另一方面, 在激波下游最右边结点上的物理量已知, 所以为了研究下游物理量的变化, 我们研究下游区结点 n 和其右结点 $n+1$ 上的物理量关系, 此时可设 $u = u_2 + \varepsilon$ 且 $\varepsilon \ll u_2$ 。经过类似的处理, 最后可得

$$z^n = \alpha_d z^{n+1} (1 - z^{n+1}) \quad (2.5)$$

式中

$$\begin{cases} \alpha_d = 1 + \frac{1-u_2}{u_2} \tilde{\beta} \\ z = \frac{u_2^2 + \tilde{\beta}(1-u_2)u_2}{\tilde{\beta}}\varepsilon \end{cases} \quad (2.6)$$

由 (2.3) 和 (2.5) 可以看出, 在激波上下游, 左右相邻结点的物理量分别满足倍周期迭代关系。

在数值求解方程 (2.1) 时, 通常都由某一中间位置 (如 $u = \sqrt{u_2}$ 的位置) 开始, 分别向左右推进。如果采用一阶 Euler 格式, 很容易求得向上推进稳定条件为 $(\beta \Delta x) \leq \frac{2}{1-u_2}$, 向下推进稳定条件为 $(\beta \Delta x) \leq \frac{2u_2}{1-u_2}$ 。如果计算中采用的 $(\beta \Delta x)$ 分别超出上述限值时将有 $\alpha_u > 3$ 和 $\alpha_d > 3$, 这样 (2.3)(2.5) 表明激波上下游将分别出现倍周期波动。

图 2 是在 $M_\infty = 5, \gamma = 1.4$ 条件下用此方法求解所得的激波曲线^[5]。计算中 $(\beta \Delta x)$ 分别取 0.40, 0.60, 0.65, 0.658, 0.659 及 0.660。根据上面的分析可知 $(\beta \Delta x) = 0.4$ 的结果, 在上下游应均无波动。其它情况在上游还不出现波动, 但在下游出现倍周期波动。实际计算完全证明分析的正确。图 3 是与图 2 相应的分叉解的曲线, 表 1 是相应的分叉解的数值。

三、多孔介质层内热对流的叉型分叉现象

研究图 4 所示多孔介质层内的热对流, 在直角坐标系 x, y 内, 根据 Darcy 定理, 其控制方程组是

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

这里我们仅考虑二维情况, u, v 为 x, y 方向上速度分量, θ 为温度, t 是时间, 均为无量纲量, Ra 为 Rayleigh 数

$$Ra = \frac{\rho C_p \beta g L \theta_w}{\lambda} \quad (3.2)$$

ρ, C_p, λ 为气体的密度, 定压比热和热传导系数, β 为膨胀系数, L 为正方形边长, θ_w 为下上表面的温度差。引进流函数 Ψ , 方程 (3.1) 可写成

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{cases} \quad (3.3)$$

在无量纲坐标系 x, y 内, 边界条件为

$$\begin{cases} x=0 \text{ 和 } x=1, & y \in (0, 1): & \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, & \Psi = 0 \\ x \in (0, 1), & y=0: & \theta = 1, & \Psi = 0 \\ x \in (0, 1), & y=1: & \theta = 0, & \Psi = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

由 (3.3) 和 (3.4) 易知, 它们有以下平凡解

$$\Psi = 0, \quad \theta = 1 - y \quad (3.5)$$

下面来研究平凡解的稳定性^[6]。给平凡解以摄动, 令

$$\begin{cases} \Psi = 0 + \psi \\ \theta = 1 - y + T \end{cases} \quad (3.6)$$

其小扰动解可写为

$$\begin{aligned} \psi &= e^{\omega t} A \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \\ T &= e^{\omega t} B \cos(n\pi x) \sin(m\pi y) \end{aligned}$$

极易证明为了能有非零扰动解必有

$$\omega = \frac{n^2}{n^2 + m^2} (Ra - Ra_c) \quad (3.7)$$

式中

$$Ra_c = \frac{\pi^2 (n^2 + m^2)^2}{n^2} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.8)$$

(3.7) 和 (3.8) 表明, 当 $Ra < Ra_c$ 时, $\omega \leq 0$ 。因此平凡解是渐近稳定的。但是当 $Ra > Ra_c$ 时, $\omega > 0$ 平凡解是不稳定的。

因为 $\frac{d\omega}{dRa}|_{Ra=Ra_c} \neq 0$, 根据分叉理论^[7,8], 方程 (3.3) 存在超临界的定态分叉解, 且可求得分叉解的振幅方程是

$$\beta^3 - \frac{8(n^2 + m^2)}{Ra_c n^2} (Ra - Ra_c) \beta = 0$$

由此可得

$$\beta = \begin{cases} 0, & Ra < Ra_c \\ \pm \sqrt{\frac{8(n^2+m^2)}{Ra_c n^2}} (Ra - Ra_c), & Ra \geq Ra_c \end{cases}$$

而相应的定态分叉解是 $Ra \geq Ra_c$

$$\begin{cases} \Psi = \sqrt{\frac{8(n^2+m^2)}{Ra_c n^2}} (Ra - Ra_c) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) + \dots \\ \theta = 1 - y - \frac{n}{\pi(n^2+m^2)} \sqrt{\frac{8(n^2+m^2)}{Ra_c n^2}} (Ra - Ra_c) \cos(n\pi x) \sin(m\pi y) + \dots \end{cases} \quad (3.9)$$

图5给出了分叉解振幅的曲线。根据不同的值 n, m 可得一系列 Ra_c 之值。按大小顺序排列, 我们有 $Ra_{c1} = 4\pi^2 = 37.48$, 相应 $n = m = 1$; $Ra_{c2} = \frac{25}{4}\pi^2$, 相应 $n = 2, m = 1$; 和 $Ra_{c3} = \frac{100}{9}\pi^2 = 109.66$, 相应 $n = 3, m = 1$ 头上三个 Ra_c 之值。图6是根据式(3.9)画出的流线, 可以看出, 以平凡解为基础的从 Ra_{c1} 开始的分叉解是单回流结构, 从 Ra_{c2} 开始的分叉解是双回流结构, 而从 Ra_{c3} 开始的分叉解是三回流结构。图中还给出了相应的等温线。

张树海^[9]在此分析之前利用三次样条交替方法, 数值求解了同一问题。他的结果示于图7, 他的结果表明当 $Ra < 39.5$ 时平凡解是稳定的, 但当 $Ra > 39.5$ 时平凡解出现分叉。此临界值与解析分析十分一致。他也发现了存在 Ra_{c2}, Ra_{c3} , 但是具体结果与本文有所不同, 进一步的数值计算也许可说明存在差别的原因; 由于解析分析是从微分方程本身出发分析是严格的, 结合数值分析, 对流分叉的机理就一目了然了。

四、 旋涡沿其轴线发展中的Hopf分叉现象

为简单起见, 我们采用 x, y, z 直角坐标系且 z 轴与涡轴重合, 流体是不可压缩的。控制旋涡的运动方程组为

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (4.1)$$

在涡轴上还满足条件

$$u = v = 0 \quad (4.2)$$

这里 u, v, w 是 x, y, z 方向的速度分量, p, ρ, ν 为流体的压力、密度和运动粘滞系数。

利用(4.1)、(4.2)和Taylor展开公式, 可给出旋涡横截面(即与 z 轴垂直的平面上)的流线方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 x + b_0 y + Q(x, y, \lambda)}{c_0 x + d_0 y + R(x, y, \lambda)} \quad (4.3)$$

式中

$$\lambda = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 = \frac{1}{w_0} \left[-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_0 + \nu (\nabla^2 w)_0 \right]$$

$a_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, b_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0, c_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0, d_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, 下标"0"表示在涡轴上取值。为了以后的用处定义 Δ 和 J

$$\Delta = -(b_0 + c_0) = \lambda$$

$$J = b_0 c_0 - a_0 d_0 = \lambda^2 + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)_0$$

$$4J - \Delta^2 = 3\lambda^2 + \frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)_0$$

$Q(x, y, \lambda), R(x, y, \lambda)$ 分别是 x, y 和 λ 的连续函数。由(4.3)和常微分方程的定性理论, 对我们所讨论的对象可得如下结论^[10]:

(1) 对于这种旋涡, 下列条件成立

$$\lambda^2 + \frac{2}{3\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)_0 > 0$$

(2) 对于高雷诺数流动, 在旋涡轴线上 λ 主要取决于轴向压力梯度。对于一个沿涡轴向前运动的旋涡 $w_0 > 0$, 当流场为顺压梯度时 $\lambda > 0$; 如果流动为逆压梯度, $\lambda < 0$, 如果旋涡向前运动中出现反流 $w_0 < 0$, 则相应于正负压力梯度的 λ 的符号就相反。

(3) 对于旋涡流, 如果在涡轴上 $\lambda > 0$, 则该处横截面流态为稳定的螺旋点型; 如果 $\lambda < 0$, 为不稳定的螺旋点型。如果 $\lambda = 0$, 为中心点型(图8)。

(4) 若沿涡轴 λ 由正变负, 则横截面的流态, 在 $\lambda = 0$ 的位置, 出现Hopf分叉, 在此之后出现稳定的极限环(图9a)。

(5) 若沿涡轴, λ 由负变正, 则横截面的流态在 $\lambda = 0$ 的位置出现Hopf分叉, 伴随出现不稳定的极限环(图9b)。

(6) 若流动为旋涡流, 则在过涡轴的任一纵向平面上, 其驻点处流线呈鞍点型流态(图10), 且当驻点出现在 $\lambda < 0$ 的区域时, 从鞍点发出的平面内两条纵向截面流线是指向下流的; 如果驻点出现在 $\lambda > 0$ 的区域, 过鞍点的两条纵向截面流线由上游指向鞍点(图10)。

以上讨论是对不可压流而言的。对于可压缩流动, 如果令

$$\lambda = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)_0$$

则(3)(4)(5)(6)上述结论仍成立。此时 λ 和压力梯度的关系要更复杂。

根据以上结果, 可以揭示一个起始稳定的旋涡发展至破裂的机理过程。事实上, 在这种情况下, 由于沿涡轴先是顺压区后是反压区, 因而 λ 经历了 $\lambda > 0$ 到 $\lambda < 0$ 再到 $\lambda > 0$ 的三个区域, 开始时 $\lambda > 0$ 旋涡是稳定的, 由 $\lambda = 0$ 的位置起, 流场分成两个区, 外区仍是稳定的, 但涡轴附近的内区, $\lambda < 0$, 流态不稳定。两区的边界, 相应于极限环出现的位置, 由于逆压梯度作用使不稳定区域内轴向流速减为零, 旋涡开始破裂, 以后纵向截面流线构成泡形区, 相应 λ 由 $\lambda < 0$ 变为 $\lambda > 0$, 并伴随产生不稳定的极限环。因而泡形区的后部位

于不稳定极限环内(图11), 这样, 该处的流动将是不定常的。文献[11]发现从远前方的流线很难进入旋涡破裂区前方的涡核区域, 这点和文献[12]实验所发现的“孔洞”现象完全一致。可见我们这里发现的Hopf分叉为这种孔洞现象提供了理论根据。

图12是邓小刚计算给出的收缩-扩散管道内旋涡运动的结果^[10], $Re_D = 200$, 流动接近不可压缩, 入口为稳定的旋流, 速度分布为已知, 图12中给出了计算得到 λ 的分布和流线图, 可以清楚看出由 $\lambda = 0$ 的位置起, 出现稳定的极限环。理论分析和计算结果完全一致。邓小刚还计算了高超声速气流绕平面上方舵的流动^[13], $Re_D = 3.3 \times 10^6$, $M_\infty = 4.9$ 。图中清楚表明(图13a)方舵前有一个涡在离对称面不远的位置突然横截面增大, 因而出现破裂, 图13b画出了涡破裂前的横截面流线。我们可以看出, 在涡破裂前有稳定的极限环产生, 涡核附近的流动是不稳定的。数值结果和分析结论完全一致。

五、 结束语

在本文中我们仅列举了三个例子来说明解析分析对阐明流动机理的作用, 从这里我们已经可以看出解析分析巨大的作用和潜力。计算工作还远远不是一般的常规工作, 特别应当指出的是差分方程作为一个动力学体系来看并不相当于相应的微分方程动力学系统, 差分方程的内涵要“丰富”得多。但是不管怎样, 我们要得到的是一个真正的物理解, 我们不能迷失在无边际的数据海洋中。本文作者在某种意义上讲只是提出了数值模拟与解析分析相结合的问题, 希望能抛砖引玉, 引起更多同行的注意。

本工作得到国家自然科学基金资助(项目9188010)。

参考文献

- 1 Murman, E.M. and Cole, J.D., AIAA J., 9, 114-121, 1971
- 2 Jameson, A., Comm. on Pure and Applied Math., 27, 283-309, 1974
- 3 Godunov, S.K., Mat. Sb., 47, 357-393, 1959
- 4 Zhang, H.X. and Zhuang, F.G., Advanced in Applied Mech., Vol. 29, Academic Press, 1991
- 5 毛枚良, 中国空气动力学研究与发展中心报告, 1990
- 6 张涵信等, 中国空气动力学研究与发展中心报告, 1991, 12
- 7 普利高津, 探索复杂性, 四川教育出版社, 1987
- 8 李如生, 非平衡热力学和耗散结构, 清华大学出版, 1986
- 9 张树海, 中国空气动力学研究与发展中心报告, 1990, 12
- 10 张涵信等, 空气动力学学报, 1, 1992
- 11 Hilgenstock, A., Aero. J., 3/9, 1991
- 12 Bütetisch, K.A. et al, DFVLR IB 222-87 A34, 1987
- 13 邓小刚, 中国空气动力学研究与发展中心博士论文, 1992

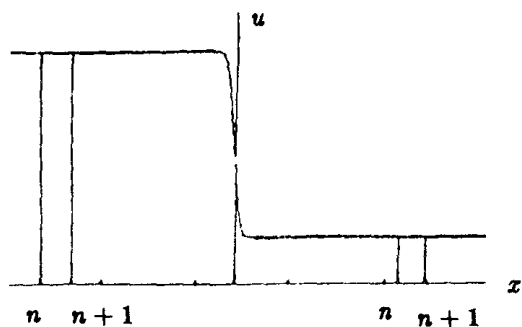


图1 一维激波及坐标系

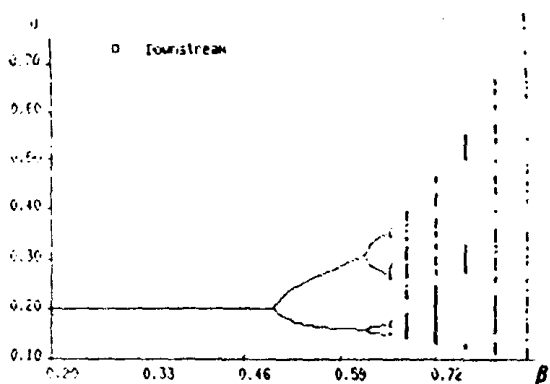
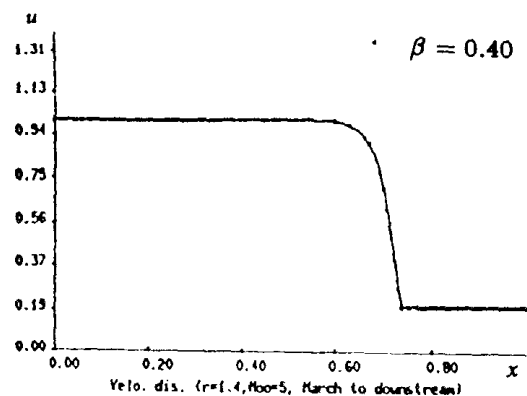
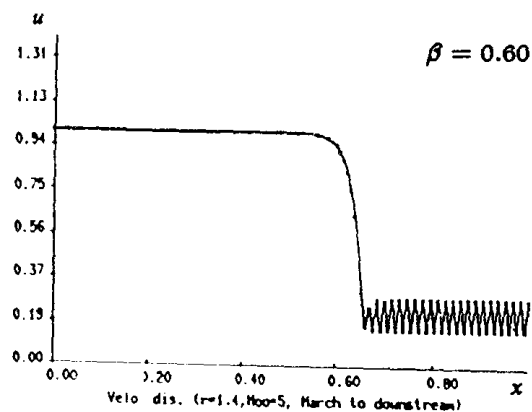


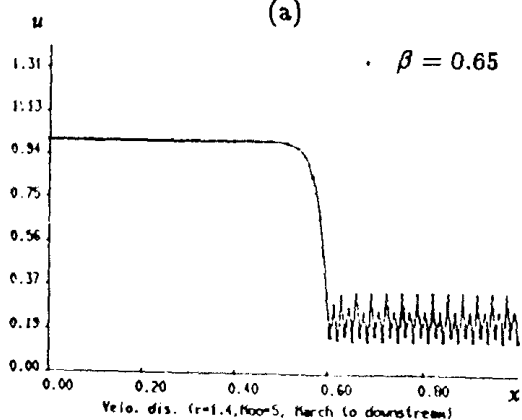
图3 推进计算得到的下游分叉解



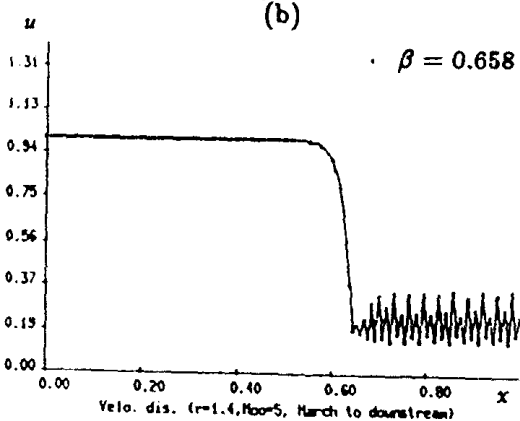
(a)



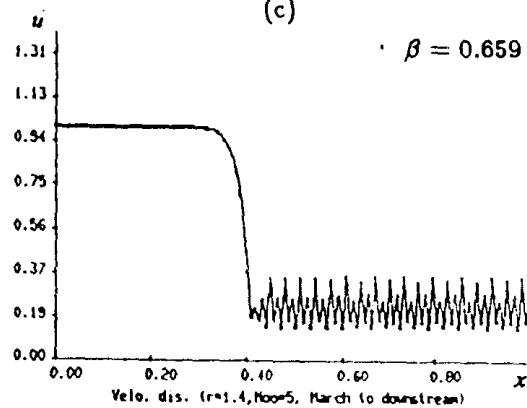
(b)



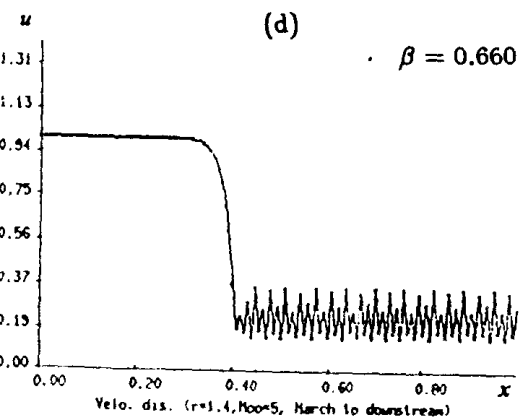
(c)



(d)



(e)



(f)

图2 推进计算得到的解

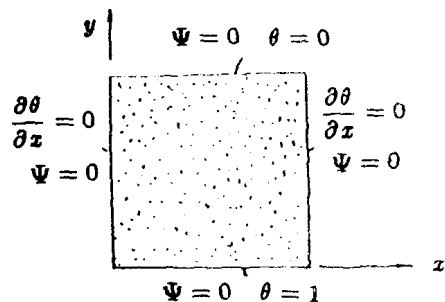


图4 多孔介质层传热问题的边界条件

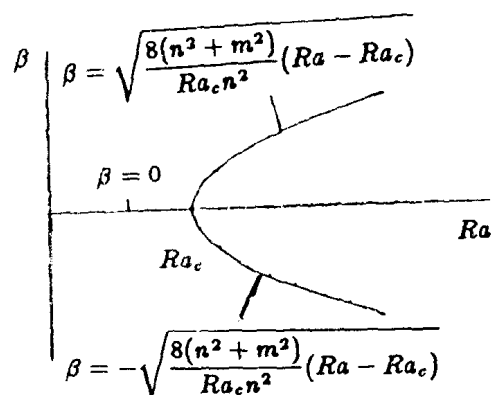
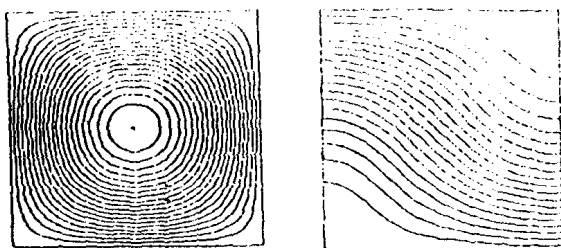
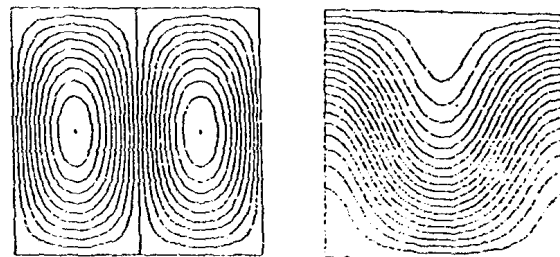


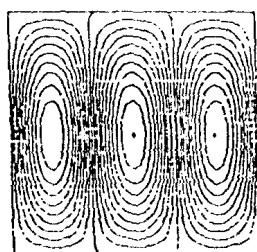
图5 分叉解的振幅方程及曲线



(a) 从 Ra_{c1} 起始, $\beta=1.884$ 左: 流线; 右: 等温线

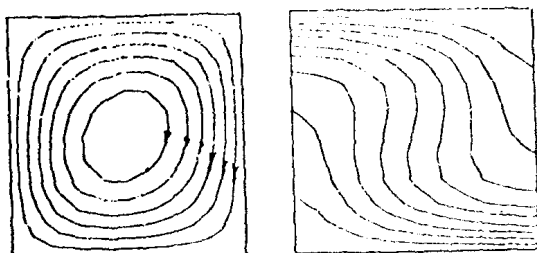


(b) 从 Ra_{c2} 起始, $\beta=1.178$

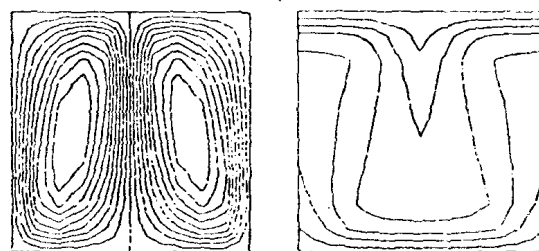


(c) 从 Ra_{c3} 起始, $\beta=1.047$

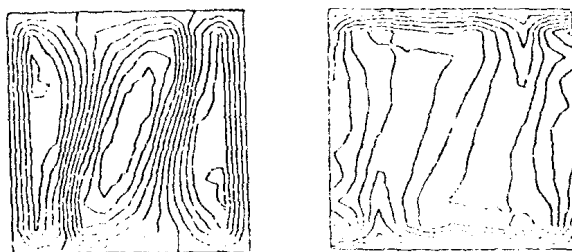
图6 以平凡解为基础在各个临界点起始的分叉解的流线及等温线(一级近似结果)



(a) $Ra=100$ 从 Ra_{c1} 起始



(b) $Ra=300$ 从 Ra_{c2} 起始



(a) $Ra=800$ 从 Ra_{c3} 起始

图7 文献[9]数值结果-以平凡解为基础从各个临界点起始的分叉解

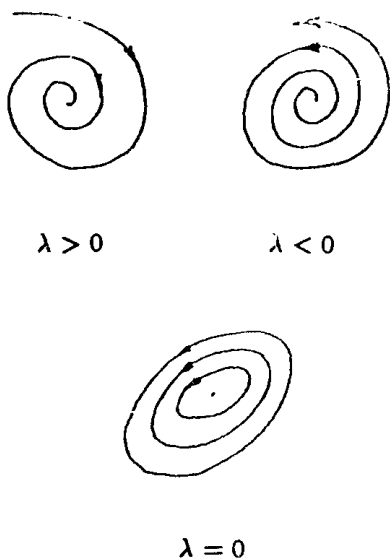


图8 涡轴附近横截面流态与 λ 的关系

表1 下游分叉解的数值

β	n	u			
0.40	1	0.2000			
0.600	2	0.1581	0.2919		
0.650	4	0.1677	0.2718	0.1468	0.3479
0.658	8	0.1727	0.2587	0.1480	0.3449
		0.1638	0.2853	0.1447	0.3598
0.659	16	0.1725	0.2595	0.1476	0.3470
		0.1647	0.2827	0.1444	0.3614
		0.1735	0.2568	0.1485	0.3432
		0.1626	0.2895	0.1448	0.3599
0.660	32	0.1621	0.2914	0.1447	0.3604
		0.1725	0.2595	0.1474	0.3480
		0.1650	0.2819	0.1442	0.3627
		0.1740	0.2553	0.1488	0.3420
		0.1617	0.2928	0.1449	0.3597
		0.1720	0.2608	0.1471	0.3497
		0.1660	0.2788	0.1443	0.3625
		0.1739	0.2558	0.1486	0.3428

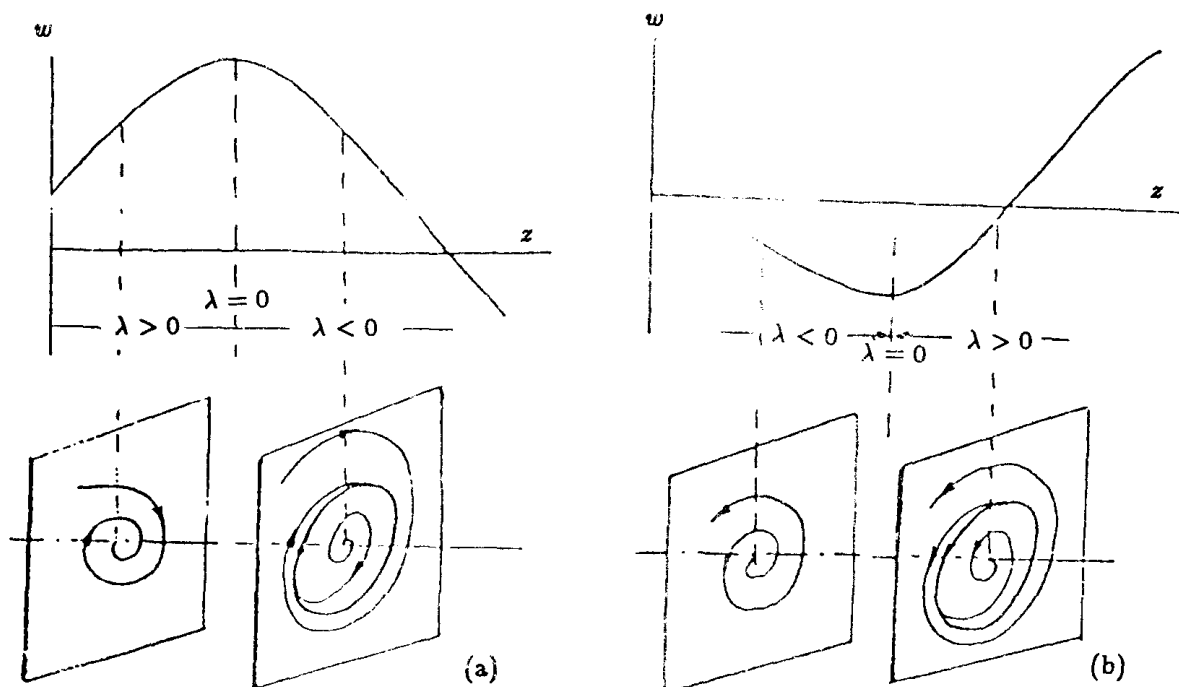


图9 由 $\lambda > 0$ 到 $\lambda < 0$ 和由 $\lambda < 0$ 到 $\lambda > 0$ 而出现的Hopf分叉

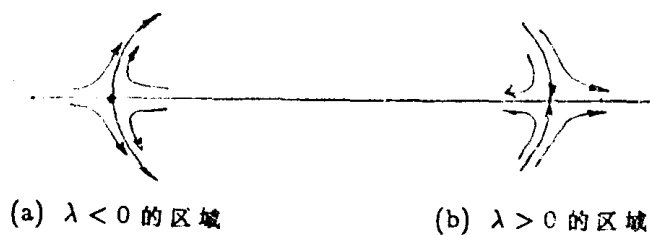


图10 纵向截面上驻点附近的流态