1980——1985

全国招考研究生

数学试题选解

邹节铣 陈 强编

1980——1985全国招考研究生

数学试题选解

邹节铣　陈　强编

湖南科学技术出版社

1980—1985全国招考研究生

数学试题选解

邹节铣　陈　强编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1986年8月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：22.75　字数：524,000

印数：1——10,300

统一书号：13204·124　　定价：3.60元

征订期号：湖南新书目 85——11(26)

前　言

高等数学是高等院校工科、经济管理及多数理科专业招收研究生的必考科目之一。本书从这些招考试题中选出近一千二百道典型试题作了解答或论证。从内容看，所选试题涉及到工科院校高等数学课程的几乎所有章节，其中既有基本概念题、理论题和运算题，又有各种证明题、应用题和综合题，并且多数试题具有相当的难度和一定的技巧。从年限看，远近兼顾，以近为主，书中一九八三至一九八五年的试题有近八百个；为了充分体现内容的深度和广度，也重选了少量试题。同时，试题选自百余所高等院校或科研所，因此学校类型也较齐全。此外，考虑到一些同志要求试题规范化的意见，这里还译出近年的一套GRE示范试题作为本书的附录，供读者参考。

为便于复习与查阅，我们仍将试题解答按高等数学的教学内容的顺序编排，并尽量注意到基本解题方法的归类。

许多读者对我们以前所编“试题选解”曾给予支持、鼓励、并提出宝贵意见；本书编写过程中又有很多院校的同志及时提供了试题；黄雍俭副教授仔细审阅了原稿。值此，我们表示衷心的感谢。

编　者

一九八五年四月

目　录

第一章　函数、极限、连续性……………………………………（1）
§1　函数…………………………………………………………（1）
§2　数列的极限……………………………………………………（4）
§3　函数的极限……………………………………………………（24）
§4　函数的连续性…………………………………………………（55）
第二章　一元函数的微分学……………………………………（60）
§1　导数概念………………………………………………………（60）
§2　微分法…………………………………………………………（72）
§3　中值定理………………………………………………………（88）
§4　导数的应用……………………………………………………（111）
第三章　多元函数的微分学……………………………………（154）
§1　多元函数的微分法……………………………………………（154）
§2　应用题…………………………………………………………（197）
第四章　不定积分与定积分……………………………………（222）
§1　不定积分………………………………………………………（222）
§2　定积分…………………………………………………………（242）
§3　广义积分………………………………………………………（282）
§4　应用题…………………………………………………………（296）
第五章　重积分　曲线积分　曲面积分………………………（312）
§1　重积分…………………………………………………………（312）
§2　曲线积分与曲面积分…………………………………………（341）

§3 应用题……………………………………………………(387)
第六章 常微分方程 ……………………………………………(419)
§1 一阶微分方程……………………………………………(419)
§2 高阶微分方程……………………………………………(439)
§3 应用题……………………………………………………(480)
第七章 级数 ………………………………………………………(506)
§1 常数项级数………………………………………………(506)
§2 幂级数……………………………………………………(532)
§3 Fourier级数 ……………………………………………(580)
第八章 线性代数……………………………………………………(608)
第九章 概率论及其他 ……………………………………………(656)
§1 概率论……………………………………………………(656)
§2 其他………………………………………………………(681)
附录 美国GRE高等数学测验示范题

第一章 函数 极限 连续性

§1 函数

1.1.1 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当x<0,\\ 1, & 当x\geqslant 0,\end{cases}$ 求$f[f(x)]$。

（同济大学1984年）

解 $f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

而$x<-1$时$f(x)<0$，$x\geqslant -1$时$f(x)\geqslant 0$，故

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

1.1.2 设函数$f(x)$ 的定义域和值域均为$x>0$，命$f_0(x)=f(x)$，$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$，$n\geqslant 1$。若有$f_{n+1}(x)=[f_n(x)]^2$，求$f_3(x)$。（华中工学院1984年）

解 由所设，$f_1(x)=f[f_0(x)]=f[f(x)]$，又$f_1(x)=[f_0(x)]^2=[f(x)]^2$，于是$f[f(x)]=[f(x)]^2$，故$f(x)=x^2=f_0(x)$。由此得 $f_1(x)=(x^2)^2=x^4$，$f_2(x)=[f_1(x)]^2=x^8$，$f_3(x)=[f_2(x)]^2=x^{16}$。

1.1.3 已知$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n个f}(x)]\}$。

（南京邮电学院1982年）

解 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

设$n=k$ 时，有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+[f_k(x)]^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

于是由数学归纳法即知

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

1.1.4 设$f(x)=x/x-1$，试验证$f\{f(f[f(x)])\}=x$，并求$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$，$(x\neq 0，x\neq 1)$。（华中工学院1981年）

证 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$，$\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$，

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=x,\quad f(f[f(x)])=f(x),$$

故 $$f\{f(f[f(x)])\}=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=x.$$

而 $$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1}=1-x.$$

$(x\neq 0,\ x\neq 1)$

1.1.5 设 $X=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，若当$y=1$时 $X=x$，求函数f及 X。 （太原工学院1984年）

解 由所设，在$X=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$中令$y=1$，得$f(\sqrt{x}-1)=x-1$，又设$\sqrt{x}-1=t$，即$\sqrt{x}=1+t$，便得 $f(t)=(1+t)^2-1=t^2+2t$，故所求

$$f(x)=x^2+2x,\quad X=\sqrt{y}+x-1.$$

1.1.6 设 $f(x)=1/\lg(3-x)+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域和$f[f(-7)]$。 （中国人民大学1982年）

解 由$3-x>0$，$3-x\neq 1$及$49-x^2\geqslant 0$得$f(x)$ 的定义域为 $-7\leqslant x<2$，$2<x<3$。

$$f(-7)=1/\lg 10=1,\quad f[f(-7)]=1/\lg 2+4\sqrt{3}.$$

1.1.7 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$，试求$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$。 （大连海运学院1982年）

解 由$0\leqslant x+a\leqslant 1$及$0\leqslant x-a\leqslant 1$即得：若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，所求定义域为$[a,\ 1-a]$；若$a>\frac{1}{2}$，其定义域不存在。

1.1.8 设函数$f(x)$ 在$(-\infty,\ +\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何x值均有$f(x+2)-f(x)=f(2)$。(i) 试用a表示$f(2)$ 与$f(5)$；(ii) 问a 取什么值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的

周期函数。　　　　　　　　　　　　　　　　（清华大学1982年）

解　已知$f(x)$为奇函数且$f(x+2)-f(x)=f(2)$。

(i) 上式中分别令$x=-1$，$x=1$，$x=3$得$f(2)=2f(1)=2a$，$f(3)=f(1)+f(2)=3a$，$f(5)=f(3)+f(2)=5a$。

(ii) 由(i)，当且仅当$a=0$时$f(2)=0$，此时$f(x+2)=f(x)$。故$a=0$时$f(x)$是以2为周期的周期函数。

1.1.9　设$F(x)=\int_0^a f(x+y)dy$，其中$a>0$，$f(u)$为处处有定义且单调增加的连续函数，试讨论$F(x)$的增减性。

（天津大学1980年）

解　任取$x_2>x_1$，由所设有$f(x_2+y)>f(x_1+y)$，又$a>0$，故有$F(x_2)-F(x_1)=\int_0^a f(x_2+y)dy-\int_0^a f(x_1+y)dy>0$，亦即$F(x_2)>F(x_1)$，所以$F(x)$为单调增加的函数。

§2　数列的极限

1.2.1　求$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx, p>0$。（华中工学院1984年）

解　由　$-\frac{1}{x}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{1}{x}(x>0)$，

有
$$-\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx\leqslant\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\int_n^{n+p}\frac{dx}{x}\quad(n\geqslant1),$$

即
$$-\ln\frac{n}{n+p}\leqslant\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\ln\frac{n+p}{n}.$$

当$n\to+\infty$时上式两端趋于0，故　原式$=0$。

或由
$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leqslant\int_n^{n+p}\frac{1}{n}dx=\frac{p}{n}.$$

令$n\to+\infty$，亦得　原式$=0$。

或利用积分中值定理

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\int_n^{n+p}dx=\lim_{\xi_n\to+\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}p=0$$

(ξ_n在n与$n+p$之间)。

1.2.2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}x^2e^{-x^2}dx$，其中$p$为定数。

(湖南师范大学1984年)

解　利用积分中值定理，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\xi_n^2e^{-\xi_n^2}\int_n^{n+p}dx=\lim_{\xi_n\to\infty}p\xi_n^2e^{-\xi_n^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}px^2e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2px}{2xe^{x^2}}=0$$

(ξ_n在n与$n+p$之间)。

〔注〕　类似1.2.1题，用“两边夹”准则亦可得同样结果。

1.2.3　设连续函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是正的、单调减的，且$\delta_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$。证明：数列$\delta_1$，$\delta_2,\cdots,\delta_n$，$\cdots$收敛。

(清华大学1983年)

证　由$f(x)$在$[1,+\infty)$是正的、单调减的及积分中值定理，有

$$\delta_n-\delta_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

$$+\int_1^{n-1}f(x)dx$$

$$=f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx=f(n)-f(\xi)<0\quad(n-1<\xi<n),$$

又 $$\delta_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)-\int_1^2 f(x)dx$$
$$-\int_2^3 f(x)dx-\cdots-\int_{n-1}^{n} f(x)dx$$
$$=f(1)-f(\xi_1)+f(2)-f(\xi_2)+\cdots+f(n-1)$$
$$-f(\xi_{n-1})+f(n)$$
$$>f(n)>0\quad(i<\xi_i<i+1,\ i=1,2,\cdots,n-1).$$

故数列δ_1, $\delta_2\cdots$, δ_n, … 单调减少且有下界，所以此数列收敛。

1.2.4 证明序列$\{x_n\}$的收敛性：

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right), n=1,2,\cdots.$$

（湘潭大学1983年）

证 $$x_{n+1}=x_n\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)>x_n,$$

又 $$x_n=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$=21\left(-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)<2.$$

故序列$\{x_n\}$单调增加且有上界，所以此序列收敛。

1.2.5 设$f(x)$处处可导，且$0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{k}{1+x^2}$（$k$为正常数），试证由下列递推关系所确定的$x_n$，当$n\to\infty$时有极限，

x_0任意，$x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，且证此极限满足方程 $x=f(x)$。 （西北工业大学1982年）

证 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$

（ξ_n在x_{n-1}与x_n之间），由所设$f'(\xi_n)\geqslant 0$，从而$(x_{n+1}-x_n)$与(x_n-x_{n-1})同号，故$\{x_n\}$单调。

又
$$\begin{aligned}|x_n|&=|f(x_{n-1})|=|f(x_0)+\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)dx|\\&\leqslant|f(x_0)|+\int_{x_0}^{x_{n-1}}|f'(x)|dx\\&\leqslant|f(x_0)|+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}dx\\&=|f(x_0)|+k\pi,\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$单调有界，所以当$n\to\infty$时x_n有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对$x_n=f(x_{n-1})$两端取极限$(n\to\infty)$，即得 $A=f(A)$ 证毕。

1.2.6 设$0<x_1<1$，且$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$。 （合肥工业大学1983年）

证 $x_{n+1}-x_n=x_n-x_n^2-x_n<0$，又 $x_2=x_1(1-x_1)>0$，$x_2<1$，$0<x_3=x_2(1-x_2)<1$，由数学归纳法易证$0<x_n<1$。因此数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$存在。对$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限，得$a=a-a^2$，故$a=0$。

由施笃兹(O. Stolz)定理（参看菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第一卷第一分册P. 59～P. 60)，有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}(1-x_{n-1})}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n-1})$$

$=1$。

1.2.7 试证数列 $x_n=\dfrac{11\cdot12\cdot13\cdot\cdots(n+10)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$，$(n=1,2,3,\cdots)$ 有极限，并求此极限。（上海交通大学1982年）

解 因 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+11}{3n+2}$，当$n\geqslant5$时$\dfrac{n+11}{3n+2}<1$，故$\{x_n\}$单调减小且大于0，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+11}{3n+2}=\dfrac{1}{3}<1$，由比值判定法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，由收敛级数的必要条件即知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

1.2.8 证明：若$\{a_n\}$是单调上升数列，$\{b_n\}$是单调下降数列，且$a_n<b_n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

（太原机械学院1982年）

证 由所设知$a_n<b_1$，$b_n>a_1(n=1,2,\cdots)$，故$\{a_n\}$，$\{b_n\}$单调有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，因此$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

1.2.9 设$F(x,y)=f(y-x)/2x$及$F(1,y)=y^2/2-y+5$。任选$x_0>0$，作$x_1=F(x_0,2x_0)$，$x_2=F(x_1,2x_1)$，$\cdots$，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$，$\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求它的值。

（西安交通大学1980年）

证 因$F(x,y)=f(y-x)/2x$，则$F(1,y)=f(y-1)/2$，又已知$F(1,y)=[(y-1)^2+9]/2$，故$f(y-1)=(y-1)^2+9$，从而可知$f(y-x)=(y-x)^2+9$，于是$F(x,y)=[(y-x)^2$

$+9]/2x$，任选$x_0>0$，得数列$x_1=F(x_0,2x_0)=(x_0^2+9)/2x_0$，$x_2=F(x_1,2x_1)=(x_1^2+9)/2x_1$，…，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)=(x_n^2+9)/2x_n$，…，因$x_0>0$，则此数列是一正项数列。

由 $x_{n+1}=(x_n^2+9)/2x_n\geqslant 2x_n\cdot 3/2x_n=3$

得出数列由下界3。于是$9/2x_n\leqslant 1.5$，$x_n/2\geqslant 1.5$，得

$$x_{n+1}-x_n=(x_n/2+9/2x_n)-x_n=9/2x_n-x_n/2\leqslant 0,$$

故知 $x_{n+1}\leqslant x_n$。式中等号仅在$x_n=3$时成立（此时数列极限亦等于3）。所以数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时有极限l存在且$l\geqslant 3$。

由$x_{n+1}=(x_n^2+9)/2x_n$两边取极限得$l=(l^2+9)/2l$，解方程求得$l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$（$l=-3$舍去）。

1.2.10 已知数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。（国际科技大学1981年）

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，对任意给定的$\varepsilon/2>0$，存在$N>2$，使当$n\geqslant N$时有$|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon/2$，则对充分大的$p$，有

$$\begin{aligned}
&|x_{N+P}-x_{N+(P-1)}|=|x_{N+P}-x_{N+P-2}+x_{N+P-2}-x_{N+P-1}|\\
&\leqslant|x_{N+P}-x_{N+P-2}|+|x_{N+P-2}-x_{N+P-1}|\\
&\leqslant\varepsilon/2+|x_{N+P-1}-x_{N+P-2}|\\
&=\varepsilon/2+|x_{N+P-1}-x_{N+P-3}|+|x_{N+P-3}-x_{N+P-2}|\\
&\leqslant 2\cdot\varepsilon/2+|x_{N+P-2}-x_{N+P-3}|\leqslant\cdots\\
&\leqslant P\cdot\varepsilon/2+|x_{N+P-P}-x_{N+P-P-1}|=P\cdot\varepsilon/2+|x_N-x_{N-1}|.
\end{aligned}$$

选取P，使$N+P>2|x_N-x_{N-1}|/\varepsilon$，则

$$\left|\frac{x_{N+P}-x_{N+P-1}}{N+P}\right|\leqslant\frac{P}{N+P}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|x_N-x_{N-1}|}{N+P}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

1.2.11 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$（$n$为正整数），试作出$y=f(x)$在$[-1,1]$上的函数的图形。

（上海交通大学1984年）

解 $f(-1)=-1/2$，$f(1)=1/2$，$f(0)=0$。

当 $-1<x<0$，则$-1\leqslant\sin x\pi<0$，此时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}=\sin\pi x.$$

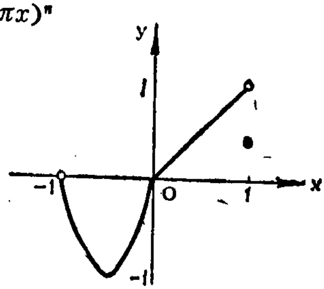
当 $0<x<1$，则$0<\sin x\pi\leqslant1$，此时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n}}{1+\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^n}}=x.$$

综上所述，得

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x=-1\\ \sin\pi x, & -1<x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$



$y=f(x)$的图形如图1.1所示。

图1.1

1.2.12 求$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\operatorname{arctg}nx}{\sqrt{n^2+n}}$ （西安冶金建筑学院1982年）

解 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}nx}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x>0.\end{cases}$

1.2.13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

（上海机械学院1980年）

解 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)$

$$\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdots\left[\frac{(n-2)^2-1}{(n-2)^2}\right]\left[\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\right]\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{(2+1)(2-1)}{2^2}\cdot\frac{(3+1)(3-1)}{3^2}\cdot\frac{(4+1)(4-1)}{4^2}$$

$$\cdots\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2}\cdot\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n},$$

故 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$。

1.2.14 求 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$。（长春光机学院1980年）

解 因 $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$，

故 $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=1+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\cdots\frac{2}{N(N+1)}$$

$$=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{N(N+1)}\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{N+1}\right).$$

所以 原式 $=2$。