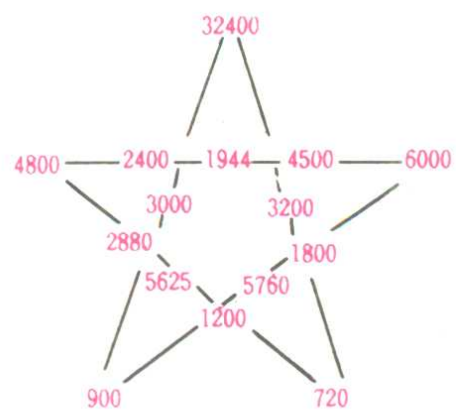
岑中枢　著

不定方程的整数解和填数法



$$x^n + y^m = z^k$$

$$ax + bxy + cy = M$$

海南出版社

不定方程的整数解和填数法

岑中枢　著

海南出版社

(琼)新登字03号

责任编辑 武 铠
封面设计 蔡于良

不定方程的整数解和填数法
岑中枢 著

海南出版社出版发行
海南农垦报社印刷厂印刷
* * *
850×1168毫米 1/32开本 14.5印张 350千字
1994年10月第1版 1994年10月第1次印刷
印数1—3000册
ISBN 7—80590—539—8/G·36
定价:20.00元

作者简介

岑中枢，曾用名黄乃吟，海南省澄迈县老城镇美鼎村人。早年就读于广东省立琼崖师范学校师范科，毕业后，历任小学校长、中学教员、行政机关秘书等职。五十年代曾受聘为北京、武汉、广州、海口等市的一些报刊的特约通讯员和特约记者，多次发表文章。现在海南省总工会担任文秘工作。

作者酷爱数学，本书是他多年利用业余时间经过刻苦钻研而写成的。

前　言

本书共有两部。

第一部《不定方程的整数解》是专门讨论解不定方程的方法，其中的一些解法有别于经典名著，也如社会上人们常说的“旁门左道”之类。

不定方程的内容非常丰富，我国古代数学家所写的《孙子算经》、《猴子分桃》、《勾股数》等等都属不定方程，为人们所喜爱。数论是数学的皇冠，不定方程在数论中占有重要地位，近代人所研究的哥德巴赫猜想和费马大定理就是不定方程中层次较高的一部分。研究费马大定理，经过三百余年，直至今日，这一命题才被英国数学家、美国普林斯顿大学教授威尔斯给予解决，哥德巴赫猜想则还在继续研究中。我国数学家陈景润、王元等人都在此研究中取得很大成果，且居世界领先地位，但是还没有最后解决，世界数学家都为此历尽艰辛付出很大代价。在研究这些课题的过程中，有人总想从不同的角度或从不同的侧面试图证明命题的正确性。本书不定方程的整数解部分从第三章起所探讨的多元高次不定方程，也曾作此尝试，即使不能达到目的，但书中所列举的一些解的表示式，仍不迭为研究不定方程这一长河中的一些重要部分，因此，它可供有志钻研不定方程的人们学习和参考。

第二部《填数法》，是专门讨论把一个直、横行格数相等的方形图，用不同的正整数填入格中，使不论是直行、横行、斜角行每行数字之和或每行数字之积都相等的填数法。填数在我国已有悠久历史，著名数学家华罗庚、陈景润都曾经研究填数，而且还从中引发出一些比较重要的数学命题。填数是一种技巧，逻辑性

很强，它可提高人的推理能力，使人变得更聪明，特别是某些填数已引起大、中、小学生和老师以及从事数学研究工作者的极大兴趣。本书的填数法，即使繁杂一些，但仍可供广大读者的学习、参考或作为一种课外读物，作者希望它能起到抛砖引玉的作用。

由于作者水平有限，书中错误难免，恳请广大读者给予指正，不胜感谢。

岑中枢

一九九四年三月　于海口

目　录

第一部　不定方程的整数解

第一章　二元一次不定方程的讨论……………………………（1）

第一节　常数项 M 等于 0 的时候 ……………………………（1）

第二节　常数项 M 等于 0 以外的整数的时候 …………（2）

第三节　递次用辗除横式的右数(即余数 r)去除尽 M 的演解法……………………………（11）

第四节　辗除横 式中的倍左问题及其应用……………（13）

第五节　另一形式的二元一次不定方程的整数解 ……（15）

习题 …………………………………………………………（20）

第二章　三元一次不定方程 ……………………………………（21）

习　题 ………………………………………………………（22）

第三章　多元高次不定方程的讨论 ……………………………（23）

第一节　求证 $x^a=y^b$ 的正整数解 ………………………（23）

第二节　求 $20x^3=21y^2$ 的正整数解 …………………（23）

第三节　试证 $3x^4=2y^2$ 没有正整数解 ………………（24）

第四节　求 $x^2-23y^2=57$ 的整数解 …………………（25）

第五节　关于 $x^2-dy^2=M$，$ax^2+bxy\pm cy^2=M$ 的整数解的讨论，其中 M 是复合数 …………………（29）

习　题 ………………………………………………………（30）

第四章　关于"奇偶数演算法"的讨论 …………………………（31）

第一节　求 $3x^2+2x+19=23y$ 的整数解………………（32）

第二节　求 $2x^3+2x^2+x+10=y^2$ 的整数解 …………（35）

第三节　求 $x^3+x^2+7x+30=2y^2+y$ 的整数解 ………（37）

第四节　求 $x^3-y^2=7$ 的整数解 …………………………… (39)
第五节　同余式 ………………………………………………… (43)
习　题 ……………………………………………………… (46)
第五章　关于 $x^a+y^b=pz$ 的讨论 ……………………………… (47)
第一节　求 $x^2+y^5=7z, x^3+y^5=7z, x^5+y^6=7z$ 的整数解 ……………………………………… (47)
第二节　求 $x^2+y^2=7z, x^3+y^3=7z$ 的整数解 ………… (50)
第三节　求 $x^2+y^3=12z$ 的整数解 ………………………… (51)
第四节　本章结论 ……………………………………………… (53)
习　题 ……………………………………………………… (54)
第六章　勾股数和 $x^n=z^2-y^2$ 的解的讨论 ………………… (54)
第一节　重温勾股定理 ………………………………………… (54)
第二节　关于 $x^n=z^2-y^2$ 正整数解的讨论 ……………… (56)
习　题 ……………………………………………………… (65)
第七章　关于 $x^n=y^2+z^2$ 解的讨论 ……………………………… (66)
第一节　求 $x^3=y^2+z^2$ 的整数解 ………………………… (66)
第二节　求 $x^5=y^2+z^2$ 的整数解 ………………………… (69)
第三节　关于 $x^n=y^2+z^2$ 解的表示式的推导问题 …… (71)
附　《引理 C》的求证 ………………………………………… (74)
第四节　求 $x^n=y^2-z^2$ 的解的表示式 …………………… (78)
习　题 ……………………………………………………… (82)
第八章　关于 $x^n=y^3+z^3$ 解的讨论 ……………………………… (82)
第一节　求 $x^4=y^3+z^3$ 的整数解 ………………………… (83)
第二节　求 $x^2=y^3+z^3$ 的整数解 ………………………… (84)
第三节　试证 $x^3=y^3+z^3$ 没有正整数解 ………………… (85)
第四节　讨论 $x^n=y^3-z^3$ 的整数解 ……………………… (89)
第五节　本章结论 ……………………………………………… (89)
习　题 ……………………………………………………… (91)

第九章　关于 $x^n=y^4+z^4$ 解的讨论 …………………………… (91)
第一节　求 $x^5=y^4+z^4$ 的整数解 ……………………………… (91)
第二节　求 $x^3=y^4+z^4$ 的整数解 ……………………………… (91)
第三节　试证 $x^2=y^4+z^4$ 无正整数解 ………………………… (92)
第四节　本章结论 ……………………………………………………… (93)
习　题 ……………………………………………………………………… (93)
第十章　关于 $x^n=y^5+z^5$ 解的讨论 …………………………… (94)
第一节　试证 $x^5=y^5+z^5$ 无正整数解 ………………………… (94)
第二节　本章结论 ……………………………………………………… (98)
第十一章　求不定方程 $x^n=y^m\pm z^m$ 的解的表示式的方法 ……… …………………………………………………………………………… (99)
习　题……………………………………………………………………… (100)
第十二章　试证不定方程 $x^n=y^m\pm z^m$ 式 $n\neq m$，$m>2$ 有解的充要条件是 $(n,m)=1$ ………… (100)
第十三章　关于形如 $x^n=y^m\pm z^k$ 式解的讨论 ……………… (101)
习　题……………………………………………………………………… (115)
第一部习题解答……………………………………………………… (116)

第二部　填数法

第十四章　方形图每行数字之和都相等的填数法………… (193)
第一节　9 格图每行 3 数之和都相等的填数法 ……… (193)
第二节　25 格图每行 5 数之和都相等的填数法 …… (195)
第三节　4 格图不能填数 …………………………………… (197)
第四节　16 格图每行 4 数之和都相等的填数法 …… (197)
第五节　36 格图每行 6 数之和都相等的填数法 …… (202)
附　几个较多格图填数图例……………………………… (211)
习　题…………………………………………………………… (214)
第十五章　方形图每行数字之积都相等的填数法………… (218)

第一节　9 格图每行 3 数之积都相等的填数法 ……… (218)
第二节　25 格图每行 5 数之积都相等的填数法 …… (233)
第三节　49 格图每行 7 数之积都相等的填数法 …… (235)
第四节　81 格图每行 9 数之积都相等的填数法 …… (238)
第五节　16 格图每行 4 数之积都相等的填数法 …… (240)
第六节　36 格图每行 6 数之积都相等的填数法 …… (248)
第七节　64 格图每行 8 数之积都相等的填数法 …… (253)
第八节　100 格图每行 10 数之积都相等的填数法 … (256)
习　题………………………………………………… (261)
第十六章　特加讲题………………………………… (268)
第一节　猫抓老鼠…………………………………… (268)
第二节　和尚分酒…………………………………… (278)
第三节　傻子养鸽…………………………………… (284)
第四节　例题分析…………………………………… (299)
习　题………………………………………………… (306)
第二部习题解答……………………………………… (309)

第一章　二元一次不定方程的讨论

先从二元一次不定方程的整数解谈起。在不定方程

$$ax - by = M \tag{1}$$

式中，a 和 b 是零以外的整数，它们可以是正整数，也可以是负整数，这里只讨论它们是正整数的时候；M 是整数，x 和 y 是要求的整数。这个不定方程，不是随便都有整数解的，现在讨论于下：

M 是个整数，M 可以等于 0，也可以不等于 0，现在先讨论 $M = 0$ 的情况。

第一节　常数项 M 等于 0 的时候

$$ax - by = 0 \tag{2}$$

很明显，(2) 式有一组整数解为 $x = 0, y = 0$，当 (2) 式中的 a 和 b 是互素的时候，【如果不互素，即 $(a,b) = d > 1$，把 (2) 式写成 $d(a_1x - b_1y) = 0$，可得到 $(a_1,b_1) = 1$，故不妨假设 $(a,b) = 1$，】则 (2) 式的一切整数解的表示式是：

$x = bk, y = ak$，其中 k 是任意整数。

证：　将 (2) 式移项为

$$ax = by \tag{3}$$

因为 $(a,b) = 1$，故有 $a|y$ 和 $b|x$，由于 $a|y$ 和 $b|x$，得到

$$y = am,\quad x = bn \tag{4}$$

其中 m 和 n 是整数，以 (4) 代入 (3) 得：

$abn = bam$，故 $n = m$，由于 $n = m$，可令

$k = n = m$，以 $k = n = m$ 代入 (4) 式得：

$$x = bk, \quad y = ak \tag{5}$$

以(5)代入(3)得：

$$abk = bak \tag{6}$$

由(6)式得知，(5)是(3)的整数解，并由(6)式同时得知，当取k等于任意整数时，都能满足(3)式，故(5)是(2)式的一切整数解的表示式，而$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$，并由(5)式得知，(2)式的一切整数$x$，都是$b$的倍数，同理，一切整数$y$都是$a$的倍数。

第二节　常数项M等于0以外的整数的时候

再讨论(1)式中，M等于0以外的情况

(一) 当$a|M$或$b|M$的时候

(1)式中，如果$a|M$，则容易得到(1)式有一组整数解是：$x = \frac{M}{a}, y = 0$，那么，(1)式的一切整数解呢？因为$a|M$，故有$av = M$，v是整数，将$av = M$代入(1)式得：$ax - by = av$，移项为：

$$a(x - v) = by \tag{7}$$

由(7)式和第一节引理得到：$y = ak, x = v + bk$。

同理　(1)式中，如果$b|M$，则有$bv' = M$，v'是整数，也可以由第一节引理得到$x = bk, y = v' + ak$，k是任意整数。

(二) 当$M = c + d$，而$a|c$和$b|d$的时候

(1)式中，如果$M = c + d$，c和d也是整数，当$a|c, b|d$时，则(1)式的一切整数解的表示式是：

$$x = \frac{c}{a} + bk, \quad y = -\frac{d}{b} + ak$$

证：　由于$a|c$和$b|d$，故有

$$an = c, \quad bm = d \tag{8}$$

n 和 m 也是整数，将(8) 式代入(1) 式得：

$ax - by = c + d = an + bm$，移项得：

$$a(x - n) = b(y + m) \tag{9}$$

由第一节引理和(9) 式可得到：

$$x = n + bk \qquad y = - m + ak \tag{10}$$

由(8) 式得 $n = \dfrac{c}{a} \qquad m = \dfrac{d}{b}$ (11)

将(11) 式代入(10) 式得：$x = \dfrac{c}{a} + bk \quad y = - \dfrac{d}{b} + ak$，$k$ 是任意整数。

（三）辗转相除法的原理

当(1) 式有 $0 < M < b < a$ 的时候，或兼有适合(一) 或(二) 的条件的时候，虽可以用(一) 或(二) 的引理求解，但是如果 a、b、M 数位多【即数值大】要把 M 分为适当的 c 和 d，就很困难，我们假设 $(a,b) = 1$，根据辗转相除的原理，当 $a > b$ 时，可得 $a - bq_1 = r_1$，q_1 是整数，以下 q_2, q_3…… 也是整数，r_1 余数，以下 r_2, r_3，…… 也是余数。当 $b > r_1$ 时，可得 $b - r_1q_2 = r_2$，…… 这样辗转相除下去，必然有 $r_{n-1} - r_nq_{n+1} = r_{n+1}$，并且 $r_{n+1} = 0$，n 表示 $1,2,3,\cdots n$，因为 $(a, b) = 1$，故 $r_n = 1$，又因为 $(a,b) = (b,r_1)$，$(b,r_1) = (r_1,r_2)$，…，$(r_{n-2},r_{n-1}) = (r_{n-1},r_n)$ 和 $r_n = 1$，故有 $(r_{n-2},r_{n-1}) = r_n$，因为 $(r_{n-2}, r_{n-1}) = r_n$，故有 $r_{n-2} - r_{n-1}q_n = 1$，又由于 $r_{n-2} - r_{n-1}q_n = 1$，则必有 $r_{n-3}x_1 - r_{n-2}y_1 = 1$ 又由于 $r_{n-3}x_1 - r_{n-2}y_1 = 1$，则必有 $r_{n-4}x_2 - r_{n-3}y_2 = 1$，$x_1, x_2, \cdots, y_1, y_2, \cdots$ 都是整数，这样逆推上去，则必有 $ax - by = 1$，故得知，当 $(a,b) = 1$ 时，则必有 x 和 y 两个整数满足

$ax - by = 1$。

如果(1) 式中，a 和 b 两数不互素的时候，则有 $(a,b) = d > 1$，那么，经过辗转相除，必然有 $r_n = d$，因此，必然有 $ax' - by' = d$，由此可知，只有 $d|M$，(1) 式才有整数解。

证： 因为$(a,b)=d$,则有$a=a_1d, b=b_1d$,将其代入(1)式得 $a_1dx-b_1dy=M$

即 $d(a_1x-b_1dy)=M$ (12)

在(12)式中,$(a_1,b_1)=1$,如果M不为d整除,显然(12)式就没有整数解,这也和$5x=12$一样,12不为5整除,故没有整数解。由此得知,(1)式中,如果$(a,b)=1$,则无论M等于任何整数,(1)式都有整数解,如果$(a,b)=d$,则只有$d|M$时,(1)式才有整数解。

(四)关于不定方程$ax-by=M$式的一切整数解的表示式的推理

假设(1)式$(a,b)=1$,【不然的话,由$(a,b)=d>1$,可将(1)式的两端,同时约以d,得到$\frac{a}{d}x-\frac{b}{d}y=\frac{M}{d}$,而$\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{M}{d}$都是整数,故可以假设$(a,b)=1$】现在如果已知(1)式的一组整数解为:$x=MA, y=MB$,则它的一切整数解可由下式表示出来：

$$x=MA+bk,\quad y=MB+ak$$

k是任意整数,即$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

证： 因为$x=MA, y=MB$是(1)式的一组整数解,所以有

$$aMA-bMB=M \tag{13}$$

由(13)式和(1)式得到 $ax-by=aMA-bMB$,移项整理得

$$a(x-MA)=b(y-MB) \tag{14}$$

由第一节引理和(14)式可得到：

$$x=MA+bk,\quad y=MB+ak$$

故(四)的引理得证。

(五)辗除横式的讨论

根据以上各点的引证,得知(1)式的演解程序是,首先要求出$aA-bB=1$式中的A和B,然后再求出(1)式整数解x和y,但是

要求出 A 和 B 却要借助于辗转相除法，如果(1) 式中 M 等于 1，则把 a,b 两数辗转相除，直至最后的余数等于 1，但如果 M 大于 1，那么，在辗转过程中，当出现的余数 $r_1,r_2\cdots$，其中轮序所得的余数 r_i，恰好能整除 M 时【这里 $i=1,2,3\cdots\cdots i$】则可以求出(1) 式的整数解，而不必再继续辗转相除，以免浪费时间，因此，分别讨论于下：

§ 1.　先讨论　$aA-bB=r_1$　(15)

为了方便起见，将 a,b 二数辗转相除的过程写成如下行式，暂叫辗除行式：

$$a\text{——}b\xrightarrow{q_1}r_1\qquad \text{表示 } a-bq_1=r_1 \tag{V}$$

【说明】辗除行式分为三部分，即左数、中间数、右数，有左右二横线，左横线上的数，表示乘左数，右横线上的数，表示乘中间数，辗除行式每行的示意是：左横线上的数乘左数，其乘积除以中间数，将取得的不完全商写在右横线上，右数为余数，因此，(15)式可用辗除行式表示为：

$$a\xrightarrow{A}b\xrightarrow{B}r_1 \tag{H}$$

将以上(H) 式和(V) 式对照，可得到(15) 式中：

$$A=1\qquad B=q_1$$

由 $r_1|M$ 和(四) 的引理，故得到(1) 式(指只须辗除一次，而余数 r_1 恰好能除尽 M) 的一切整数解的表示式：

$$x=\frac{AM}{r_1}+bk=\frac{M}{r_1}+bk$$

$$y=\frac{BM}{r_1}+ak=\frac{q_1M}{r_1}+ak$$

$$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$$

§ 2.　再讨论 $aA-bB=-r_2$　(16)

(16) 式表示(1) 式要辗除二次，即有 $r_2|M$

辗除行式是：

$$a\xrightarrow{1}b\xrightarrow{q_2}r_1\qquad \text{表示 } a-q_2b=r_1 \tag{①}$$

$b \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{q_1} r_2$　　表示 $b - q_1r_1 = r_2$　　②

将 ① 式代入 ② 式得：$b - (a - q_2b)q_1 = r_2$

将上式整理得：　$b(1 + q_2q_1) - q_1a = r_2$

将上式的二边同时乘以 -1 得：

$$q_1a - b(1 + q_2q_1) = - r_2$$

将上式用辗除行式的形式写成：

$$a \xrightarrow{q_1} b \xrightarrow{1 + q_2q_1} - r_2 \qquad (V_1)$$

注意：由于以上演解和整理，又因二边同时乘以 -1，所以上式【辗除行式】的右数是 $-r_2$

将(16)式用辗除行式的形式写成：

$$a \xrightarrow{A} b \xrightarrow{B} - r_2 \qquad (H_1)$$

将以上(V_1)和(H_1)对照，可得到(16)式中：$A = q_1$　$B = 1 + q_2q_1$，由 $-r_2|M$ 和(四)的引理，得到(1)式【指经过二次辗除而有 $r_2|M$】的一切整数解的表示式为：

$$x = \frac{AM}{-r_2} = bk = - \frac{q_1M}{r_2} + bk$$

$$y = \frac{BM}{-r_2} + ak = - \frac{(1 + q_2q_1)M}{r_2} + ak$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

§ 3.　$aA - bB = r_3$　　(17)

(17)式表示(1)式要辗除三次，即有 $r_3|M$

辗除行式是：

$a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{q_3} r_1$　表示 $a - q_3b = r_1$　　③

$b \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{q_2} r_2$　　$b - q_2r_1 = r_2$　　④

$r_1 \xrightarrow{1} r_2 \xrightarrow{q_1} r_3$　　$r_1 - q_1r_2 = r_3$　　⑤

将 ④ 式代入 ⑤ 式得：$r_1 - (b - q_2r_1)q_1 = r_3$　　⑥

将 ③ 式代入 ⑥ 式得：$a - q_3b - [b - (a - q_3b)q_2]q_1 = r_3$

整理得：$a(1+q_2q_1)-b(q_3+q_1+q_3q_2q_1)=r_3$

将上式用辗除行式的形式写成：

$$a\xrightarrow{\quad 1+q_2q_1\quad}b\xrightarrow{\quad q_3+q_1+q_3q_2q_1\quad}r_3 \qquad (V_2)$$

将(17)式用辗除行式的形式写成：

$$a\xrightarrow{\quad A\quad}b\xrightarrow{\quad B\quad}r_3 \qquad (H_2)$$

将以上(V_2)式和(H_2)式对照，可得到(17)式中：

$$A=1+q_2q_1 \qquad B=q_3+q_1+q_3q_2q_1$$

由 $r_3|M$ 和（四）的引理，得到(1)式【指经过辗除三次而有 $r_3|M$】的一切整数解的表示式为：

$$x=\frac{AM}{r_3}+bk=\frac{(1+q_2q_1)M}{r_3}+bk$$

$$y=\frac{BM}{r_3}+ak=\frac{(q_3+q_1+q_3q_2q_1)M}{r_3}+ak$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

现在，我们把§2. 讨论的(16)式的辗除行式：

$$a\xrightarrow{\quad 1\quad}b\xrightarrow{\quad q_2\quad}r_1$$

$$b\xrightarrow{\quad 1\quad}r_1\xrightarrow{\quad q_1\quad}r_2$$

和由它演解成的一行式：

$$a\xrightarrow{\quad q_1\quad}b\xrightarrow{\quad q_2q_1+1\quad}-r_2$$

来对照，从中找出一个容易计算的演算法。由对照得知，在(16)式中，其 $A=q_1$，就是辗除过程第二行右横线上的数 q_1，其 $B=1+q_2q_1$，就是辗除过程，第一行右横线上的数 q_2 乘第二行右横线上的 q_1，其乘积再加上第二行左横线上的数1，其右数 $-r_2$，就是取第二行的右数，但要由正号改为负号，这是因为演算过程，原来是 $b(1+q_2q_1)-q_1a=r_2$，为了方便起见，用 -1 乘二边使成为 $q_1a-b(1+q_2q_1)=-r_2$ 的原故，由此得知，将辗除二行式演成一行式时，A 和 B 的计算是：$A=q_1$【即取第二行右横线上的数】$B=q_2q_1+1$【即