

老百姓的数学

奇妙

姚泽清 顾红芳 著

021-49

Y35

的

概率世界



A0975636

安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

老百姓的数学. 奇妙的概率世界/姚泽清, 顾红芳著.
合肥: 安徽教育出版社, 2000. 5
ISBN 7 - 5336 - 2910 - 8

I. 老… II. ①姚…②顾… III. ①数学 - 普及读物②概率论 - 普及读物 IV. 01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 025531 号

责任编辑: 严云锦 王冰平 装帧设计: 李 静

出版发行: 安徽教育出版社(合肥市跃进路 1 号)

网 址: <http://www.ahep.com.cn>

经 销: 新华书店

排 版: 安徽飞腾彩色制版有限责任公司

印 刷: 合肥义兴印刷厂

开 本: 880×1230 1/32

印 张: 4.875

字 数: 100 000

版 次: 2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷

印 数: 3 000

定 价: 7.00 元

发现印装质量问题, 影响阅读, 请与我社发行部联系调换

电 话: (0551)2651321

邮 编: 230061

序

数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng)。在有文字历史之前人类就有了数和图形的概念。几千年来,数学由人类生产和社会实践的需求而产生和发展。她不仅被用于科学和技术各领域,也渗透到经济和管理领域以及老百姓的日常生活之中。她不仅是一种工具和语言,也是人们重要的思考方式。她是一种文化,是人类文明的一个重要组成部分。

人类生产和社会实践的需求是数学产生和发展的根本动力。与此同时,数学还有自身内部逻辑完善和追求数学美的强大内部动力。这种内部动力的意义和作用往往不被人们所正确理解,被视为“抽象的游戏”。此外,数学的术语和符号也不易看懂。从中学几何证明开始,数学论述的书写形式就被训练成以固有的逻辑推理为基础,而这种形式常常是探究和思考的真正数学思维方式的颠倒。这一切使人们对数学望而生畏,把数学看成是少数人的一种专门技艺。

综上所述,我们迫切需要用生动的语

言,把数学的进步和数学的思想方法通俗地介绍给大众,让更多的人认识到数学的作用和意义,在不同的工作领域中自觉地采用数学思维方式,使数学更贴近大众。在这方面,盛立人教授等撰写的《老百姓的数学》丛书是一个很好的尝试。作者用轻松活泼的语言把人们带进千姿百态的数学世界,让人们领略数学在老百姓日常生活中所起的作用和影响。我相信这套书对于普及和传播数学知识和思想,让民众更加了解、掌握和运用数学,会起到促进的作用。

从某种意义上说,撰写通俗性数学普及读物比撰写专业数学著作和论文更为困难。它需要作者对数学和相关领域的深刻了解,也需要文采。我们需要更多的有识之士共同努力,做好数学的普及与传播这项艰巨而又神圣的事业。

冯克勤

识于 2000 年 3 月

作者的话

这是一件真实的事,发生在 1989 年。

这一年,有家专业银行私自推出了一个储种,只要你每年在银行存入 100 元,连续存 8 年,则从第 9 年起,不需要你再花一分钱,你就可以从银行那里每年得到 100 元,直到你去世为止。

比起现在风行的 18 岁以前每月存入若干元,到上大学与谈婚论嫁的年龄时再返还一笔助学金、婚嫁金,然后等到退休后每月支取一笔数目可观的养老金的少儿终身保险来,它显得更直截了当,更令人怦然心动。

这可是一个以小搏大的行动,你只要花 8 个 100 元,就可以得到数倍于此的回报,就算你 8 年后是 40 岁,以当时中国人的平均寿命 71 岁计,你可以得到 31 个 100 元,更何况你还有很大的概率活过 71 岁呢。

于是,你毫不犹豫地将钱投了进去,并且心中暗自窃喜:这银行的老总大概数学没学好,才干出这种赔本赚吆喝的事。

很可惜,银行是算过的,而你却没有。下面我们就来看一看,在当时的情况下,到底是银行吃亏,还是你吃亏。

在计算之前,我们必须考虑到这样一个大背景:为了应对通货膨胀的潜在压力,1989 年人民币一年期储蓄存款的年利率为 11.34%,三年期的年利率为 13.14%,八年期的年利率更高达 17.64%。此外,三年(含三年)以上的定期整存整取储蓄还享受保值补贴。

我们不必把问题搞得太复杂,考虑到可能的降息因素,我们将未来的年利率设定为 10%,而且两年以上的存款按单利计息,不

计复利。

你第1年存入的100元每年产生10元的利息,8年共产生80元的利息。同理,你的第2个100元能产生70元的利息,你的第3个100元能产生60元的利息,依次类推,你的第8个100元也能产生10元的利息。这样,到了第9年时,你的利息已达到了

$$80 + 70 + 60 + 50 + 40 + 30 + 20 + 10 = \frac{(80 + 10) \times 8}{2} = 360(\text{元}),$$

再加上本金800元,你的本息和是1160元。

这是一个什么样的数字?如果你把它存在银行里,每年将为你带来116元的利息,而不是银行所答应你的100元!

问题还不止如此。银行至少在三个方面赚了你的钱:

- (1)当你在世的时候,它吃掉了你的部分利息;
- (2)当你不在世的时候,它吃掉了你的全部利息;
- (3)无论你在世还是不在世,它已经吃掉了你的本金。

银行惟一要承担的,是利率风险,可是在当时看来,利率上扬的概率要大于下降的概率,其期望所得已远远超出人们的想象。

可是,造化弄人,随着物价的逐步走低,银行存款的利率持续下降,不出一年的时间,一年期储蓄的利率就跌破了10%,偶然性对银行来说,扮演了一个残酷的角色,而储户最终也没有因祸得福,拿到银行所许诺的回报。

有人常常讲,这一辈子从小学到大学,学了十五六年的数学,到工作后没看出它有多大用处;可是,等到真正需要开动你的大脑,运用你的数学思维的时候,你却相信了自己的直观,跟着感觉走了。

一部数学发展史,其实就是人们不断发现问题和解决问题的历史,它是人类智慧的结晶。无论是从有限到无限的飞跃,还是从确定性到随机性的变迁,无不给人以启迪,促进人类思维方式的升华。数学能让你受益终生的,不是她的定理,不是她的计算,而是

她的思维方式,她的洞察力和创造力。

在现实生活中,像上面这种似是而非的事例不胜枚举。本书之所以选择概率统计作为一个切入点,就是因为在数学的各个分支学科中,没有哪一个学科会像概率统计一样,到处充满着对传统思维模式的挑战,闪烁着理性思辨的光芒。在这里,凭直觉往往只能得出错误的结论,而正确的解答又大大出乎意料之外,有的甚而与所谓“常识”相矛盾。

十几年枯燥的数学计算和机械的理论证明,也许已磨平了你智慧的棱角,但我们要说,这不是你的错,更不是数学的错!本书的目的,就是通过现实生活中大量生动的、有趣的事例,来说明数学思辨的过程,还数学以本来面目,让你的思维插上理性的翅膀,让你的大脑在智慧的天空翱翔。

为了适应不同层次的读者的需要,本书对一些必要的概念和数学公式在文中都作了简单的介绍,不需要读者具备初等概率论的知识;本书中的所有理论推导都局限在初等数学的范围内,并辅以文字说明,对数学公式不感兴趣的人在阅读时完全可以跳跃过去而不影响对内容的理解。本书是一部面向大、中学生和社会大众的通俗而又不失科学性的作品。

在本书的成书过程中,得到了北京大学郑忠国教授、南京航空航天大学朱梧楦教授、解放军理工大学训练部薛通部长、政治部席印章主任的关心和支持,并在理论和实践两方面给予了深层次的指导,在此谨向他们表示衷心的感谢,并借此机会向所有曾经给予我们帮助的朋友们表示诚挚的谢意!

如果您在阅读本书的过程中有什么批评与建议,欢迎您和我们联系,我们的 E-mail 地址是:njsharp@sina.com。

姚泽清 顾红芳

2001 年 12 月

目 录

彩票,想说爱你不容易	1
历史上的第一个概率论问题	3
跳舞的小人	5
频率与概率	7
汉字的用字频率	9
古典概型	11
最有可能的性别组合	13
测测你的手气	15
实际推断原理	17
教士的愤怒	19
男女性别比	21
伯特纳德箱	23
幸运鸟笼	25
加法定理	27
“体彩”多连号之谜	29
街头骗局(1)	31
街头骗局(2)	33
生男生女之谜	35
事件的独立性	37
股市与彩市	39
条件概率	41
黄金分割与股价	43
抓阄的公正性	45

摸奖过程中的心理误区	47
配对问题	49
口供可信吗	51
癌症诊断 $\neq$ 死刑宣判	53
医疗方案的选择	55
几何概型	57
蒲丰投针问题	59
掷出来的 π	61
贝特朗悖论	63
中立原理	65
帕斯卡赌注	67
钱包游戏	69
上帝之手	71
乌鸦与麻雀	73
第三类接触	75
无处不在的正态分布	77
抽样的艺术	79
盖洛普的崛起	81
骗人的平均数	83
会说话的数字	85
平均人	87
你过得还好吗	89
生子当如孙仲谋	91
名人可以预订吗	93
谁更聪明	95
两性的差异	97
形形色色的结论	99
运动与健康	101

吸烟的是是非非·····	103
马尔萨斯的谬误·····	105
尴尬的试验·····	107
安慰剂效应·····	109
假设检验·····	111
矮个子长寿吗·····	113
子代身高与父代的关系·····	115
相关分析·····	117
著作权之争·····	119
《红楼梦》的后 40 回·····	121
成群现象·····	123
神秘的纸牌把戏·····	125
阿罗选举悖论·····	127
随机游动·····	129
最优停时·····	131
秘书问题·····	133
秘书问题的一般解·····	135
公平博弈中的对策·····	137
概率统计大事年表·····	139
参考文献·····	143
跋·····	144

彩票,想说爱你不容易

1998年8月,电脑销售传统型中国体育彩票在江苏的第一位百万大奖得主诞生了。在此后的短短几年的时间内,彩票已造就了200余位百万富翁,一夜暴富的神话在社会上掀起了一股彩票狂潮。

由于中奖与否的不确定性,所以各种报章上竞相开设“彩经”专栏,各种“预测”文章纷至沓来,概率统计成了时髦的话题。那么,你手中的一注彩票中大奖的概率究竟有多少呢?

以200072期大扩容前的江苏体育彩票为例,它的对奖号码共有7位数字,前6位每位各有0~9十个数字可供选择,第7位为特别号,共有0~4五个数字可供选择,只有当这7位数字与中奖号码完全相同时才能赢得最高金额可达500万元的特等奖。

由于中奖号码的产生共有

$$10^6 \times 5 = 5\,000\,000 (\text{种})$$

可能性,故一注体育彩票中大奖的概率只有五百万分之一,而目前这一概率已随着体育彩票特别号的大扩容已降到了一千万分之一。

这是一个什么样的概率?2000年上半年,南京市区因各类交通事故而死亡的人数达128人,若每日在南京市区活动的人口以280万人计,则一个人一天之中在南京街头死于交通事故的概率就有四百万分之一。因此,说中大奖比出门遇上交通事故而致死的可能性还要低,一点也不过分。

从2000年上半年开始发行的江苏风采电脑福利彩票,其中奖规则与体育彩票略有不同,彩民可从1到35中任意选取7个数字

来构成对奖号码,这7个数字不能重复,只有当这7个数字与中奖号码完全相同时(不考虑先后次序)才能最后赢得大奖。

由于中奖号码的产生共有

$$C_{35}^7 = \frac{35!}{7! 28!} = \frac{35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6\,724\,520(\text{种})$$

可能性,故一注福利彩票中大奖的概率不足六百万分之一。

为了达到吸引彩民的目的,福利彩票最初的发行宣传工作曾在中奖号码不排序上做足了文章,但这丝毫无助于改变其中奖概率偏低的事实。有人曾在报章上发表文章,抓住福利彩票最初几期大奖不断的事实,用中奖注数与投注总数之比来说明福利彩票的中奖率高于体育彩票,闹了以频率代替概率的笑话,这种说法随着后面几期大奖的不断轮空也就烟消云散了。

历史上的第一个概率论问题

实际上,概率论的起源与博彩有着密不可分的关系。意大利数学家和赌徒卡丹诺(Girolamo Cardano, 1501—1576)在 1564 年写成的《机遇博弈》一书中就已提出了所谓“胜率”的概念,尽管它与概率还不是一回事。

历史上的第一个得到系统研究的概率论问题,是在 1654 年 7 月到 10 月间由法国商人贡博和梅雷提出的赌徒分赌金问题。

梅雷的基本问题是:甲、乙两人以掷硬币赌输赢,掷出正面甲得一点,掷出反面则乙得一点,积满三点者赢得全部赌注。现甲已得两点,乙只得一点,赌局意外中止,两人应怎样分配赌本才合理?

梅雷将这个问题交给了当时法国著名的数学家帕斯卡(Blaise Pascal, 1623—1662),帕斯卡与另一位法国大数学家费尔马(Pierre de Fermat, 1601—1665)通信讨论了这一问题,后者以“费尔马大定理”而著称于世。两人在不同的模型下运用组合理论对这一问题给出了各自的答案。

帕斯卡认为,若再掷一次,甲胜,则甲应得全部赌注;甲负,则甲应与乙平分赌注。而这两种情况发生的可能性都是 $\frac{1}{2}$,故甲应得

$$1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

的赌注。

费尔马认为,要结束比赛,最多再掷两次即可,有 4 种等可能情形,即甲连胜、甲先胜后负、甲先负后胜、甲连负。前 3 种情况都是甲胜,故甲应得

$$1 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

的赌注。

1655年,荷兰物理学家、数学家惠更斯(Christian Huygens, 1629—1695)到巴黎访问期间听说了这件事,对概率论产生了浓厚的兴趣,决定自己也来研究这一问题。1657年,他发表了《论机会游戏中的计算》一书,尽管它比卡丹诺的遗著《机遇博弈》晚成书近1个世纪,但由于后者直到1663年才得以面世,故《论机会游戏中的计算》当之无愧地成为了历史上第一部概率论著作。

惠更斯在书中除解决了许多有趣的实际问题外,还在帕斯卡和费尔马的计算结果的基础上引进了离散型随机变量的均值——数学期望的概念,即一个人如果赢得总数 a_i 的概率是 $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则他可望赢得的总数为

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n。$$

跳舞的小人

除了博彩,概率论的方法在很多方面的使用都有着悠久的历史。英国侦探小说家柯南道尔(Arthur Conan Doyle, 1859—1930)在小说《归来记》中,就曾讲述了大侦探福尔摩斯所遇到的这样一个情场奇案。

马场村庄园的丘比特先生在花园里发现了一张纸条,上面画着一群跳舞的小人。她的妻子埃尔茜看到这封密码信后惊恐万分,当场昏死过去。



福尔摩斯拿到这张纸条后,首先发现第4、第6、第9和最后1个位置上所画的小人是完全一样的,除了手中多出的一面小旗。从小旗的分布来看,它应该起着分隔单词的作用,故福尔摩斯断定,这4个小人应代表英文字母中最常见的字母E。

“可是,现在最难的问题来了。”福尔摩斯在事后分析案情时说,“因为除了E以外,字母按出现次数排列的顺序大致为T,A,O,I,N,S,H,R,D,L,但是T,A,O,I出现的次数几乎不相上下。要是把每一种组合都试一遍,那会是一项无止境的工作。所以,我只好等来了新材料再说。”

好在随后神秘的小人不断出现,福尔摩斯在其中一组不带小旗的5个小人中发现第2和第4个都是E。这个单词可能是 sever(切断),也可能是 lever(杠杆),还可能是 never(决不),而用 never来回答一项请求的可能性极大,故福尔摩斯找到了字母N,V,R。

接着,他又将一个数次出现的两头是 E、中间是 3 个别的字母的单词确定为埃尔茜的名字 ELSIE,并在以“埃尔茜”结束的带有恳求语气的一句话中,断定名字前面的一个以 E 结尾的 4 个字母的单词为 come(来)。这样,第一张纸条就变成了:

□M □ERE □□E SL□NE.

作为在纸条上出现了三次的第一个小人,就只能是字母 A。而第二个单词的开头也只能是 H。至此,这群跳舞的小人就彻底撩开了它的面纱:

AM HERE. ABE SLANE. (我已到达。阿贝·斯兰尼。)

福尔摩斯对这起牵涉到埃尔茜婚前秘密的事一直都采取袖手旁观的态度,直到他看到阿贝·斯兰尼最后画的一行小人:

ELSIE, PREPARE TO MEET GOD. (埃尔茜,准备见上帝吧。)