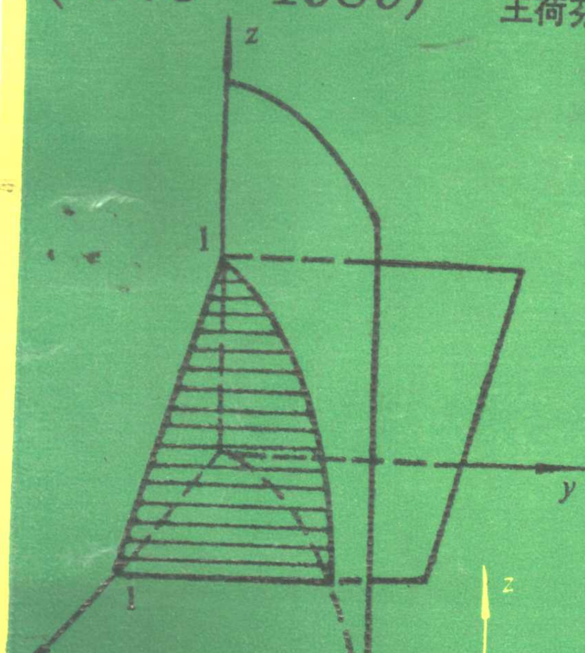
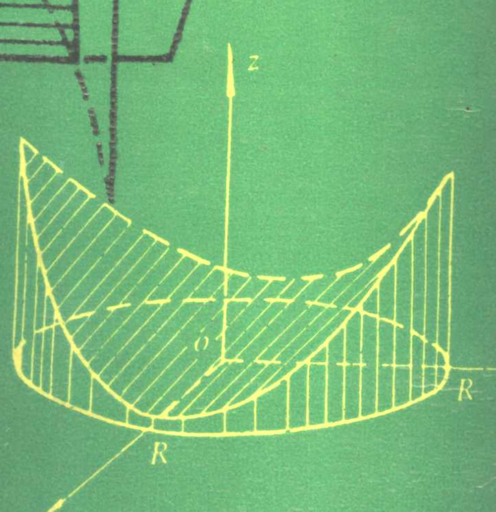
上海工科院校

高等数学试题汇解

(1978—1989)

王荷芬等 编





同济大学出版社

内容提要

本书由上海工科院校高等数学协作组搜集了(1978—1989)上海20余所不同类型的高等工科院校的高等数学试题，经过筛选、加工、整理，并征求有关教师的意见编写而成，其试题是按教学内容的次序编排的。内容丰富，覆盖面广，反映不同类型、不同层次工科院校的数学教学要求及考核水平。本书对广大数学教师、学生和爱好数学的读者是一本很有价值的参考书。

责任编辑 许纪森
封面设计 王肖生

高等数学试题汇解

王荷芬 王健生 归行茂 李重华
邵漪漪 桂子鹏 柴常智 曹助我 编

同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
浙江上虞汤浦印刷厂排版
新华书店上海发行所发行
吴县人民印刷二厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 34 字数 850千字
1990年5月第1版 1990年5月第一次印刷
印数 1—7500 定价 13.10 元
ISBN 7-5608-0263-X/O·32

前　　言

本书汇编了上海市二十余所①高等工科院校十二年（1978—1989）的高等数学试题3000道。从基本概念、基本理论出发，着重基本运算。本书内容丰富，覆盖面广，反映上海不同类型、不同层次工科院校高等数学的教学要求及考核水平。

为了便于读者参考，我们将题目按照教学内容的次序作了编排，并作出详尽解答。由于题目数量较多，为了节省篇幅，把类型相同、内容相同的题目删去了一部分。解题过程力求做到简明、扼要和规范化。

本书对于各类高等院校教师及工科院校学生、成人高校学生、自学高等数学的读者均有较好的参考价值。它一方面为读者提供一定数量的复习、巩固与自我检测的材料；另一方面可作为上海市工科院校高等数学教学资料的一份历史性文献。

在编写本书过程中，承蒙各学校高等数学教研室为我们提供各类试题，在此谨表谢意。由于篇幅所限，基本上是一题一解，只有极少数题目有两解。碍于编者水平，解题方法与技巧并非最佳，也可能有不当之处。恳请广大师生读者给予批评指正。

编　者

1989年9月

① 二十余所院校为：同济大学、上海交通大学、华东化工学院、中国纺织大学、上海工业大学、上海科技大学、上海机械学院、上海海运学院、上海铁道学院、上海水产学院、上海工程技术大学、上海大学、上海城建学院、上海建材学院、上海电力学院、上海技术师范学院、上海机械专科学校、上海科技专科学校、上海轻工业专科学校、上海纺织工业专科学校、上海冶金专科学校、上海化工专科学校、上海第二冶金专科学校、上海石油化工专科学校、上海医疗器械专科学校。

目　　录

第一章　函　　数

1.1　下列函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$，　$g(x)=1$；

（2）$f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$。

解　（1）不相同，因定义域不同。$D_f: (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D_g: (-\infty,+\infty)$。

（2）不相同。因对应规律不同。事实上 $g(x)=|x|$。

（3）相同，因定义域及对应规律都相同。

1.2　求下列函数的定义域：

（1）$y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；

（2）$y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

（3）$y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$。

解　（1）当 $-1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant1$ 时，函数有意义，有 $-3\leqslant x-2\leqslant3$，即 $-1\leqslant x\leqslant5$，故定义域为 $[-1,5]$；

（2）当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant0$ 时，函数有意义，有 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant1$，即 $(x-1)(x-4)\leqslant0$，解得 $1\leqslant x\leqslant4$，故定义域为 $[1,4]$；

（3）给定函数在 $\begin{cases}16-x^2\geqslant0\\ \sin x>0\end{cases}$ 时有意义，

即 $-4\leqslant x\leqslant4$，由 $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，故定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$。

1.3 设函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$，求$f(\lg x)$，$f(\sin x)$的定义域。

解 要使$f(\lg x)$有意义，x满足：$0\leqslant\lg x\leqslant1$。得定义域为$[1,10]$；为使$f(\sin x)$有意义，$x$满足：$0\leqslant\sin x\leqslant1$。得定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n$为整数。

1.4 判定$f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$的奇偶性。

解 $f(-x)=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$

$$=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=f(x),$$

所以给定函数是偶函数。

1.5 计算下列各题：

(1) 已知$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$；

(2) 求$\sin^2 2x$的周期。

解 (1) $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$，得$f(x)=2-2x^2$，故$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\dfrac{x}{2}=\cos x+3$。

(2) $\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$，因$\cos 4x$的周期为$\dfrac{\pi}{2}$，所以$\sin^2 2x$的周期为$\dfrac{\pi}{2}$。

1.6 设$y=\dfrac{1}{2x}f(t-x)$，且当$x=1$时，$y=\dfrac{1}{2}t^2-t+5$，求$f(x)$。

解 $x=1$时，$\dfrac{1}{2}f(t-1)=\dfrac{1}{2}t^2-t+5$，

$f(t-1)=t^2-2t+10$，

令 $t-1=u, t=1+u$

故 $f(u)=(1+u)^2-2(1+u)+10=u^2+9$，

即 $f(x)=x^2+9$。

1.7 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，证明 $f(f\{f[f(x)]\})=x$，并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)(x\neq 0, x\neq 1)$。

证 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$，则 $\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$。

于是，$f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x$

$$f\{f[f(x)]\}=f(x)。$$

故，$f(f\{f[f(x)]\})=f[f(x)]=x$，

从而有，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x$。（$x\neq 0$, 1）。

1.8 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，

求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的表达式。

解 $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & e^x<1, \\ 0, & e^x=1, \\ -1, & e^x>1,\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1, \\ 1, & |x|=1, \\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

1.9 直梁 OAB 由两段不同的材料接合而成．OA 长 1 单位，其线密度为 2，AB 长 2 单位，而线密度为 $\frac{1}{2}$，设 M 为梁上的任一点，试写出 OM 一段的质量 m 与 OM 的长度 x 之间的函数关系．

解 $$m(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}(x+3), & 1<x\leqslant 3.\end{cases}$$

1.10 等腰梯形 $ABCD$（图1-1）两底分别是 $AD=a, BC=b$，$(a>b)$，高为 h，现引直线 MN 与两底垂直，若设 $AM=x$，$(0\leqslant x\leqslant a)$，试将梯形内部位于直线 MN 左边的面积 S 表成 x 的函数．

解
$$S=\begin{cases}\dfrac{h}{a-b}x^2 & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{a-b}{2},\\ h\left(x-\dfrac{a-b}{4}\right) & \dfrac{a-b}{2}<x\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ h\left(\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{(a-x)^2}{a-b}\right), & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant a.\end{cases}$$

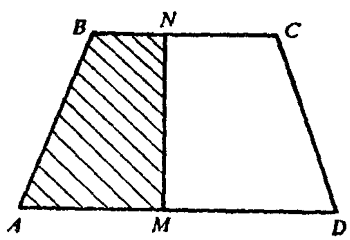


图 1-1

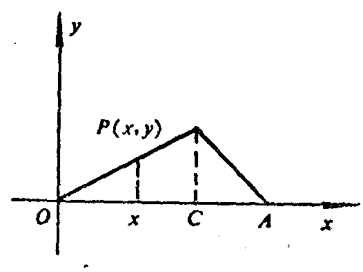


图 1-2

1.11 长为 l 的弦两端分别固定在 O、A 处（图 1-2），在 C 点处 $(x=c)$，将弦提高 h 后，整个弦呈图中形状（假定弦上各点只沿着与 OA 垂直的方向移动），设 $P(x,y)$ 为拉伸后弦上的任一点，试建立 y 与 x 之间的函数关系．

解

$$y=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x), & c<x\leqslant l.\end{cases}$$

1.12 设 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=2^x$，求 $\varphi[\psi(x)],\psi[\varphi(x)]$，$\varphi[\varphi(x)],\psi[\psi(x)]$。

解 $\varphi[\psi(x)]=2^{2x},\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$，

$\varphi[\varphi(x)]=x^4,\psi[\psi(x)]=2^{2^x}$。

1.13 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，

$$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $f[g(x)],g[f(x)]$。

解

$$f[g(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+|x|), & x<0,\\ \dfrac{1}{2}(x^2+|x^2|), & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

同理

$$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.14 证明：定义在$[-l,l]$上的任何函数 $f(x)$都可表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证 存在性：由于 $g(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数，$h(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数。而

$$g(x)+h(x)=2f(x),$$

所以

$$f(x)=\frac{g(x)}{2}+\frac{h(x)}{2},$$

即 $$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

这说明 $f(x)$可表示为一个偶函数与一个奇函数的和。

唯一性：设 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，其中，$\varphi(x)$与 $\psi(x)$ 分别为 $[-l,l]$上的偶函数与奇函数，于是

$$f(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)-\psi(x).$$

上面两式相加得

$$2\varphi(x)=f(x)+f(-x),$$

即 $$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2};$$

两式相减得

$$2\psi(x)=f(x)-f(-x),$$

即 $$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

故 $$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

这证明了唯一性。

1.15 若函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(2a-x)$，则称函数的图形对称于直线 $x=a$，试证明：若函数 $f(x)$的图形同时对称于直线 $x=a$ 和 $x=b(a\neq b)$，则 $f(x)$为周期函数。

证 由于 $f(x)$ 图形同时对称于直线 $x=a$ 和 $x=b$，故有 $f(x)=f(2a-x)$和 $f(x)=f(2b-x)$成立。

又因 $a\neq b$，使

$$\begin{aligned}f[x+2(a-b)]&=f(x+2a-2b)\\&=f[2a-(x+2a-2b)]\\&=f(2b-x)=f(x),\text{成立。}\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是以 $2(a-b)$为周期的周期函数。

1.16 若 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$，$f(x-1)$。

解 令 $x+1=y$，有 $x=y-1$。

则 $$f(y)=(y-1)^2+3(y-1)+5=y^2+y+3,$$

所以
$$f(x)=x^2+x+3,$$
$$f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+3$$
$$=x^2-x+3.$$

1.17 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x), f\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

所以
$$f(x)=x^2-2,$$
$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2$$
$$=x^2+\frac{1}{x^2}-4.$$

1.18 已知函数 $y=\frac{2x-5}{x-3}$ 的值域满足关系 $y\leqslant 0, y\geqslant 4$，求函数 y 的定义域.

解 $x=\frac{3y-5}{y-2}=3+\frac{1}{y-2}$ 当 $x\neq 3$ 时，由 $y\leqslant 0$，则 $y-2\leqslant -2$.

得
$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{y-2}\quad 3-\frac{1}{2}\leqslant 3+\frac{1}{y-2}<3.$$

即
$$3>x\geqslant\frac{5}{2}\quad \text{由 } y\geqslant 4, \text{则 } y-2\geqslant 2.$$

得
$$\frac{1}{y-2}\leqslant\frac{1}{2},\quad 3<3+\frac{1}{y-2}<3+\frac{1}{2}.$$

即
$$3<x\leqslant\frac{7}{2}$$

故定义域为 $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}, x\neq 3$.

即
$$\left[\frac{5}{2},3\right)\cup\left(3,\frac{7}{2}\right].$$

1.19 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f(\cdots f(x)\cdots]\}}_{n\text{次}}$，若$f(x)=a+bx$，

试证：$f_n(x)=a\dfrac{b^n-1}{b-1}+b^nx$。

证：用归纳法证明。当 $n=1$ 时，有 $f_1(x)=a+bx$，成立。设 $n=k$，$f_k(x)=a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^kx$ 成立。

则 $n=k+1$，有 $f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=a+bf_k(x)$

$$=a+b\left[a\frac{b^k-1}{b-1}+b^kx\right]$$

$$=a\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x.$$

故，
$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

1.20 试写出下列图形所示函数的分析表达式。

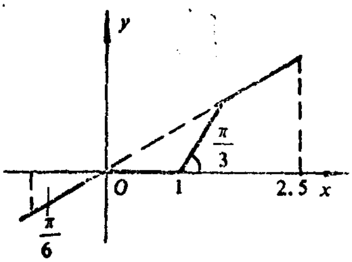


图1-3

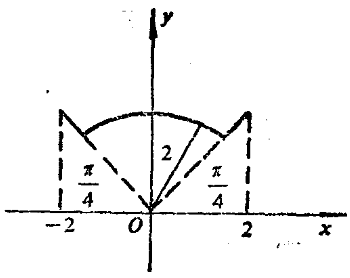


图1-4

解

$$(1)\quad y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{3}x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant 1,\\ \sqrt{3}(x-1), & 1<x\leqslant\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x, & \dfrac{3}{2}<x\leqslant\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

$$(2)\quad y=\begin{cases} -x, & -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}, \\ \sqrt{4-x^2}, & -\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{2}, \\ x, & \sqrt{2}<x\leqslant 2. \end{cases}$$

1.21 有三个矩形(图 1-5)，其高分别等于3 米、2 米、1米，当底皆为 1 米，假定 $x(-\infty<x<+\infty)$连续变动(即直线 AB 连续地平行移动)，试将阴影部分的面积 S 表为距离 x 的函数 $f(x)$。并求 $f(\pi)$, $f(-e)$之值。

解

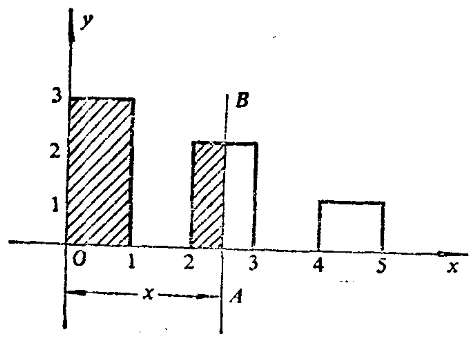


图 1-5

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ 3x, & 0<x\leqslant 1, \\ 3, & 1<x\leqslant 2, \\ 2x-1, & 2<x\leqslant 3, \\ 5, & 3<x\leqslant 4, \\ x+1, & 4<x\leqslant 5, \\ 6, & x>5. \end{cases}$$

$f(\pi)=5$;　　$f(-e)=0$.

第二章　极限与连续

§1　数列的极限

2.1　试用 ε-N 定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}=1$。

证　由于 $\left|\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right|=\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1=\dfrac{1/n^2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}$

$\frac{1}{n}=\varepsilon$

$<\dfrac{1}{2n^2}<\dfrac{1}{n}$，因此，任给 $\varepsilon>0$，取自然数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right|<\varepsilon \text{ 成立。}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

2.2　试用 ε-N 定义验证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n}=1$。

证　由于 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2-n}-n}{n}\right|$

$$=\left|\frac{-n}{n(\sqrt{n^2-n}+n)}\right|=\frac{1}{|\sqrt{n^2-n}+n|}\leqslant\frac{1}{n}\text{，因此}$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2-n}}{n}-1\right|<\varepsilon \text{ 成立。}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}}{n}=1.$$

2.3 设数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$. 每一项都大于零，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=0,$$

求证：该数列$\{x_n\}$在某一项以后单调减少。

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=0$，故，对于给定 $\varepsilon=1$，存在项数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\frac{x_{n+1}}{x_n}<1 \text{ 成立，即}$$

$$x_{n+1}<x_n.$$

这表明数列$\{x_n\}$从第 N 项之后单调减少（而且是严格单调减少）。

2.4 试证：若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$收敛于 a，则$|x_n|(n=1,2\cdots)$必收敛于$|a|$；反之是否成立，试举例说明。

证 由于$-|x_n-a|\leqslant|x_n|-|a|\leqslant|x_n-a|$，

于是有 $$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故对于任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，使$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，因而有

$$||x_n|-|a||<\varepsilon\text{成立。}$$

$$\text{所以 }\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|,$$

反之，未必成立。例如，数列$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 却不存在。

2.5 证明下列数列极限存在，并求此极限。已知 $x_1=1,x_2=$

$$1+\frac{x_1}{1+x_1}\ \cdots, x_n = 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, \cdots$$

证 (1) 证明极限存在：因为对于一切自然数 n，有 $\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<1$ 成立，所以

$$x_n = 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$$

故，$\{x_n\}$有上界。

显然，$x_2>x_1$。设 $x_n>x_{n-1}$，即 $x_n-x_{n-1}>0$，则

$$x_{n+1}-x_n = 1+\frac{x_n}{1+x_n}-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0,$$

从而 $x_{n+1}>x_n$ 对一切 n 成立，因此数列$\{x_n\}$严格单增。从而 $\{x_n\}$ 递增有上界，则必有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，于是有

(2) 求极限：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right),$$

因此

$$A = 1+\frac{A}{1+A},$$

即 $$A^2-A+1=0$$

解得 $$A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

因 $x_n>1$，故 $A\geqslant 1$，只有 $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，即