离散数学与算法

王传玉　著

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学与算法 / 王传玉著. —合肥:安徽大学出版社,2001.6
ISBN 7-81052-430-5/O·26

Ⅰ.离...　Ⅱ.王...　Ⅲ.离散数学　Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 032200 号

离散数学与算法　　王传玉　著

出版发行	安徽大学出版社	印　刷	中国科技大学印刷厂
	(合肥市肥西路 3 号 邮码 230039)	开　本	850×1168　1/32
联系电话	编辑室 0551-5106428	印　张	8.625
	发行部 0551-5107784	字　数	221 千
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	版　次	2001 年 6 月第 1 版
责任编辑	阮守武	印　次	2001 年 6 月第 1 次印刷
封面设计	孟献辉		

ISBN7-81052-430-5/O·26　　定价　15.00 元

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

本章我们将介绍离散数学的一些基本工具。首先介绍集合、子集以及集合运算等基本概念。其次，介绍序列的概念与性质。然后，我们复习整数的基本整除性质。最后，介绍矩阵概念及其运算。

1.1　集合和子集

集合论是现代数学的基础，它已渗透到古典分析、泛函、概率论、函数论以及信息论、排队论等各个领域。我们在本节介绍的是基础知识。

集合是一个不能精确定义的基本概念。通常把具有共同性质的一些东西，汇成一个整体，就形成一个集合。例如：教室内的桌子，某班级全体学生，平面上的点，介于 0 与 1 之间的全体实数，等等，均分别构成一个集合。一般用大写英文字母表示集合的名称，用小写英文字母表示组成集合的事物，即元素。若元素 x 属于集合 A，记作 $x\in A$；若元素 x 不属于集合 A，记作 $x\notin A$。

例题 1　$A=\{2,4,6\}$，则 $2\in A$，$3\notin A$。

给定一个集合，即给出一种判别某一元素是否属于集合 A 的判别准则。一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称作

有限集，否则就称作无限集。

描述有限集合的方法为将某有限集合的元素列举出来，称作穷举法。例如，表示非负整数且小于 4 的集合，$A=\{1,2,3\}$，此时，集合的元素次序是无关紧要的，即$\{1,3,2\}$，$\{3,2,1\}$，$\{2,1,3\}$皆表示同一个集合。重复的元素也不计较，即$\{1,2,2,3\}$也表示同样的集合。

有时仅用穷举法很难描述给定集合。另外一种描述集合的方法是利用一项规则，以决定某一物体是否属于该集合，往往需用大括号，即利用谓词 $P(x)$，$P(x)$为短语或陈述句，此集合记为$\{x\mid P(x)\}$。例如，$\{x\mid x$ 是非负整数且小于 4$\}$，即为$\{1,2,3\}$。

例题 2 组成单词 notion 的字母的集合 A，则 $A=\{i,n,o,t\}$ 或 $A=\{x\mid x$ 是单词 notion 的所有字母$\}$。

例题 3 常用的数域集：

(a) $Z^+=\{x\mid x$ 是正整数$\}$，即 $Z^+=\{1,2,3,\cdots\}$

(b) $N=\{x\mid x$ 是非负整数$\}$，即 $N=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(c) $Z=\{x\mid x$ 是整数$\}$，即 $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$

(d) $Q=\{x\mid x$ 是有理数$\}$

(e) $R=\{x\mid x$ 是实数$\}$

(f) 空集 $\varnothing$，或$\{\quad\}$

例题 4 集合$\{x\mid x^2=-1$ 且 $x\in R\}$，则为空集 $\varnothing$。

若能完全确定集合的元素，且集合 A 与 B 具有相同的成员，则称两个集合 A 和 B 相等，记作 $A=B$。

例题 5 $A=\{d,s,t,u,y\}$，$B=\{x\mid x$ 为单词 study 的字母$\}$，则 $A=B$。

当集合 A 的所有元素同时也是集合 B 的元素时，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$。若 A 不是 B 的子集，记作 $A\nsubseteq B$。参见图 1－1。

例题 6 $Z^+\subseteq Z$，$Q\subseteq R$，$Z\subseteq Q$。

图 1-1

例题 7 设 $A=\{2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{2,3,4,5,6,7\}$，则 $B\subseteq A$，$B\subseteq C$，$C\subseteq A$。

例题 8 设 A 为任意集合，则 $A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$。

例题 9 设 A 为集合，$B=\{A,\{A\},a,b,c\}$，则 $A\in B$，而 $\{A\}\in B$。

两个集合的相等可按照下述原理定义：

外延性原理 两个集合相等，当且仅当它们是互为子集。

两个集合 A 和 B 相等，记作 $A=B$。根据外延性原理，有 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$。

在研究数学逻辑结构及其他数学问题时，还须考虑某一包含所有论述事物的集合，称作全集，记作 U，它是唯一的。任意一个论述对象集合 A 皆为全集 U 的子集。

在研究有限集时，其所含的元素个数称为集合的基数。设 A 中有 n 个元素，则 A 的基数 $|A|=n$。

设 A 为任意集合，A 的所有子集组成的集合，称作 A 的幂集，记作 $P(A)$。

例题 10 设 $A=\{a,b,c\}$，则 $P(A)=\{\{\ \}$(或 $\varnothing$)$,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$(或 A)$\}$。

如果 A 是有限集，且 $|A|=n$，则其幂集 $P(A)$ 有 2^n 个元素。事实上，$|P(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$。

习题 1.1

1. 写出下列集合的元素：

(a) 所有小于 9 的非负整数

(b) $\{x\mid x\in Z,\ x^2<16\}$

2. 写出下列集合的谓词表示式:

(a) $\{1,3,5,7,9\}$

(b) $\{0,1,4,9,16\}$

3. 设 $A=\{1,2,3\}$,下列集合中哪个集合与 A 相等?

(a) $\{4,1,2,3\}$

(b) $\{x \mid x \in Z^+, x^2<16\}$

(c) $\{x \mid x \in Z, x^2 \leqslant 9\}$

4. 设 $A=\{1,a,b,c\}$,$B=\{\{1\},a,b,c\}$,$D=\{a,b,c\}$,$E=\{\{a,b\},c\}$,在符号□中填入$\subseteq$或$\nsubseteq$。

(a) $A\square B$ (b) $\varnothing\square A$ (c) $D\square B$ (d) $D\square E$

5. 设 $A=\{2,4,6\}$,求:$P(A)$,$|A|$,$|P(A)|$。

6. 试证:若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$。

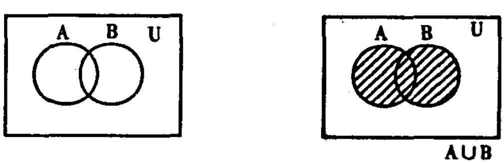
1.2 集合的运算

集合的运算,就是以给定集合为对象,按照确定的规则得到另外一些集合。

集合的并运算是指由给定集合 A 和集合 B 的所有元素构成的,其结果为集合 $A\cup B$,记为 $A\cup B=\{x \mid x\in A, 或\ x\in B\}$。

例题 1 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{e,f,g\}$,则 $A\cup B=\{a,b,c,e,f,g\}$。

也可利用文氏图表示集合的并,如图 1-2 阴影所示。



(a) (b)

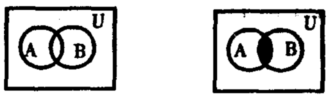
图 1-2

集合的交运算是指给定集合 A 和 B 的所有共同元素构成的，其结果为 $A\cap B$，记为 $A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$。

例题 2　设 $A=\{a,b,d,e,f\}$，$B=\{b,c,e,f,h\}$，$C=\{c,t,u\}$，则 $A\cap B=\{b,e,f\}$，$A\cap C=\{\quad\}$，$B\cap C=\{c\}$。

若两个集合无公共元素，则称它们是不相交的。如例题 2 中 $A\cap C=\varnothing$。

集合的交运算也可用文氏图表示，见图 1－3 阴影部分，不相交情形见图 1－4。



(a)　(b) $A\cap B$

图 1－3

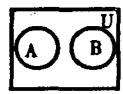


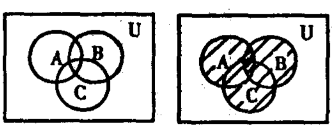
图 1－4

集合的并和交运算还可推广到三个集合上。

$A\cup B\cup C=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B,\text{或 } x\in c\}$。

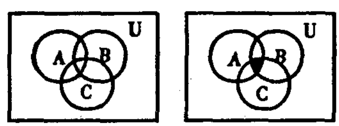
$A\cap B\cap C=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B,\text{且 } x\in c\}$。

分别如图 1－5、图 1－6 阴影所示。



(a)　(b) $A\cup B\cup C$

图 1－5



(a)　(b) $A\cap B\cap C$

图 1－6

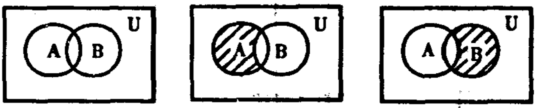
一般地，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 U 的一组子集，记 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$ 和 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$，它们都是 U 的子集。

例题 3　$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{3,4,5\}$，则 $A\cap B\cap C=\{3\}$。

集合的差运算是指由给定集合 A 和 B 中属于 A 而不属于 B 的元素构成的，其结果为 $A-B$，记为：$A-B=\{x \mid x \in A,且 x \notin B\}$。

例题 4 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A-B=\{1\}$，$B-A=\{4,5\}$。

集合的差运算也可用文氏图表示，见图 1-7 所示阴影部分。



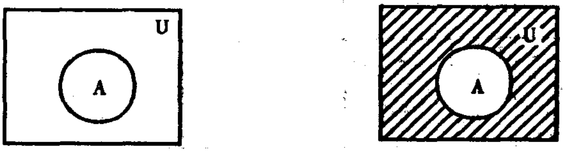
(a)　(b) A－B　(c) B－A

图 1-7

集合的补运算是指由给定集合 A 相对于全集 U 的差的元素构成的，其结果为 $\overline{A}=\{x \mid x \notin A\}$。

例题 5 令 $U=Z^{+}$，$A=\{x \mid x 为小于 7 的正整数\}$，则 $\overline{A}=\{x \mid x为大于等于 7 的正整数\}$。

集合的补运算也可用文氏图表示，如图 1-8 所示。



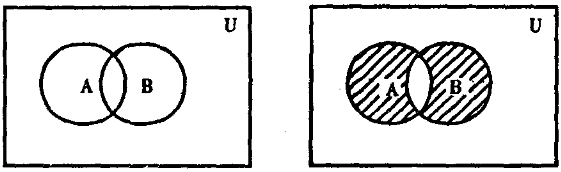
(a)　(b) $\overline{A}$

图 1-8

集合的对称差运算是指由给定集合 A 和 B 的不同时属于 A 和B，但属于 A 或属于 B 的元素构成，其结果记为 $A \oplus B$，$A \oplus B=\{x \mid x \in A 且 x \notin B\}或\{x \mid x \in B 且 x \notin A\}$。

例题 6 设 $A=\{x,y,z\}$，$B=\{y,z,w\}$，则 $A \oplus B=\{x,w\}$。

集合的对称差运算也可用文氏图表示，如图 1-9 所示。



(a)　　(b) A⊕B

图 1-9

集合运算的代数性质一般有以下若干条：

交换性　$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

结合性　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配性　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

幂等性　$A\cup A=A$

$A\cap A=A$

补性质　$\overline{(\overline{A})}=A$

$A\cup\overline{A}=\mathrm{U}$

$A\cap\overline{A}=\varnothing$

$\overline{\varnothing}=\mathrm{U}$

$\overline{\mathrm{U}}=\{\ \}$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$A\cap B=\overline{A}\cup\overline{B}$

全集性　$A\cup U=U$

$A\cap U=A$

空集性　$A\cup\varnothing=A$，或 $A\cup\{\ \}=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing$，或 $A\cap\{\ \}=\{\ \}$

我们经常需要计算集合的并运算的集合的基数。

设 A、B 为全集 U 的有限子集，应该如何计算 $|A\cup B|$ 呢？

若 $A\cap B=\varnothing$，则有 $|A\cup B|=|A|+|B|$；

若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $|A\cup B|\neq|A|+|B|$，因 $|A\cap B|$ 重复计算一次。故 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

加法原理 若 A、B 为有限集，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|。$$

例题 7 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A\cap B=\{4,5\}$，$|A\cup B|=7=|A|+|B|-|A\cap B|$。

加法原理推广：设 A、B、C 为有限集合，则

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|。$$

例题 8 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$，$C=\{5,7,8,9\}$，则 $A\cup B\cup C=\{1,\cdots,9\}$，$A\cap B=\{3,4,5\}$，$B\cap C=\{5,7\}$，$A\cap C=\{5\}$，$A\cap B\cap C=\{5\}$，则 $|A\cup B\cup C|=9=|A|+|B|+|C|-|A\cap C|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$。

可用文氏图表示为图 1-10。

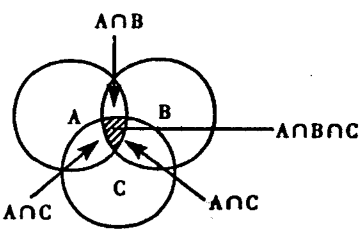


图 1-10

例题 9 某班级学生选修课情况如下：26 人选艺术课，20 人选计算机课，10 人选艺术与计算机课，二门都不选的是 15 人，问共有多少学生？

解 设学院共有 N 人，设 $A=\{$选修艺术课学生$\}$，$B=\{$选修

计算机课学生}。

$N=|A\cup B|+|\overline{A\cup B}|=|A|+|B|-|A\cap B|+|\overline{A\cup B}|$
$=26+20-10+15=51$。

习题　1.2

1. 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,2,3,7\}$，$B=\{4,5,6,8\}$，$C=\{1,3,6\}$，$D=\{6,8,9\}$，试计算：

(a) $A\cup B, A-B, \overline{A}, A\oplus B$；

(b) $A\cup B\cup C$，$A\cap B\cap C$，$\overline{A\cup B}$，$\overline{A\cap B}$。

2. 在图 1－11 中，将 $A\cup B\cup C$ 表示成它们的不相等子集的并。

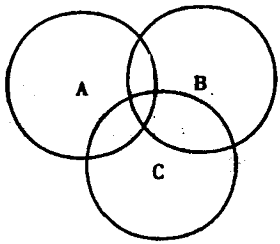


图 1－11

3. 若 $|A\cup B|=|A|$，B 为何种集合？

4. 某学院学生选修课情况如下：260 人选艺术课，208 人选生物课，160 人选计算机课，76 人选艺术与生物课，48 人选艺术与计算机课，62 人选生物与计算机课，全部三门课程都选的是 30 人，三门都不选的是 150 人。问：

(a) 共有多少名学生；

(b) 有多少学生选艺术和生物课，但不选计算机课。

5. 证明：$A\cap B\subseteq A$。

6. 证明：$A-A=\varnothing$。

7. 证明：$A-B=A\cap\overline{B}$。

8. 若 $A \cap B = A \cap C$，是否必有 $B = C$？

9. 何时有 $A - B = B - A$？

1.3 序　　列

所谓序列为一些对象有秩序地排成一列，依次分为第一元素，第二元素，……，等等。序列可分为有限序列与无限序列。序列中的元素可以不相同，也可以重复。

例题 1　序列 1,0,0,0,1,1,0,1,1 为有限序列，这里第一，五，六，八，九元素为 1，第二，三，四，七元素为 0。

例题 2　无限序列 1,8,27,64,125,…。

例题 3　序列 1,1,2,3,5,8,13,21,…。

对于序列可用两种方式描述，一是利用第 n 元素与第 $n-1$ 元素的递归式来构造，另一种是利用第 n 元素的显式函数形式构造。在例题 3 中第 n 元素 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，而例题 2 为第 n 元素 $a_n = n^2$。

例题 4　英文中一个单词也可视为一有限序列，如单词"student"可视为序列 s,t,u,d,e,n,t。

例题 5　无限串 101010……可视为无限序列 1,0,1,0,1,0,…。

例题 6　英文短语"we are watching play"可视为英文单词的序列，we, are, watching, play。

在计算机科学中序列是非常重要的，我们可记序列 a：$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$。$a_n$ 也可被视为序列 a 的第 n 个位置，或记此序列 a 为：$a[1], a[2], \cdots, a[n], \cdots$。位置 $a[n]$ 处可以放置某给定集合的元素。可用图 1-12 表示序列 a。

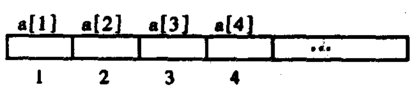


图 1-12

除了序列，集合的特征函数也是非常有用的。集合 A 的特征函数，记作 f_A，定义为：

$$f_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\0,\text{其他}\end{cases}$$

定理1 设 A 和 B 是全集 E 的任何两个子集，对于所有 $x\in E$，特征函数有如下一些性质：

(a) $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)*f_B(x)$

(b) $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_{A\cap B}(x)$

(c) $f_{A\oplus B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)$

证明 这里只证明(a)。

设 $x\in A\cap B$，因为 $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$，因此 $f_A(x)=f_B(x)=1$。所以，$f_{A\cap B}(x)=f_A(x)*f_B(x)$。

设 $x\notin A\cap B$，因为 $x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$，因此 $f_A(x)=0$或 $f_B(x)=0$，$f_{A\cap B}(x)=f_A(x)*f_B(x)=0$

(b)、(c)作为练习。

利用特征函数可以表示集合，设有有限全集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，若 A 为其某一子集，$x_i\in A$，则有 $f_A(x_i)=1, i=1,2,\cdots,n$；否则 $f_A(x_i)=0$。这样就可用0和1组成的一序列表示集合 A。

例题7 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 f_A 可表示为101010101，f_B 可表示为01010101。

借助于图1-12，将0或1放置在相应的 $A[k]$中，同样也表示了集合。

例题8 设 $U=\{s,t,u,v,w,x,y,z\}$，则可用长为8的序列表示U或其子集，图1-13表示全集 U，而图1-14表示子集 $A=\{t,u,w,x\}$。