

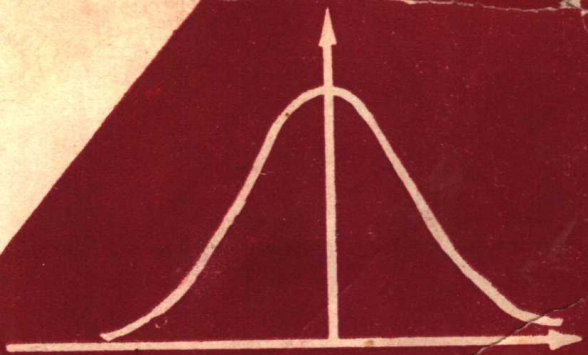
# 高×等×数×学

(上)

《经济管理应用数学》编委会

经济管 理  
应用数 学

1



成都科技大学出版社

18

0

经济管理数学 (一) 流

# 高等数学

(上)

《经济管理数学》编委会编著

成都科学技术大学出版社

一九八九年·成都

## 高等数学 (上)

《经济管理数学》编委会编著

---

成都科技大学出版社出版

四川省新华书店发行

四川省德阳市罗江印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张: 9

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

字数: 185千字 印数: 1-2000

ISBN7-5616-0367-3/TB·18(数)

---

定价: 3.60元

# 前 言

在“改革、开放”的新时期，经济管理和决策的现代化更加迫切。在经济计划、管理、预测和决策中，大量使用数学方法是管理决策现代化的标志之一。在我国，实现管理决策现代化的根本途径是培养大批现代化管理人材。

许多高等院校有关管理专业已经开设了高等数学、线性代数、概率论与数理统计、运筹学等课程。对于一些文理交叉学科、边缘学科和新兴的管理学科，如经济信息管理（管理信息系统）、数量经济、计划统计、企业管理等专业，对数学方法有更高的要求。为适应这一要求，由西南财经大学、中南财经大学、东北财经大学、上海财经大学、天津财经大学、天津商学院、北京经济学院、北京商学院、北京信息工程学院、湖南财经学院、广东商学院、浙江财经学院、沈阳财经学院等十二所院校有关专业的教师编写了这套《经济管理数学》教材，计有《高等数学（上、下）》、《线性代数》、《概率论与应用统计》、《运筹学》等五本。这套教材除作为有关专业的基本教材外，也可作为其它专业对数学有更多兴趣的学生学习参考，同时，对从事实际管理工作需要提高现代化管理水平的同志，也会是一套解决数学基础不足问题的深浅适度的自学材料。

《高等数学》分上、下两册，上册内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、无穷级数；下册内

容包括空间解析几何简介、多元函数微分学、重积分、广义积分与参变积分、曲线积分和曲面积分、微分方程与差分方程。全书共十五章,各章后面均选配习题,可在190学时讲完。

全书由(以编写章节先后为序)裘汉宗(第一、二章)、李一怡(第三章、第九章§9.1至§9.4)杨慎辉(第四章、第九章§9.5至§9.7)、史守智(第五、六、七章)、郭多祚(第八章)、林学杰(第十章§10.1至§10.6)、李可南(第十章§10.7与§10.8、第十一章)、于云鹏(第十二章)、江之源(第十三、十四章)、彭勇行(第十五章)等老师主编,上册由史守智,郭多祚老师主纂,下册由江之源、彭勇行老师主纂。

编者水平有限,错误在所难免,恳请读者批评斧正。

《经济管理数学》编委会

一九八九年·春节

## 《经济管理数学》编委会成员

(以姓氏笔划为序)

丁明超	于云鹏	马绍芹	尹崇智	史守智
田秀恭	刘云	江之源	许仁忠	刘雅梅
吴红	李一怡	陈戈止	李可南	吴声钟
余尚智	何孟平	杨慎辉	林学杰	周录君
郅继福	郭多祚	徐乃则	董太享	谢胜智
彭勇行	裘汉宗			

# 目 录

<b>第一章 函数</b> .....	( 1 )
§1.1 函数概念.....	( 1 )
一、常量与变量.....	( 1 )
二、函数概念.....	( 2 )
三、函数的表示法.....	( 5 )
四、几种特殊类型的函数.....	( 6 )
五、复合函数与反函数.....	( 8 )
§1.2 初等函数.....	( 10 )
一、基本初等函数.....	( 10 )
二、初等函数.....	( 12 )
习题.....	( 12 )
<b>第二章 极限与连续</b> .....	( 15 )
§2.1 数列的极限.....	( 15 )
一、数列极限的概念.....	( 15 )
二、数列极限的性质.....	( 20 )
三、极限的存在准则.....	( 26 )
§2.2 函数的极限.....	( 30 )
一、函数极限的概念.....	( 30 )
二、函数极限的性质.....	( 33 )
三、其它形式的极限.....	( 35 )

四、数列极限与函数极限的关系·····	(37)
<b>§2.3 两个重要极限</b> ·····	(39)
一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ·····	(39)
二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ·····	(40)
<b>§2.4 无穷小量与无穷大量</b> ·····	(42)
一、无穷小量·····	(42)
二、无穷大量·····	(43)
三、无穷小量的比较·····	(44)
<b>§2.5 连续函数</b> ·····	(46)
一、函数在一点连续的概念·····	(46)
二、函数的间断点·····	(49)
三、连续函数的性质·····	(51)
四、初等函数的连续性·····	(52)
五、闭区间上连续函数的性质·····	(54)
习题·····	(57)
<b>第三章、导数与微分</b> ·····	(64)
<b>§3.1 导数概念</b> ·····	(64)
一、导数概念的引入·····	(64)
二、导数的定义·····	(67)
三、可导与连续的关系·····	(71)
<b>§3.2 求导法则</b> ·····	(72)
一、四则运算求导公式·····	(72)
二、复合函数求导法则·····	(75)
三、反函数求导法则·····	(79)
四、对数求导法·····	(82)



§3.3	高阶导数	(83)
一、	高阶导数的定义	(83)
二、	高阶导数的计算	(83)
§3.4	微分及其运算	(86)
一、	微分概念	(87)
二、	微分法则	(88)
三、	微分应用于近似计算	(90)
四、	高阶微分	(92)
§3.5	隐函数与参数方程的微分法	(93)
一、	隐函数微分法	(93)
二、	参数方程的微分法	(95)
§3.6	导数的几何应用	(96)
习题		(98)

#### 第四章、微分学的基本定理及其应用…(106)

§4.1	中值定理	(106)
一、	洛尔定理	(106)
二、	拉格朗日中值定理	(107)
三、	柯西中值定理	(109)
§4.2	洛必达法则	(111)
一、	$\frac{0}{0}$ 型未定式	(111)
二、	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(113)
三、	其它类型未定式	(114)
§4.3	泰勒公式	(115)
§4.4	函数的单调性 曲线的凸性与拐点	(122)

一、函数单调性的判别法	(122)
二、曲线的凸性与拐点	(124)
§4.5 函数的极值	(128)
§4.6 函数作图	(132)
一、曲线的渐近线	(132)
二、函数图形的作法	(134)
§4.7 微分学在经济中的应用	(137)
一、边际问题	(137)
二、经济中的极大极小问题	(140)
三、经济函数的弹性及其分析	(145)
习题	(149)
<b>第五章 不定积分</b>	<b>(154)</b>
§5.1 不定积分的概念及运算法则	(154)
一、原函数与不定积分的定义	(154)
二、不定积分的基本公式	(155)
三、不定积分的运算法则	(156)
§5.2 不定积分的计算	(157)
一、换元法	(157)
二、分部积分法	(160)
三、有理函数积分法	(163)
四、三角函数有理式的积分	(169)
五、简单无理函数的积分	(170)
习题	(171)
<b>第六章 定积分</b>	<b>(175)</b>
§6.1 定积分的概念与性质	(175)

一、定积分问题举例	(175)
二、定积分的定义	(177)
三、定积分的性质	(179)
§6.2 微积分的基本公式	(182)
§6.3 定积分的计算	(184)
一、定积分的换元法	(184)
二、定积分的分部积分法	(187)
习题	(189)
<b>第七章 定积分的应用</b>	<b>(193)</b>
§7.1 面积、弧长、体积	(193)
一、面积	(193)
二、弧长	(198)
三、体积	(202)
§7.2 物理应用举例	(205)
§7.3 经济应用举例	(208)
习题	(210)
<b>第八章 无穷级数</b>	<b>(214)</b>
§8.1 数项级数的概念和收敛性	(214)
一、数项级数的收敛性	(214)
二、收敛级数的性质	(216)
§8.2 正项级数	(221)
§8.3 一般级数	(226)
一、绝对收敛和条件收敛	(226)
二、阿贝尔变换	(228)

§8.4	函数级数的一致收敛性	(233)
§8.5	函数级数一致收敛的判别法	(237)
§8.6	一致收敛的函数级数的性质	(240)
§8.7	幂级数	(243)
	一、幂级数的收敛半径和收敛区间	(243)
	二、幂级数的性质	(247)
§8.8	函数的幂级数展开	(249)
	一、泰勒级数	(251)
	二、简单初等函数的泰勒展式	(253)
	三、函数幂级数展开式在近似计算中的应用	(260)
§8.9	傅立叶级数	(262)
	一、三角函数系的正交性	(262)
	二、傅立叶级数	(263)
	三、傅立叶级数的收敛性	(265)
	四、正弦级数与余弦级数	(269)
	五、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数	(270)
	习题	(273)

# 第一章 函数

现实世界处于不断的变化之中，当我们对一些变化的事物以及它们之间的联系进行数量描述时，就形成了函数概念。函数是微积分的主要研究对象。本课程是在实数域内研究函数。

## §1.1 函数概念

### 一、常量与变量

当我们观察某种自然现象或生产过程时，常常遇到各种不同的量。有些量在过程进行中始终保持同一数值，称为常量，例如自由落体的重力加速度就是一个常量。有些量在过程进行中取不同的数值，我们称为变量，例如自由落体过程中的时间、速度和路程都是变量。

一个变量所有的值构成的数集称为变量的变域或变化范围。例如自由落体的时间 $t$ 的变域是闭区间 $[0, T]$ ，其中 $T$ 是落地时间。变域常常用区间表示，但有的变量的变域不能用区间表示，例如自然数 $n$ 的变域。

以后常常用到邻域的概念。所谓点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，是指数轴上以 $x_0$ 为中心，正数 $\delta$ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，即满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x$ 的集合。如图(1-1)所示。

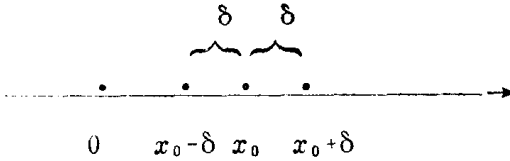


图1--1

## 二. 函数概念

在一个变化过程中,常常出现几个变量,这些变量互相依赖、互相联系。微积分不是孤立地研究这一个个变量,而是研究这些变量之间的依赖关系,即函数关系。

**【例1】** 自由落体的路程 $s$ 和时间 $t$ 是两个变量,且它们通过公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1-1)$$

相互联系的。其中 $g=9.8$ 米/秒<sup>2</sup>是常数。设落地时间是 $T$ 秒,则时间 $t$ 的变域是 $[0, T]$ ,对于变域中的每一时刻 $t$ ,路程 $S$ 通过公式(1-1)有确定的值 $\frac{1}{2}gt^2$ 与之对应。

**【例2】** 一气象站的温度自动记录仪自动描出某天(24小时)的气温变化曲线,如图(1-2)所示。时间 $t$ 和温度 $T$ 是两个变量, $t$ (小时)的变化范围是 $[0, 24]$ ,其中每一

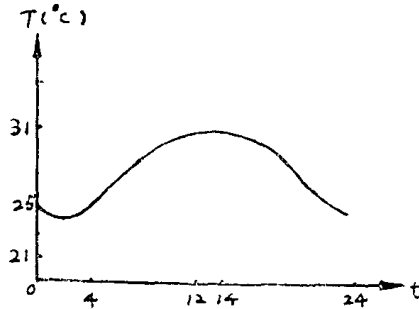


图1-2

时刻 $t_0$ 通过图(1-2)的曲线,可得到 $t_0$ 时刻的温度 $T_0$ 。(曲线上与横坐标 $t_0$ 对应的点的纵坐标)。

**【例3】** 下面表格给出了我国1977~1982年的社会总产值(亿元)(取自《统计年鉴》),记1977年为第1年,则

年份(n)	1	2	3	4	5	6
社会总产值(C)	4446.7	5037.5	5513.7	5783.5	6015.9	6454.0

年份 $n$ 与总产值 $C$ 是两个变量,年份 $n$ 的变化范围是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,对于其中的每一个自然数,通过表格都有确定的总产值与之对应。例如当 $n=5$ 时,即1981年,通过表格得到该年总产值 $C=6015.9$ 亿元。

上面三个例子虽然都有不同的意义,但是它们都是通过一定的对应法则(公式、图、表)反映两变量之间的依赖关系。我们把这种关系称为函数关系。

**定义** 设某一变化过程中有两个变量 $x$ 与 $y$ ,如果对于变量 $x$ 的变化范围 $D$ 的每一个值,根据某一一对应法则 $f$ ,变量 $y$ 都有确定的一个值与之对应,则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,记作

$$y = f(x) \quad x \in D$$

其中 $x$ 叫自变量, $y$ 叫因变量,自变量 $x$ 的变域 $D$ 叫做函数的定义域,因变量 $y$ 的取值范围称为函数的值域。

例1中公式(1—1)确定了路程 $S$ 是时间 $t$ 的函数,定义域是 $[0, T]$ ,例2中通过气温曲线确定了气温 $T$ 是时间 $t$ 的函数,定义域是 $[0, 24]$ ,例3通过表格确定了社会总产值 $C$ 是年份 $n$ 的函数,定义域是连续自然数 $1 \sim 6$ 。

公式(1—1),气温曲线和表格1分别是这三个函数的对应法则 $f$ 。

在函数定义中包含三个内容:函数的定义域、对应法则和值域。但是,只要定义域和对应法则确定了,则函数的值

域随之而定。因此，一般说来函数的定义域 $D$ 和对应法则 $f$ 是函数的两要素。

关于函数的定义域，如果函数是用数学式子来表达的，且不赋予实际意义，则其定义域就是使这个式子有意义的自变量所取值的集合，这时定义域可以省略不写。例如 $y = \sqrt{x}$ 其定义域为使 $\sqrt{x}$ 有意义的 $x$ 的全体，即 $x \geq 0$ ，一般可以省略不写。又如 $S = 4.9t^2$ 的定义域为一切实数，但例1中应考虑它的实际意义，由于落地后( $t > T$ )不再满足这个式子，因此其定义域是 $[0, T]$ 。

**【例4】** 求函数 $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\lg(2-x)}$ 的定义域。

解 要使 $\sqrt{x+1}$ 有意义，必须 $x+1 \geq 0$ ，要使 $\frac{1}{\lg(2-x)}$ 有意义，必须 $2-x > 0$ ，且 $\lg(2-x) \neq 0$ ，即 $2-x \neq 1$ ，于是定义域为

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \\ 2-x \neq 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

解得 $-1 \leq x < 1$ ， $1 < x < 2$ ，即 $D = [-1, 1) \cup (1, 2)$ 。

关于对应法则 $f$ 和函数值

当 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 的(对应)值用 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 来表示。例如 $f(t) = 4.9t^2$ ，当 $t = 1$ 时的函数值 $f(1) = 4.9 \times 1^2 = 4.9$ ，或 $S|_{t=1} = 4.9$ ； $f(t_0) = 4.9t_0^2$ ， $f(1+t_0^2) = 4.9(1+t_0^2)^2$ ， $f\left(\frac{1}{x}\right) = 4.9\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 等。

这里函数关系 $f(\quad) = 4.9(\quad)^2$ 表示将括号中的值平方



后乘以4.9。

两个不同的函数用不同的字母表示，

$$\text{例如 } f(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

在数学分析中两个函数相等，是指两个函数的定义域和对应法则都相同。只要两者之一不同，就说这两个函数不等，例如  $f(x) = x$  与  $g(x) = \sqrt{x^2}$ ，这两个函数的对应法则不同，所以不相等。

### 三 函数的表示法

从例1~3我们可以看到，函数关系可以用公式、表格和曲线图象来表示的方法，我们分别称为公式（解析）法、列表法和图象法。解析法便于运算和分析，用得最多；表格法（各种三角函数表、对数表等函数表）便于求函数值；图象法可以对函数的变化一目了然；三种方法各有利弊，我们常常结合起来使用。

解析法不一定用一个公式来表示，有的在几个不同的定义域内分别用几个不同的解析式表示一个函数，称为分段函数。如

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}; \quad g(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

都是分段函数。对于  $f(x) = |x-2|$ ，当  $x \geq 2$  时  $f(x) = x-2$ ，由于  $\pi (\approx 3.1416) > 2$ ，所以  $f(\pi) = \pi - 2$ ，由于  $1 < 2$  和  $-\sqrt{2} < 2$ ，所以  $f(1) = 2 - 1 = 1$ ， $f(-\sqrt{2}) = 2 - (-\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$ 。

除了三种常用的函数表示法外，有时函数也用其它方法