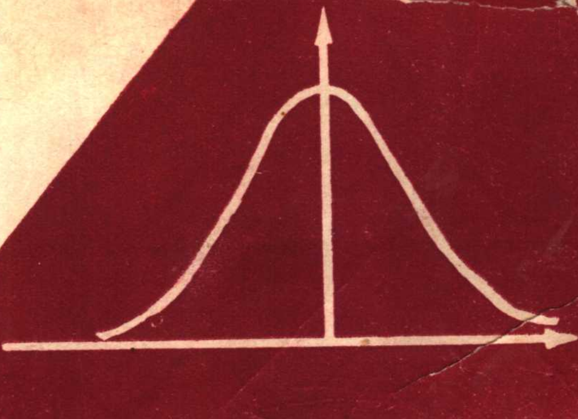
高等数学

（上）

《经济管理应用数学》编委会

经济管理
应用数学
1



成都科技大学出版社

经济管理数学（一）

高　等　数　学

（上）

《经济管理数学》编委会编著

成都科学技术大学出版社

一九八九年·成都

高等数学（上）

《经济管理数学》编委会编著

成都科技大学出版社出版

四川省新华书店发行

四川省德阳市罗江印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张：9

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

字数：185千字 印数：1－2000

ISBN7-5616-0367-3/TB·18(教)

定 价：3.60元

前　　言

在“改革、开放”的新时期，经济管理和决策的现代化更加迫切。在经济计划、管理、预测和决策中，大量使用数学方法是管理决策现代化的标志之一。在我国，实现管理决策现代化的根本途径是培养大批现代化管理人材。

许多高等院校有关管理专业已经开设了高等数学、线性代数、概率论与数理统计、运筹学等课程。对于一些文理交叉学科、边缘学科和新兴的管理学科，如经济信息管理（管理信息系统）、数量经济、计划统计、企业管理等专业，对数学方法有更高的要求。为适应这一要求，由西南财经大学、中南财经大学、东北财经大学、上海财经大学、天津财经大学、天津商学院、北京经济学院、北京商学院、北京信息工程学院、湖南财经学院、广东商学院、浙江财经学院、沈阳财经学院等十二所院校有关专业的教师编写了这套《经济管理数学》教材，计有《高等数学（上、下）》、《线性代数》、《概率论与应用统计》、《运筹学》等五本。这套教材除作为有关专业的基本教材外，也可作为其它专业对数学有更多兴趣的学生学习参考，同时，对从事实际管理工作需要提高现代化管理水平的同志，也会是一套解决数学基础不足问题的深浅适度的自学材料。

《高等数学》分上、下两册，上册内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、无穷级数；下册内

容包括空间解析几何简介、多元函数微分学、重积分、广义积分与参变积分、曲线积分和曲面积分、微分方程与差分方程。全书共十五章，各章后面均选配习题，可在190学时讲完。

全书由（以编写章节先后为序）裘汉宗（第一、二章）、李一怡（第三章、第九章§9.1至§9.4）杨慎辉（第四章、第九章§9.5至§9.7）、史守智（第五、六、七章）、郭多祚（第八章）、林学杰（第十章§10.1至§10.6）、李可南（第十章§10.7与§10.8、第十一章）、于云鹏（第十二章）、江之源（第十三、十四章）、彭勇行（第十五章）等老师主编，上册由史守智，郭多祚老师主纂，下册由江之源、彭勇行老师主纂。

编者水平有限，错误在所难免，恳请读者批评斧正。

《经济管理数学》编委会

一九八九年·春节

《经济管理数学》编委会成员

（以姓氏笔划为序）

目　录

第四章、微分学的基本定理及其应用…(106)

第一章　函　数

现实世界处于不断的变化之中，当我们对一些变化的事物以及它们之间的联系进行数量描述时，就形成了函数概念。函数是微积分的主要研究对象。本课程是在实数域内研究函数。

§1.1　函数概念

一、常量与变量

当我们观察某种自然现象或生产过程时，常常遇到各种不同的量。有些量在过程进行中始终保持同一数值，称为常量，例如自由落体的重力加速度就是一个常量。有些量在过程进行中取不同的数值，我们称为变量，例如自由落体过程中的时间、速度和路程都是变量。

一个变量所有的值构成的数集称为变量的变域或变化范围。例如自由落体的时间t的变域是闭区间$[0, T]$，其中T是落地时间。变域常常用区间表示，但有的变量的变域不能用区间表示，例如自然数n的变域。

以后常常用到邻域的概念。所谓点x_0的δ邻域，是指数轴上以x_0为中心，正数δ为半径的开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，即满足不等式$|x-x_0|<\delta$的x的集合。如图（1—1）所示。

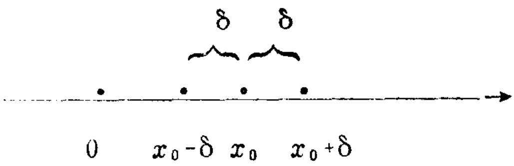


图1—1

二. 函数概念

在一个变化过程中，常常出现几个变量，这些变量互相依赖、互相联系。微积分不是孤立地研究这一个个变量，而是研究这些变量之间的依赖关系，即函数关系。

【例 1】 自由落体的路程s和时间t是两个变量，且它们通过公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (1—1)$$

相互联系的。其中$g=9.8$米/秒^{2}是常数。设落地时间是T秒，则时间t的变域是〔0，T〕，对于变域中的每一时刻t，路程S通过公式(1—1)有确定的值$\frac{1}{2}gt^2$与之对应。

【例 2】 一气象站的温度自动记录仪自动描出某天(24小时)的气温变化曲线，如图(1—2)所示。时间t和温度T是两个变量，t（小时）的变化范围是〔0，24〕，其中每一时刻t_0通过图（1—2）的曲线，可得到t_0时刻的温度T_0（曲线上与横坐标t_0对应的点的纵坐标）。

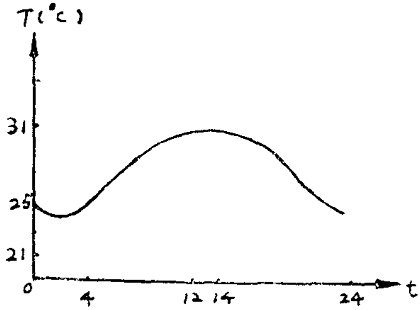


图1—2

【例3】 下面表格给出了我国1977～1982年的社会总产值（亿元）（取自《统计年鉴》），记1977年为第1年，则

年份(n)	1	2	3	4	5	6
社会总产值(C)	4446.7	5037.5	5513.7	5783.5	6015.9	6454.0

年份n与总产值C是两个变量，年份n的变化范围是$\{1,2,3,4,5,6\}$，对于其中的每一个自然数，通过表格都有确定的总产值与之对应。例如当$n=5$时，即1981年，通过表格得到该年总产值$C=6015.9$亿元。

上面三个例子虽然都有不同的意义，但是它们都是通过一定的对应法则（公式、图、表）反映两变量之间的依赖关系。我们把这种关系称为函数关系。

定义 设某一变化过程中有两个变量x与y，如果对于变量x的变化范围D的每一个值，根据某一对应法则f，变量y都有确定的一个值与之对应，则称变量y是变量x的函数，记作

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

其中x叫自变量，y叫因变量，自变量x的变域D叫做函数的定义域，因变量y的取值范围称为函数的值域。

例1中公式（1—1）确定了路程S是时间t的函数，定义域是$[0,T]$，例2中通过气温曲线确定了气温T是时间t的函数，定义域是$[0,24]$，例3通过表格确定了社会总产值C是年份n的函数，定义域是连续自然数1～6。

公式（1—1），气温曲线和表格1分别是这三个函数的对应法则f。

在函数定义中包含三个内容：函数的定义域、对应法则和值域。但是，只要定义域和对应法则确定了，则函数的值

域随之而定。因此，一般说来函数的定义域D和对应法则f是函数的两要素。

关于函数的定义域，如果函数是用数学式子来表达的，且不赋于实际意义，则其定义域就是使这个式子有意义的自变量所取值的集合，这时定义域可以省略不写。例如$y=\sqrt{x}$其定义域为使$\sqrt{x}$有意义的x的全体，即$x\geqslant 0$，一般可以省略不写。又如$S=4.9t^2$的定义域为一切实数，但例1中应考虑它的实际意义，由于落地后（$t>T$）不再满足这个式子，因此其定义域是$[0,T]$。

【例4】 求函数$y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{lg(2-x)}$的定义域。

解 要使$\sqrt{x+1}$有意义，必须$x+1\geqslant 0$，要使$\dfrac{1}{lg(2-x)}$有意义，必须$2-x>0$，且$lg(2-x)\neq 0$，即$2-x\neq 1$，于是定义域为

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ 2-x>0\\ 2-x\neq 1\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x\geqslant -1\\ x<2\\ x\neq 1\end{cases}$$

解得$-1\leqslant x<1$，$1<x<2$，即$D=[-1,1)\cup(1,2)$。

关于对应法则f和函数值

当$x=x_0$时函数$f(x)$的（对应）值用$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$来表示。例如$f(t)=4.9t^2$，当$t=1$时的函数值$f(1)=4.9\times 1^2=4.9$，或$S|_{t=1}=4.9$；$f(t_0)=4.9{t_0}^2$，$f(1+{t_0}^2)=4.9(1+{t_0}^2)^2$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4.9\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$等。

这里函数关系$f(\ )=4.9(\ )^2$表示将括号中的值平方

后乘以4.9。

两个不同的函数用不同的字母表示，

例如$f(t)=\frac{1}{2}gt^2$， $g(x)=\sqrt{x}$。

在数学分析中两个函数相等，是指两个函数的定义域和对应法则都相同。只要两者之一不同，就说这两个函数不等，例如$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$，这两个函数的对应法则不同，所以不相等。

三 函数的表示法

从例1～3我们可以看到，函数关系可以用公式、表格和曲线图象来表示的方法，我们分别称为公式（解析）法、列表法和图象法。解析法便于运算和分析，用得最多；表格法（各种三角函数表、对数表等函数表）便于求函数值；图象法可以对函数的变化一目了然；三种方法各有利弊，我们常常结合起来使用。

解析法不一定用一个公式来表示，有的在几个不同的定义域内分别用几个不同的解析式表示一个函数，称为分段函数。如

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2 & x>2\\ 0 & x=2\\ 2-x & x<2\end{cases};\quad g(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

都是分段函数。对于$f(x)=|x-2|$，当$x\geqslant2$时$f(x)=x-2$，由于$\pi(\approx3.1416)>2$，所以，$f(\pi)=\pi-2$，由于$1<2$和$-\sqrt{2}<2$，所以$f(1)=2-1=1$， $f(-\sqrt{2})=2-(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$。

除了三种常用的函数表示法外，有时函数也用其它方法