断裂力学中
应力强度因子的解法

国防工业出版社

断裂力学中应力强度因子的解法

张 行 著

国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

本书是作者在从事断裂力学应力强度因子解法研究工作成果的基础上撰写而成的。全书共16章，其内容可以分为三类：第一类是二维与三维应力强度因子的解析一变分解法；第二类是三维应力强度因子的能量差率封闭解法；第三类是二维与三维应力强度因子的广义刚度导数与广义守恒积分解法。这三类方法的共同目的是求解工程上常见的含裂纹有限大板和有限大体应力强度因子。这些方法实质上属于半解析一半数值方法的范畴。它们的应用范围比较宽：既可用于求解二维问题，又可用于求解三维问题；既可用于单块元件，又可用于加劲结构；既可用于均匀材料，又可用于复合材料。本书是一本系统性强且理论联系实际的学术专著。

读者对象：从事飞行器以及地面设备结构损伤容限设计的工程技术人员与有关科研人员以及固体力学、航空、航天、机械等专业研究生。

断裂力学中应力强度因子的解法

张 行 著

责任编辑 何曼庆

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码 100044）

新华书店经售

北京昌平长城印刷厂印装

*

787×1092毫米 16开本 印张21 插页2 486千字

1992年6月第一版 1992年6月第一次印刷 印数：0 001—1 000册

ISBN 7-118-00903-2/O·74 定价：19.90元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1．学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2．学术思想新颖，内容明确、具体、有突出创见，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的高科技内容的专著。

3．有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的新技术、新工艺内容的科技图书。

4．填补目前我国科学技术领域空白的薄弱学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展评审工作，职责是：负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第一届评审委员会组成人员

前 言

断裂力学是研究含裂纹构件强度与寿命的一门固体力学新分支，它是结构损伤容限设计的理论基础。断裂力学可分为线弹性断裂力学与弹塑性断裂力学两大类别，前者适用于裂纹尖端附近小范围屈服的情况；后者适用于裂纹尖端附近大范围屈服的情况。就目前情况而言，弹塑性断裂力学发展很快，但是线弹性断裂力学在结构损伤容限设计中仍居重要地位。

在线弹性断裂力学中，最重要的力学参量是应力强度因子，它控制裂纹尖端附近的应力场与位移场。因此，应力强度因子可以用于预估含裂纹结构在单调载荷作用下的剩余强度以及在重复载荷作用下的剩余寿命。

目前，确定应力强度因子的方法大体可以分为解析法与数值法两大类。解析法的优点是所需的计算工作少；数值法的优点是所能解决的问题多。而前者的缺点是所能解决的问题少；后者的缺点是所需的计算工作多。

本书目的在于介绍作者及其合作者在应力强度因子解法方面所作的研究工作成果。

本书第 1 章至第 8 章介绍确定含裂纹二维与三维有限大体应力强度因子的解析变分方法。这是一种半解析半数值方法，它兼有解析法与数值法的优点而克服了它们各自的缺点，即所需计算工作少而所能解决的问题多。当然，边界配置法与边界元素法也属于半解析半数值方法，但前者不能解决三维问题，而后者所需机时约比本方法所需机时大一个数量级。

本书第 9 章至第13章介绍确定含裂纹三维有限大体应力强度因子的能量差率封闭解法。这个方法的优点表现在它可以充分利用已有的二维应力强度因子结果确定三维应力强度因子。特别是这个方法是一种封闭解法，具有解析方法的优点，非常节省机时。由本方法所得结果与由有限元法所得结果的差别在工程允许范围之内，但本方法的计算工作量约为有限元法的千分之一到万分之一的数量级。

本书第14章至第16章介绍应力强度因子的广义刚度导数解法与广义守恒积分解法，它们发展了已有的刚度导数解法与守恒积分解法，拓宽了这两种解法的应用范围。

崔德渝副教授参加了本书第二章与第三章的撰写工作，孟庆春同志参加了第六章的撰写工作，王奇志同志参加了第十章至第十三章的撰写工作。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评与指正。

目 录

第 1 章 弹性力学二维问题的复变函数解法 …… 1
1.1 各向同性材料平面问题的复变函数解法 …… 1
1.2 各向异性材料平面问题的复变函数解法 …… 4
1.3 反平面问题的复变函数解法 …… 6
参考文献 …… 7
第 2 章 边缘裂纹二维应力强度因子的解析—变分解法 …… 8
2.1 各向同性材料边缘裂纹平面问题解法 …… 8
2.2 各向异性材料边缘裂纹平面问题解法 …… 18
2.3 边缘裂纹反平面问题解法 …… 27
2.4 复连通域边缘裂纹平面问题解法 …… 31
附录 2 A 各向异性边缘裂纹平面问题角分布函数在各向同性情况下的推广 …… 40
参考文献 …… 42
第 3 章 内部与边缘裂纹二维应力强度因子的解析—广义变分解法 …… 43
3.1 以单区广义变分原理为基础的解法——结构对称情况 …… 43
3.2 以多区广义变分原理为基础的解法——结构非对称情况 …… 50
3.3 反对称情况 …… 54
参考文献 …… 57
第 4 章 各向同性材料内部裂纹二维应力强度因子的解析—变分解法 …… 58
4.1 各向同性材料平面问题内部裂纹的一般表达式 …… 58
4.2 直线裂纹情况——泰勒级数展开式 …… 59
4.3 孔边单侧裂纹情况——罗朗级数展开式 …… 65
4.4 孔边双侧不等长裂纹情况 …… 73
参考文献 …… 79
第 5 章 各向异性材料内部裂纹二维应力强度因子的解析—变分解法 …… 80
5.1 单块平板孔边裂纹情况的一般表达式 …… 80
5.2 单块平板孔边裂纹情况的解析—变分解法 …… 84
5.3 单块平板孔边裂纹情况的数值结果 …… 87
5.4 加劲平板孔边裂纹情况的一般表达式 …… 91
5.5 加劲平板孔边裂纹情况的解析—变分解法 …… 94
5.6 加劲平板孔边裂纹情况的数值结果 …… 98
第 6 章 界面裂纹（层板层间分层）二维应力强度因子的解析—变分解法 …… 108
6.1 两种各向同性材料层板层间裂纹问题解析—变分解法 …… 108
6.2 两种各向同性材料层板层间裂纹问题的解析—广义变分解法 …… 114
6.3 对称正交铺层复合材料层板分层问题的解析—广义变分解法 …… 119
6.4 对称斜交铺层复合材料层板在反平面变形情况下分层问题的解析—广义变分解法 …… 129
6.5 对称斜交铺层复合材料层板在平面变形情况下分层问题的解析—广义变分解法 …… 137

6.6 复合材料层合梁在横向载荷作用下分层问题的解析—广义变分解法……149
参考文献……157
第7章 三维有限大含裂纹体应力强度因子的变分—交替解法……158
7.1 解题方法……158
7.2 承受任意面力的含深埋椭圆裂纹无限大体的解析解法回顾……159
7.3 承受任意面力的无裂纹三维有限大体的函数变量变分解法——解析变分解法……162
7.4 数值计算结果……166
参考文献……171
第8章 含裂纹三维弹性体角点应力奇异性分析的函数变量位移解法——解析变分解法……172
8.1 三维弹性力学的含参量函数变量位移解法……172
8.2 对称与反对称情况下局部应力场分析……174
8.3 边界条件——变分解法……176
8.4 结果讨论……179
参考文献……180
第9章 三维有限大体张开型裂纹的应力强度因子能量差率法封闭解——单自由度情况……181
9.1 裂纹张开位移的基本微分方程——裂纹的虚比例扩展……181
9.2 裂纹张开位移与Ⅰ型应力强度因子的封闭解法……184
9.3 三维裂纹张开位移模态的表示方法……185
9.4 三维张开型裂纹问题的典型情况……186
附录9A 二维裂纹张开位移的总位能差率解法……191
参考文献……195
第10章 三维有限大体剪切型裂纹的应力强度因子能量差率法封闭解——单自由度情况……196
10.1 裂纹剪切位移与Ⅱ、Ⅲ型应力强度因子……196
10.2 裂纹剪切位移微分方程及其封闭解法……197
10.3 三维裂纹剪切位移模态的表示方法……199
10.4 三维剪切型裂纹问题典型情况……201
参考文献……208
第11章 圆管三维裂纹应力强度因子的能量差率法封闭解……209
11.1 张开型裂纹问题……209
11.2 剪切型裂纹问题……218
参考文献……227
第12章 三维有限大体非对称裂纹应力强度因子能量差率法封闭解——多自由度情况……228
12.1 单轴向偏心裂纹——二自由度情况……228
12.2 双轴向偏心裂纹——三自由度情况……237
12.3 偏轴裂纹……242
12.4 能量差率法封闭解的高级理论……251
附录12A 二维裂纹张开位移的模态与幅值……259

参考文献 ……………………………………………………………………………………267

第13章 三维有限大体复合型裂纹应力强度因子的能量差率法封闭解 ………………268

13.1 裂纹表面受法向力时的基本微分方程 ……………………………………………268

13.2 裂纹表面受切向力时的基本微分方程 ……………………………………………271

13.3 裂纹表面受复合力时的基本微分方程 ……………………………………………272

13.4 基本微分方程组的简化及其封闭解法 ……………………………………………275

附录13A 二维斜裂纹的裂纹面位移模态与幅值 ……………………………………276

参考文献 ……………………………………………………………………………………283

第14章 应力强度因子的广义刚度导数解法 …………………………………………284

14.1 变厚度板单纯型裂纹应力强度因子的广义刚度导数法 …………………………284

14.2 等厚度板复合型裂纹应力强度因子的广义刚度导数解法 ………………………295

参考文献 ……………………………………………………………………………………300

第15章 应力强度因子的广义守恒积分解法 …………………………………………301

15.1 二维单纯型广义守恒积分及其在求解应力强度因子中之应用 …………………301

15.2 二维复合型广义守恒积分及其在求解应力强度因子中之应用 …………………309

15.3 三维广义守恒积分及其在求解应力强度因子中之应用 …………………………315

参考文献 ……………………………………………………………………………………319

第16章 应力强度因子的加权守恒积分解法 …………………………………………320

16.1 守恒积分的建立——权函数法 ……………………………………………………320

16.2 含V型缺口板缺口顶端附近应力场分析 …………………………………………321

16.3 权函数的确定与守恒积分收敛性的证明 …………………………………………324

16.4 含V型缺口板缺口顶端应力强度因子的加权守恒积分—有限元解法 …………327

参考文献 ……………………………………………………………………………………328

第1章　弹性力学二维问题的复变函数解法

为了确定断裂力学中的二维应力强度因子，我们首先扼要介绍弹性力学二维问题的复变函数解法，其中包括各向同性材料与各向异性材料，平面问题与反平面问题。

1.1　各向同性材料平面问题的复变函数解法

1.1.1　基本方程与边界条件

这个问题以采用力法，引入应力函数求解为宜。应力函数U应该满足以下双调和方程[1.1]

$$\nabla^2\nabla^2 U=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 U=0 \tag{1.1}$$

U与应力分量σ_{xx}、σ_{yy}与σ_{xy}有如下关系

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\ \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

式（1.1）表示协调方程，式（1.2）表示平衡方程。

应变分量ε_{xx}、ε_{yy}与ε_{xy}可以通过物理方程表示成应力分量的函数如下

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\frac{1}{E_1}(\sigma_{xx}-\nu_1\sigma_{yy})\\ \varepsilon_{yy}&=\frac{1}{E_1}(\sigma_{yy}-\nu_1\sigma_{xx})\\ \varepsilon_{xy}&=\frac{1+\nu_1}{E_1}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

式中，弹性常数E_1与ν_1视平面应力或平面应变问题而异

$$\left.\begin{aligned}&E_1=E,\ \nu_1=\nu\ （平面应力）\\ &E_1=\frac{E}{1-\nu^2},\ \nu_1=\frac{\nu}{1-\nu}\ （平面应变）\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

应变分量与位移分量u_x和u_y有如下关系

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ &\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

式（1.5）表示几何方程。

进一步，元素刚体转动分量ω_z等于

$$\omega_z=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

平面问题的边界条件为

$$u_x = \bar{u}_x,\quad u_y = \bar{u}_y \quad 在\ s_u\ 上 \tag{1.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} l + \sigma_{yx} m = \bar{p}_x \\ \sigma_{xy} l + \sigma_{yy} m = \bar{p}_y \end{aligned}\right\} 在\ s_p\ 上 \tag{1.8}$$

式中，$\bar{u}_x$、$\bar{u}_y$ 与 $\bar{p}_x$、$\bar{p}_y$ 分别是在 s_u 与 s_p 上给定的位移与面力；l 与 m 是边界外法线方向余弦。

1.1.2 应力函数与应力分量的复变函数解

为了便于求解双调和方程式（1.1），引入如下共轭复变量

$$z = x + iy,\quad \bar{z} = x - iy \tag{1.9}$$

于是式（1.1）的复变函数形式为

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \tag{1.10}$$

积分上式，可得应力函数的复变函数表达式如下

$$U = f_1(z) + \bar{z} f_2(z) + f_3(\bar{z}) + z f_4(\bar{z}) \tag{1.11}$$

由于应力函数为实函数，有

$$f_3(\bar{z}) = \bar{f}_1(\bar{z}),\quad f_4(\bar{z}) = \bar{f}_2(\bar{z}) \tag{1.12}$$

令

$$\varphi(z) = 2f_2(z),\quad \theta(z) = 2f_1(z) \tag{1.13}$$

则应力函数的通解为

$$U = \frac{1}{2}\{\bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \theta(z) + \bar{\theta}(\bar{z})\} \tag{1.14}$$

式中，复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\theta(z)$ 的具体构造形式应根据问题的边界条件确定。

由式（1.9），可将式（1.2）改写如下

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)U \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)U \\ \sigma_{xy} &= -i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)U \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

将上式进行组合，可得

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \tag{1.16}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{1.17}$$

将式（1.14）代入式（1.16）与式（1.17），得到应力组合的复变函数表达式如下

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2\{\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})\} = 4\mathrm{Re}\varphi'(z) \tag{1.18}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\} \tag{1.19}$$

以上二式称为穆斯海里什维利（Мусхелишвили）的应力表达式。式中

$$\psi'(z) = \theta''(z) \tag{1.20}$$

1.1.3 位移分量的复变函数解

由式（1.2）、式（1.3）与式（1.5），可知

$$\left.\begin{aligned} E_1\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ E_1\frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

引入调和函数P

$$P = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{1.22}$$

由式（1.2）与式（1.18），可知

$$P = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\mathrm{Re}\varphi'(z) \tag{1.23}$$

令

$$\varphi(z) = p + iq \tag{1.24}$$

则由解析函数理论，可得

$$P = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y} \tag{1.25}$$

考虑到式（1.22）～式（1.25），可将式（1.21）的前两式改写如下

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_1}{1+\nu_1}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{4}{1+\nu_1}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{E_1}{1+\nu_1}\frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{4}{1+\nu_1}\frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

积分上式，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_1}{1+\nu_1}u_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu_1}p + f_1(y) \\ \frac{E_1}{1+\nu_1}u_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu_1}q + f_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

将式（1.27）代入式（1.21）的第三式，容易证明

$$\begin{aligned} f_1(y) &= -\omega y + u_{x0} \\ f_2(x) &= \omega x + u_{y0} \end{aligned} \tag{1.28}$$

显然，上式给出的$f_1(y)$与$f_2(x)$代表物体的刚体位移。从而，式（1.27）可以改写如下

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_1}{1+\nu_1}u_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu_1}p \\ \frac{E_1}{1+\nu_1}u_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu_1}q \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

由式（1.29）与式（1.14），有

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi}'(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z}) \tag{1.30}$$

上式称为穆斯海里什维利的位移表达式，式中，μ为剪切弹性模量。

$$\left.\begin{aligned}\kappa&=\frac{3-\nu}{1+\nu}\ (\text{平面应力})\\ \kappa&=3-4\nu\ (\text{平面应变})\end{aligned}\right\}\tag{1.31}$$

最后，容易证明

$$\omega_z=-i\frac{1}{E_1}\{\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})\}\tag{1.32}$$

1.2 各向异性材料平面问题的复变函数解法

在平面应力情况下，各向异性材料的应力与应变关系具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{16}\sigma_{xy}\\ \varepsilon_{yy}&=a_{21}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{26}\sigma_{xy}\\ 2\varepsilon_{xy}&=a_{61}\sigma_{xx}+a_{62}\sigma_{yy}+a_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1.33}$$

这时，以应力函数U表示的协调方程具有如下形式[1,2]

$$a_{22}\frac{\partial^4U}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4U}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4U}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-2a_{16}\frac{\partial^4U}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4U}{\partial y^4}=0\tag{1.34}$$

在平面应变情况下，各向异性材料的应力与应变关系具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=b_{11}\sigma_{xx}+b_{12}\sigma_{yy}+b_{16}\sigma_{xy}\\ \varepsilon_{yy}&=b_{21}\sigma_{xx}+b_{22}\sigma_{yy}+b_{26}\sigma_{xy}\\ 2\varepsilon_{xy}&=b_{61}\sigma_{xx}+b_{62}\sigma_{yy}+b_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1.35}$$

这里

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}(i,\ j=1,\ 2,\ 6)\tag{1.36}$$

同时，协调方程相应地变成

$$b_{22}\frac{\partial^4U}{\partial x^4}-2b_{26}\frac{\partial^4U}{\partial x^3\partial y}+(2b_{12}+b_{66})\frac{\partial^4U}{\partial x^2\partial y^2}-2b_{16}\frac{\partial^4U}{\partial x\partial y^3}+b_{11}\frac{\partial^4U}{\partial y^4}=0\tag{1.37}$$

显然，平衡方程，几何方程与边界条件均与各向同性材料的情况相同。

下面研究四阶偏微分方程式(1.34)的通解。引入广义复变量z如下

$$z=x+\mu y\tag{1.38}$$

式中，μ为复常数

$$\mu=\alpha+\beta i\tag{1.39}$$

将应力函数U写成如下广义复变函数形式

$$U=F(z)+\overline{F}(\overline{z})\tag{1.40}$$

上式可以保证应力函数为实函数。

将式(1.40)代入式(1.34)，可得

$$a_{11}\mu^4-2a_{16}\mu^3+(2a_{12}+a_{66})\mu^2-2a_{26}\mu+a_{22}=0\tag{1.41}$$

由此可见，只要μ是代数方程式（1.41）的根，则式（1.40）给出的U就是微分方程式（1.34）的解。

根据弹性常数之间的关系，可能存在以下两种情况：

（1）μ的所有根均不相等，即

$$\left.\begin{array}{l}\mu_1=\alpha_1+\beta_1 i,\ \ \mu_2=\alpha_2+\beta_2 i\\ \mu_3=\alpha_1-\beta_1 i,\ \ \mu_4=\alpha_2-\beta_2 i\end{array}\right\} \tag{1.42}$$

这里，α_1、β_1、α_2与β_2均为实数。

（2）μ的所有根成对相等，即

$$\mu_1=\mu_2=\alpha+\beta i,\ \ \mu_3=\mu_4=\alpha-\beta i \tag{1.43}$$

对于各向同性材料，有

$$\mu_1=\mu_2=i,\ \ \mu_3=\mu_4=-i \tag{1.44}$$

如果材料是正交各向异性，而且坐标轴平行于材料的弹性主轴，则

$$a_{16}=0,\ \ a_{26}=0 \tag{1.45}$$

此时，可能存在以下三种情况：

（1）μ_1与μ_2为不等的虚数，即

$$\mu_1=\beta_1 i,\ \ \mu_2=\beta_2 i \tag{1.46}$$

（2）μ_1与μ_2为相等的虚数，即

$$\mu_1=\beta i,\ \ \mu_2=\beta i \tag{1.47}$$

（3）μ_1与μ_2具有如下关系

$$\mu_1=\alpha+\beta i,\ \ \mu_2=-\alpha+\beta i \tag{1.48}$$

对于μ的所有根不相等的情况，应力函数的通解为

$$U=F_1(z_1)+\overline{F_1(z_1)}+F_2(z_2)+\overline{F_2(z_2)} \tag{1.49}$$

式中

$$zj=x+\mu j y \tag{1.50}$$

将式（1.49）代入式（1.2），并令

$$\varphi(z_1)=\frac{dF_1}{dz_1}=F_1'(z_1),\ \ \psi(z_2)=\frac{dF_2}{dz_2}=F_2'(z_2) \tag{1.51}$$

则容易得到应力分量的复变函数表达式如下

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx}=\mu_1^2\varphi'(z_1)+\mu_2^2\psi'(z_2)+\overline{\mu_1^2\varphi'(z_1)}+\overline{\mu_2^2\psi'(z_2)}\\ \sigma_{yy}=\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)+\overline{\varphi'(z_1)}+\overline{\psi'(z_2)}\\ -\sigma_{xy}=\mu_1\varphi'(z_1)+\mu_2\psi'(z_2)+\overline{\mu_1\varphi'(z_1)}+\overline{\mu_2\psi'(z_2)}\end{array}\right\} \tag{1.52}$$

最后研究位移分量的复变函数表达式。设

$$\left.\begin{array}{l}u_x=\xi_x(z_1)+\eta_x(z_2)+\overline{\xi_x(z_1)}+\overline{\eta_x(z_2)}\\ u_y=\xi_y(z_1)+\eta_y(z_2)+\overline{\xi_y(z_1)}+\overline{\eta_y(z_2)}\end{array}\right\} \tag{1.53}$$

将式（1.53）代入式（1.5），可得

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{xx}=\xi_x'(z_1)+\eta_x'(z_2)+\overline{\xi_x'(z_1)}+\overline{\eta_x'(z_2)}\\ \varepsilon_{yy}=\mu_1\xi_y'(z_1)+\mu_2\eta_y'(z_2)+\overline{\mu}_1\overline{\xi_y'(z_1)}+\overline{\mu}_2\overline{\eta_y'(z_2)}\\ 2\varepsilon_{xy}=\xi_y'(z_1)+\eta_y'(z_2)+\overline{\xi_y'(z_1)}+\overline{\eta_y'(z_2)}+\mu_1\xi_x'(z_1)+\mu_2\eta_x'(z_2)\\ \qquad+\overline{\mu}_1\overline{\xi_x'(z_1)}+\overline{\mu}_2\overline{\eta_x'(z_2)}\end{array}\right\} \tag{1.54}$$

将式 (1.52) 代入式 (1.33) 的前两式，并将所得结果与式 (1.54)的前两式进行对比，可取

$$\left.\begin{array}{l}\xi_x'(z_1)=p_1\varphi'(z_1),\quad \eta_x'(z_2)=p_2\psi'(z_2)\\ \xi_y'(z_1)=q_1\varphi'(z_1),\quad \eta_y'(z_2)=q_2\psi'(z_2)\end{array}\right\}\tag{1.55}$$

式中

$$p_j=a_{11}\mu_j^2+a_{12}-a_{16}\mu_j\tag{1.56}$$

$$\mu_j q_j=a_{21}\mu_j^2+a_{22}-a_{26}\mu_j\tag{1.57}$$

积分式 (1.55)。将所得结果代入式 (1.53)，有位移分量的复变函数表达式如下

$$\left.\begin{array}{l}u_x=p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)+\bar{p}_1\overline{\varphi(z_1)}+\bar{p}_2\overline{\psi(z_2)}\\ u_y=q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)+\bar{q}_1\overline{\varphi(z_1)}+\bar{q}_2\overline{\psi(z_2)}\end{array}\right\}\tag{1.58}$$

将式 (1.52) 代入式 (1.33) 的第三式，将式 (1.58) 代入式 (1.5) 第三式，并将所得结果进行对比，则可得式 (1.41)。由于 μ_j 是该方程的根，故此式即变为恒等式。式 (1.58) 略去了与变形无关的积分常数，式 (1.52) 与式 (1.58) 称为列赫尼斯基 (Lехницкий) 的应力与位移表达式。

1.3 反平面问题的复变函数解法

设 z 轴与棱柱体横截面垂直。反平面问题的位移具有如下形式

$$\left.\begin{array}{l}u_x=0,\quad u_y=0\\ u_z=w(x,\ y)\end{array}\right\}\tag{1.59}$$

于是，反平面问题以用位移法求解为宜。

根据式 (1.59)，由几何方程可得应变分量如下

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xy}=0\\ \varepsilon_{zx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x},\quad \varepsilon_{zy}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{array}\right\}\tag{1.60}$$

在确定应力分量时，假定材料是正交各向异性的，而且它的弹性主轴与坐标轴重合。这样，根据式 (1.60)，由物理方程，应力分量为

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=0\\ \sigma_{zx}=\mu_x\dfrac{\partial w}{\partial x},\quad \sigma_{zy}=\mu_y\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{array}\right\}\tag{1.61}$$

根据式 (1.61) 可知，在三个平衡方程中，前两个变为恒等式，而后一个具有如下形式

$$\mu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\tag{1.62}$$

反平面问题的位移边界条件为

$$w=\bar{w},\ \text{在}\ s_u\ \text{上}\tag{1.63}$$

根据式 (1.61) 可知，在三个静力边界条件中，前两个变为恒等式，而后一个具有如下形式

$$\mu_x \frac{\partial w}{\partial x} l + \mu_y \frac{\partial w}{\partial y} m = \bar{p}_z, \quad 在\ s_p 上 \tag{1.64}$$

式（1.62)、式（1.63）与式（1.64）就是反平面问题的基本微分方程与全部边界条件。

下面研究二阶偏微分方程式（1.62）的通解。引入广义复变量 ζ 如下

$$\zeta = x + \nu y \tag{1.65}$$

式中，ν 为复常数，并等于

$$\nu = \alpha^* + \beta^* i \tag{1.66}$$

将反平面位移 w 写成如下广义复变函数形式

$$w = g(\zeta) + \bar{g}(\bar{\zeta}) \tag{1.67}$$

上式可以保证反平面位移为实函数。

将式（1.67）代入式（1.62)，可知

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}}\, i \tag{1.68}$$

由此可见，只要 ν 满足式（1.68)，则式（1.67）就是微分方程式（1.62）的解。如果材料是各向同性的，即 $\mu_x = \mu_y = \mu$，则 $\nu = i$。

将式（1.67）代入式（1.61)，并考虑到式（1.68)，可以得到反平面应力分量的广义复变函数表达式如下

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \mu_x \{g'(\zeta) + \bar{g}'(\bar{\zeta})\} \\ \sigma_{zy} &= i\sqrt{\mu_x \mu_y}\{g'(\zeta) - \bar{g}'(\bar{\zeta})\} \end{aligned}\right\} \tag{1.69}$$

如果材料是各向同性的，则有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ &\sigma_{zx} = \mu\{g'(\zeta) + \bar{g}'(\bar{\zeta})\} \\ &\sigma_{zy} = i\mu\{g'(\zeta) - \bar{g}'(\bar{\zeta})\} \end{aligned}\right\} \tag{1.70}$$

这里，$\zeta = x + iy$。

参 考 文 献

1.1 Мусхелишвили Н И. Некоторые Основные Задачи Математической Теории Упругости. Москва, Издательство Академии Наук, 1954.

1.2 Лехницкий С Г. Анизотропные Пластинки. Москва, Государственное Издательство Технико-теоретической Литературы, 1957.

第 2 章　边缘裂纹二维应力强度因子的解析—变分解法

本章以弹性力学二维问题复变函数解法为基础，研究边缘裂纹二维应力强度因子的解析—变分解法，其中包括各向同性材料的平面问题、各向异性材料的平面问题与反平面问题三种情况。

2.1　各向同性材料边缘裂纹平面问题解法

2.1.1　裂纹表面的边界条件

图 2.1 表示含边缘裂纹的一个二维固体。

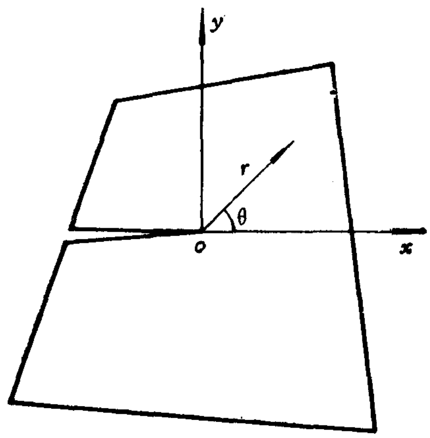

图2.1　含边缘裂纹的二维固体

第 1 章曾经得到各向同性材料平面问题的应力与位移分量的穆斯海里什维利复变函数表达式[2.1]

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xx}=2\{\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})\}=4\mathrm{Re}\varphi'(z) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2\{\overline{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\} \tag{2.2}$$

$$2\mu(u_x+iu_y)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'}(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z}) \tag{2.3}$$

以上三式已经满足平面问题的所有基本方程。

下面建立裂纹表面的边界条件，并由此确定复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的构造形式[2.2]。根据图 2.1，裂纹上、下表面的边界条件为

$$\sigma_{yy}^{(+)}=\sigma_{xy}^{(+)}=0,\quad \sigma_{yy}^{(-)}=\sigma_{xy}^{(-)}=0 \tag{2.4}$$

式中，(+) 与 (−) 分别表示裂纹上表面与下表面。

由式 (2.4) 可知，σ_{xx} 不出现在裂纹表面的边界条件中。因此，由式 (2.1) 与式 (2.2) 消去 σ_{xx}，可得到如下新的应力组合

$$\sigma_{yy}-i\sigma_{yx}=\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})+\overline{z}\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})+(z-\overline{z})\overline{\varphi}''(\overline{z}) \tag{2.5}$$