题解中心
几何辞典

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社

下　卷

幾何學公式集

設長 L 爲長度之單位,

(I) 以小字母 $a, b, c,$ ……表任意之某長,以 R, r 表半徑之長.

(II) 以大字母 S, $S_1, S_2,$ ……表任意之某面積. 但面積單位乃以長度單位 L 爲一邊之正方形面積.

(III) 以 V, $V_1, V_2,$ ……表任意之某體積.

長度公式 平面之部

【不等式的關係】 1. 設三角形之三邊爲 a, b, c, 則 $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$, 從而 $a\sim b<c$, $b\sim c<a$, $c\sim a<b$.

2. 設二圓之半徑爲 r, r', 其中心距離爲 d, 則兩圓相交時, $r+r'>d>r\sim r'$; 互在外部,而不相交時, $r+r'<d$; 其一完全在他一之內部,而不相交時, $r-r'>d$.

【等式的關係】 1. 設半徑爲 r, r' 之二圓,其中心距離爲 d, 則兩圓外切時, $r+r'=d$ 內切時, $r\sim r'=d$.

2. 設三角形 ABC 之三邊爲 a, b, c, 命 $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$.

(I) 命由 A, B, C 至內切圓切點之距離,分別爲 A_i, B_i, C_i; 由 A, B, C 至其對應傍切圓與邊 (b, c), (c, a), (a, b) 延線之切點之距離爲 A_e, B_e, C_e; 由 A, B, C 至傍切圓與邊 (b, c), (c, a), (a, b) 之切點之距離分別爲 (A_b, A_c), (B_c, B_a), (C_a, C_b), 則

$$A_e=B_e=C_e=s.$$
$$A_i=B_c=C_b=s-a.$$
$$B_i=C_a=A_c=s-b.$$
$$C_i=A_b=B_a=s-c.$$

(II) 命內切圓之半徑爲 r, 面積爲 S, 外心至內心之距離爲 d, 則

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{S}{s}=\frac{R^2-d^2}{R}.$$

(III) 命角 BAC 內之傍切圓半徑爲 r_1, 則

$$r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}=\frac{S}{s-a}.$$

(IV) 命外接圓之半徑爲 R, 則

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{abc}{4S}=\frac{bc}{2h_a}.$$

但 h_a 爲由 A 至邊 a 所引之高.

(V) 命由 A 至邊 a 之高爲 h_a, 則

$$h_a=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}/a.$$

(VI) 命由 A 至邊 a 之中線之長為 m_a, 則 $m_a=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)}$.

(VII) 命角 A 之二等分線由 A 至邊 a 之長為 w_a, 則

$$w_a=2\sqrt{bcs(s-a)}/(b+c).$$

(VIII) 命垂足三角形之三邊為 a', b', c', 則 $a'+b'+c'=\frac{2S}{R}=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$.
但 a', b', c' 中, 若有對原三角形之鈍角者,則其值為負.

3. 將所設有限直線 a 分於中末比,命其較大部分為 x, 則

(I) 內分時. $x=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$.

(II) 外分時. $x=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$.

4. 梯形 ABCD 中, 命平行邊 AB, CD 為 a, b; 他二邊 BC, DA 為 c, d, 則

$\mathrm{BD}=\sqrt{a(c^2-b^2)+b(a^2-d^2)}/\sqrt{(a-b)}$.

$\mathrm{AC}=\sqrt{a(d^2-b^2)+b(a^2-c^2)}/\sqrt{(a-b)}$.

5. 設圓之內接四邊形 ABCD 中,邊 AB, BC, CD, DA 分別表以 a, b, c, d, 對角線 AC, BD 分別表以 λ, μ, 則

$\lambda=\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)}/\sqrt{(ab+cd)}$.

$\mu=\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)}/\sqrt{(ad+bc)}$.

6. 直角三角形中,設二邊為 x, y, 斜邊為 z, 則 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

7. 半徑為 R 之圓中,其內接

(I) 正三角形之一邊$=\mathrm{R}\sqrt{3}$.

(II) 正方形之一邊$=\mathrm{R}\sqrt{2}$.

(III) 凸正五角形之一邊
$=\frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

(IV) 星形正五角形之一邊
$=\frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

(V) 凸正六角形之一邊$=\mathrm{R}$.

(VI) 凸正八角形之一邊$=\mathrm{R}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(VII) 星形正八角形之一邊
$=\mathrm{R}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

(VIII) 凸正十角形之一邊$=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\sqrt{5}-1)$.

(IX) 星形正十角形之一邊
$=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\sqrt{5}+1)$.

(X) 凸正十二角形之一邊
$=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\sqrt{3}-1)$.

(XI) 星形正十二角形之一邊
$=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\sqrt{3}+1)$.

(XII) 凸正十五角形之一邊
$=\frac{1}{4}\mathrm{R}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}$.

(XIII) 第一星形正十五角形之一邊
$=\frac{1}{4}\mathrm{R}\{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\}$.

(XIV) 第二星形正十五角形之一邊
$=\frac{1}{4}\mathrm{R}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}$.

$\sqrt{2}=1.4142135623$ $\log 2=0.3010300$

$\sqrt{3}=1.7320508075$ $\log 3=0.4771213$

$\sqrt{5}=2.236079774$ $\log 5=0.6989700$

8. 反之,設各邊為 a 之正多角形,其邊數如 7 中所示,則此多角形之外接圓,半徑 R 易由 7 求得之.

9. 設各邊為 a 之正多角形,其外接圓之半徑為 R, 內切圓之半徑為 r, 則 $\mathrm{R}^2-r^2=\frac{1}{4}a^2$. 故正多角形之邊數,若如 7 中所示,則由關係 7, 8 及上式,得從 R, r, a 中之任一量,以求得他二量. 例如以 r_n 表凸正 n 角形之內切圓半徑,而列記 r_n 與 a 及 R 間之關係如下:

(I) $r_3=\sqrt{3}a/6=\frac{1}{2}\mathrm{R}$.

(II) $r_4=a/2=\sqrt{2}\mathrm{R}/2$.

(III) $r_5=a\sqrt{25+10\sqrt{5}}/10$
$=R(1+\sqrt{5})/4.$

(IV) $r_6=a\sqrt{3}/2=R\sqrt{3}/2.$

(V) $r_8=a(\sqrt{2}+1)/2=R\sqrt{2+\sqrt{2}}/2.$

(VI) $r_{10}=a\sqrt{5+2\sqrt{5}}/2$
$=R\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4.$

....

10. 半徑爲 r 之圓中,設其內接及外切正 n 角形之各邊長 p, q, 又設其邊數爲二倍之內接及外切正 $2n$ 角形之各邊長 p', q', 則

(I) $p'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-p^2})}.$

(II) $q'=2pq/(p+q).$

(III) $p'=\sqrt{q'p}.$

依據公式 (II), (III), 計算圓之內接及外切正多角形之周,則得下表:

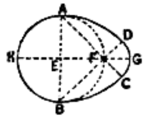
邊數	外切多角形之周圍	內接多角形之周圍
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

11. 圓周之長 $=2\pi r$. 但 r 爲圓之半徑.
$\pi=3.1415926535\ \ldots\ldots$

12. a 度之角所對之圓弧 $=\pi ra/180$.
a 直角所對之圓弧 $=\pi ra/2$.

13. 面積爲 a^2 之圓之半徑 $=a/\sqrt{\pi}$.

14. 卵形之周. 卵形之簡單者,如圖所示,



其作法如下. AFBH 爲中心 E 之圓,弧 AD, BC 分別以 B, A 爲中心, 弧 DGC 以 F 爲中心. 今設圓 AFBH 之半徑爲 r, 則周之長 $=\pi r\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

長度公式　立體之部

1. 設四面體 SABC 中,棱 SA, SB, SC, AB, BC, CA 分別爲 a', b', c', a, b, c, 由 S 所引之高爲 h, 三角形 ABC 之面積爲 T, 則

$$h=\sqrt{[\{16T^2c'^2-b^2(a^2+c'^2-b'^2)^2-a^2(b'^2-c'^2-a'^2)^2-(a^2+b^2-c^2)(a^2+c'^2-b'^2)(b^2+c'^2-a'^2)\}\div 16T^2]}.$$

2. 設正四面體中,各棱爲 a, 高爲 h, 則
$$h=a\sqrt{2}/\sqrt{3}.$$

3. 設直角體之三元爲 x, y, z, 對角線爲 u, 則
$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

4. 設立方體之各棱爲 a, 對角線爲 m, 則
$$m=a\sqrt{3}.$$

5. 設正八面體之各棱爲 a, 對角線爲 m, 則
$$m=a\sqrt{2}.$$

6. 設球之面積爲 a^2, 半徑爲 r, 則
$$r=a/(2\sqrt{\pi}).$$

面積公式　平面之部

以 S 表面積.

1. 直角三角形中,設二邊爲 a, b, 則
$$S=\tfrac{1}{2}ab.$$

2. 三角形中,設底為 a, 高為 h, 則

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

3. 三角形中,設三邊為 a, b, c, 則

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

又 $S=rs=abc/(4R)=(s-a)r_1$.

但 r 為內切圓半徑, R 為外接圓半徑, r_1 為對邊 a 之傍切圓半徑.

4. 設矩形之二邊為 a, b, 則 $S=ab$.

5. 設梯形之高為 h, 平行二邊為 a, b, 則

$$S=\frac{1}{2}h(a+b).$$

6. 設梯形之平行二邊為 a, b, 他二邊為 c, d, 則

$$S=(a+b)\sqrt{(s-a)(s-b)(s-b-c)(s-b-d)}/(a-b).$$ 但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

7. 設四邊形 ABCD 中,順次各邊之長為 a, b, c, d, 對角線 AC, BD 為 m, n, 則

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{\{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)\times(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)\}}.$$

8. 圓之內接四邊形中, 設四邊為 a, b, c, d, 則

$$S=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

9. 設圓之半徑為 r, 其外切多角形之周為 p, 則 $S=\frac{1}{2}pr$.

10. 設圓之半徑為 r, 則其內接

(I) 正三角形中, $S=3r^2\sqrt{3}/4$.

(II) 正方形中, $S=2r^2$.

(III) 凸正五角形中,

$$S=5r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}/8.$$

(IV) 凸正六角形中, $S=3r^2\sqrt{3}/2$.

(V) 凸正八角形中, $S=2r^2\sqrt{2}$.

(VI) 凸正十角形中,

$$S=\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(VII) 凸正十二角形中, $S=3r^2$.

11. 相似形之面積比例於其對應邊之平方.

12. 半徑 r 之圓中, $S=\pi r^2$.

13. a 度之角所對之扇形中,

$$S=\pi r^2a/360.$$

14. 設弓形弧之長為 l, 弦為 k, 矢為 h, 則弓形之面積

$$S=\{\tfrac{1}{4}k^2(l-k)+h^2(l+k)\}/(4h).$$

15. 卵形之面積$=\{\pi(3-\sqrt{2})-1\}r^2$.

16. 橢圓之面積$=\pi ab$. 但 a, b 為長短半徑.

17. 拋物線為弦所截取之面積為 $\frac{2}{3}ab$, 但 a 為弦, b 為此弦之徑.

面積公式　立體之部

1. 設角柱之直角截口之周為 a, 側稜為 h, 則　側面積 $S=ah$.

2. 設直角體之三元為 a, b, c, 則

面積 $S=2(ab+bc+ca)$.

3. 設正角錐底之周為 a, 斜高為 h, 則

側面積 $S=\frac{1}{2}ah$.

4. 設正角臺兩底之周為 a, b, 斜高為 h, 則　側面積 $S=\frac{1}{2}h(a+b)$.

又設距二底等遠之截口,其周為 a', 則

$$S=ha'.$$

5. 兩相似形之面積,比例於其對應稜之平方.

6. 設直圓柱底之半徑為 r, 母線為 h, 則

側面積 $S=2\pi rh$.

全面積 $S'=2\pi r(r+h)$.

7. 設直圓錐底之半徑為 r, 母線為 h, 則

側面積 $S=\pi rh$.

全面積 $S'=\pi r(r+h)$.

8. 設正圓臺底之半徑為 r, r', 斜高為 h, 則 側面積 $S=\pi(r+r')h$.

9. 半徑為 r 之球面積 $S=4\pi r^2$.

10. 半徑為 r 之球中,高為 h 之球帶側面積 $S=2\pi rh$.

11. 有 a 度角之月形面積 $S=$ 球面 $\times a/360$.

12. 半徑為 r 之球中,球面三角形之面積 $S=\pi r^2\times a/180$.

但 a 為此球面三角形之球面過剩.

13. [Guldin 或 Poppus 氏定理]. 一封閉平面曲線,以其平面上且不與其相交之直線為軸而迴轉,則其所生之面積,等於此曲線之全長,與其重心所作圓周之乘積.

體積公式

1. 設角柱之底面積為 S, 高為 h, 則

體積 $V=Sh$.

設直角截口之面積為 S′, 側棱為 l, 則

體積 $V=S'l$.

2. 三元為 a, b, c 之直角體中,

體積 $V=abc$.

3. 下底為 S 之斜三角柱中,設由上底之重心至下底之距離為 h, 則

體積 $V=Sh$.

4. 設斜角柱之直角截口為 S′, 兩底之重心距離為 l, 則

體積 $V=S'l$.

5. 設角錐之底為 S, 高為 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}Sh$.

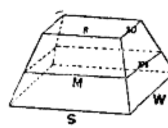
6. 設角臺之兩底為 B, B′, 高為 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}h(B+B'+\sqrt{BB'})$.

7. 若第二種角臺之兩底為 B, B′ 高為 h, 則 體積 $V=\frac{1}{3}h(B+B'-\sqrt{BB'})$.

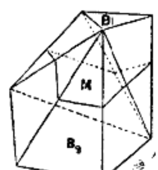
8. 設楔之背為 L, 闊為 b, 長為 l, 高為 h, 則 體積 $V=\frac{1}{6}bh(2L+l)$.

9. 設矩角臺之高為 h, 上底之二邊為 s, w, 下底之對應二邊為 S, W, 距上下兩底等遠截面之對應二邊為 M, m, 則



體積 $V=\frac{1}{6}h(Ws+ws+4Mm)$.

10. 設三角傍面臺之二底面積為 B_1, B_2, 中央之截面積為 M, 高為 h, 則



體積 $V=\frac{1}{6}h(B_1+4M+B_2)$.

11. 設四面體之對棱分別為 a, a'; b, b'; c, c'; 其中 a', b', c' 係由同頂點出發者, 則體積

$$V^2=\frac{1}{144}\{(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)a^2a'^2+(c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2)b^2b'^2+(a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2)c^2c'^2-(a^2b^2c^2+a^2b'^2c'^2+b^2c'^2a'^2+c^2a'^2b'^2)\}.$$

12. 以 a 表正多面體之一棱.

(1) 正四面體之體積 $V=\sqrt{2}a^3/12$.

(II) 正六面體即立方體之體積 $V=a^3$.

(III) 正八面體之體積 $V=\sqrt{2}a^3/3$.

(IV) 正十二面體之體積 $V=\frac{1}{4}a^3(15-7\times\sqrt{5})$.

(V) 正二十面體之體積 $V=\frac{5}{12}a^3(3+\times\sqrt{5})$.

13. 設圓柱之底及高爲 S 及 h, 則體積 $V=Sh$. 設底之半徑爲 r, 則 $V=\pi r^2h$.

14. 設圓錐之底及高爲 S 及 h, 則體積 $V=\frac{1}{3}Sh$. 設底之半徑爲 r, 則 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

15. 設圓臺之底及高爲 S, S′, 及 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})$.

若底之半徑分別爲 r, r', 則

體積 $V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+r'^2+rr')$.

16. 第二種圓臺中,設兩底之半徑分別爲 r, r', 高爲 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+r'^2-rr')$.

17. 設球之半徑爲 r, 則體積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

18. 半徑爲 r 之球中,設球狀楔有 a 度之角, 則

體積 $V=a\pi r^3/270$.

19. 半徑爲 r 之球中,球面三角錐之體積 $V=a\pi r^3/540$.

但 a 爲其底,即球面三角形之球面過剩.

20. 兩底之半徑爲 r', r'', 高爲 h 之球缺中,

$$\text{體積 } V=\pi\left(r'^2\frac{h}{2}+r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}h^3\right).$$

21. 僅有一底,且其半徑爲 r, 高爲 h 之球缺中,

$$\text{體積 } V=\pi\left(r^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}h^3\right).$$

22. [Guldin 或 Poppus 氏定理] 一封閉平面曲線,若以其平面上且不與其相交之一直線爲軸而迴轉時,其所生之體積等於其面積與其重心所作圓周之乘積.

23. 旋轉體　正多角形以其一邊爲軸而迴轉時,其所生體之體積如下表. 但 R 爲外接圓之半徑, c 爲一邊.

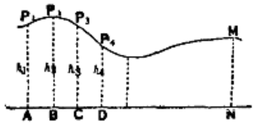
三角形 ………	$\frac{3}{4}\pi R^3\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\pi c^3$
四角形 ………	$2\pi R^3\sqrt{2}$	πc^3
五角形 ………	$\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$
六角形 ………	$\frac{9}{2}\pi R^3$	$\frac{9}{2}\pi c^3$
八角形 ………	$2\pi R^3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$2\pi c^3(3+2\sqrt{2})$
十角形 ………	$\frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{5}$	$\frac{5}{2}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$
十二角形 ………	$\frac{3}{2}\pi R^3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$3\pi c^3(7+4\sqrt{3})$

A. 弓形面積之近似數

圓之弓形中,設其弦爲 k, 矢爲 h, 則其面積之近似値　$S'=\frac{2}{3}hk$.

B. Simpson 氏近似法

Simpson 氏近似法, 乃求不規則曲線所圍面積之方法,其用至廣.



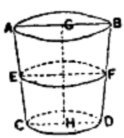
欲求曲線 P_1P_2……M 所圍之面積[圖所示者,可視作曲線之一部分],可適當採取直線 AN,而求 P_1ANM 之面積,將如是之許多面積相加,則得全曲線之面積. 將 AN 分成若干等部,由點 A, B, C, D,……引 AN 之垂線 AP_1, BP_2, CP_3,……,令交曲線於點 P_1, P_2, P_3,……. 又命 $AB=BC=CD=\cdots\cdots=x$, 命 $AP_1=h_1$, $EP_2=h_2$, $CP_3=h_3$,……, 則面積 $P_1ANM=P_1ABP_2+P_2BCP_3+P_2CDP_4+\cdots\cdots=\frac{1}{2}x(h_1+h_2)+\frac{1}{2}x(h_2+h_3)+\frac{1}{2}x(h_3+h_4)+\cdots\cdots=x\{\frac{1}{2}(h_1+h_n)+h_2+h_3+\cdots\cdots\cdots+h_{n-1}\}$. 由是得次之法則:

【法則】 兩外垂線和之半分,加中間諸垂線,乘其和以隣接二垂線間之距離[此距離對於各隣接垂線皆同].

C. 桶之容量

1. 造酒桶類之丈量法,完全以求截頭圓錐體積之公式爲基礎.

圖中 AB 曰口徑, CD 曰底徑, EF 曰胴徑, GH 曰深度. 又此桶在胴徑之上及下之兩部分,皆約略成截頭圓錐,故設 $AB=d$, $CD=d_1$, $EF=d_2$, $GH=h$, 則



$$桶之體積=\frac{\pi}{3}\times\frac{h}{2}\times\frac{d^2+dd_2+d_2^2}{4}$$

$$+\frac{\pi}{3}\times\frac{h}{2}\times\frac{d_1^2+d_1d_2+d_2^2}{4}$$

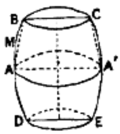
$$=\frac{h}{2}\{(d+d_2)^2+(d_2+d_1)^2-(d+d_1)d_2\}\frac{\pi}{12}.$$

由是得算法如下:

【算則】 命口徑胴徑和之二乘冪爲甲,胴徑底徑和之二乘冪爲乙,口徑底徑和與胴徑之乘積爲丙,由甲乙之和減丙,以深度之半分與 $\pi/12$ 之積乘所得差,卽得桶之體積,再依 1 升=27 立方寸計之,卽得容量.

2. 西式桶之體積之求法,亦以截頭圓錐之公式爲基礎.

圖中最大截面之直徑 AA′,設爲 2R,命其兩端之直徑 BC, DE 皆爲 $2r$, 高爲 h, 則桶之體積約等於截頭圓錐 AA′CB 之二倍,因此,其體積約爲 $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$……(1). 但此式係將 AMB 所生一小部分之體積棄去而得者,故較實際之體積略小. 若上之公式中, Rr 代以 R^2, 則得 $\frac{1}{3}\pi h\times(2R^2+r^2)$……(2). 由此公式所求得之體積,較實際之體積略大.



D. 正多角形

表 I 所示者,乃正多角形之一邊爲 1 時,表其半徑,邊心距,面積之數,表 II 所示者,乃正多角形之半徑爲 1,或邊心距爲 1,或面積爲 1 時,表其一邊之數.

多角形之邊數	I. 邊 $c=1$			II 依下列已知件而得之 c 值		
	半徑	邊心距	面積	半徑=1	邊心距=1	面積=1
3	0.577350	0.288675	0.433013	1.732050	3.464101	1.519671
4	0.707107	0.500000	1.000000	1.414214	2.000000	1.000000
5	0.850651	0.688191	1.720477	1.175570	1.453085	0.762387
6	1.000000	0.866025	2.598076	1.000000	1.154701	0.620403
7	1 152382	1.038261	3.633912	0.867767	0.963149	0.524581
8	1.306563	1.207107	3.828428	0.765367	0.828427	0.455090
9	1.461902	1.373739	6.181823	0.684040	0.727940	0.402200
10	1.618034	1.538842	7.694207	0.618034	0.649839	0.390511
11	1.774732	1.702844	9.365640	0.563465	0.587253	0.326762
12	1.931852	1.866025	11.196150	0.517638	0.535898	0.298858
15	2.404867	2.352315	17.642360	0.415823	0.425113	0.238079
18	2.879385	2.835641	25.520770	0.347296	0.352654	0.197949
20	3.196227	3.156876	31.568760	0.312869	0.316769	0.177980

但邊變時,半徑及邊心距以同比而變,面積從邊之平方而變. 例如欲作深 3 尺,容 36.75 立方尺之正八角柱器,則因底面積爲 $36.75\div3=12.25$ 平方尺,故由表 II, 知 $c^2:0.455090^2=12.25:1$, $\therefore\ c=1.592815$.

E. 圓周率

$$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\cdots\cdots$$

$\log\pi=0.4971499$, $\log\pi^2=0.9942997$, $\log\pi^3=1.4914496$, $\log\sqrt{\pi}=0.2485749$,

$\log\sqrt[3]{\pi}=0.165166$, $\log\frac{1}{\pi}=\bar{1}.5028501$, $\log\frac{1}{\pi^2}=\bar{1}.0057003$, $\log\frac{1}{\pi^3}=\bar{2}.5085504$,

$$\log\sqrt{\frac{1}{\pi}}=1.7514251,\quad \log\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}=\bar{1}.8342834.$$

π		π^2		π^3		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt[3]{\pi}$	
1	3.1415927	1	9.8696044	1	31.0062767	1	1.7724539	1	1.4645919
2	6.2831853	2	19.7392088	2	62.0125534	2	3.5449077	2	2.9291838
3	9.4247780	3	29.6088132	3	93.0188300	3	5.3173616	3	4.3937756
4	12.5663706	4	39.4784176	4	124.0251067	4	7.0898154	4	5.8583675
5	15.7079633	5	49.3480220	5	155.0313834	5	8.8622693	5	7.3229594
6	18.8495559	6	59.2176264	6	186.0376601	6	10.6347231	6	8.7875513
7	21.9911486	7	69.0872308	7	217.0439368	7	12.4071770	7	10.2521432
8	25.1327412	8	78.9568352	8	248.0502134	8	14.1796308	8	11.7167351
9	28.2743339	9	88.8264396	9	279.0564901	9	15.9520847	9	13.1813269

	$\frac{1}{\pi}$		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{1}{\pi^3}$		$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$
1	0.3183099	1	0.1013210	1	0.0322515	1	0.5641896	1	0.6827841
2	0.6366198	2	0.2026420	2	0.0645030	2	1.1283792	2	1.3655681
3	0.9549297	3	0.3039631	3	0.0967545	3	1.6925688	3	2.0483522
4	1.2732395	4	0.4052841	4	0.1290060	4	2.2567583	4	2.7311363
5	1.5915494	5	0.5066051	5	0.1612575	5	2.8209479	5	3.4139203
6	1.9098593	6	0.6079261	6	0.1935090	6	3.3851375	6	4.0967044
7	2.2281692	7	0.7092471	7	0.2257605	7	3.9493271	7	4.7794885
8	2.5464791	8	0.8105682	8	0.2580120	8	4.5135167	8	5.4622725
9	2.8647890	9	0.9118892	9	0.2902635	9	5.0777063	9	6.1450566

是等之表,在求圓及球之面積體積,及計算其逆問題時,有極大之幫助.

F. 弧　之　長

下表示半徑爲 1 之圓弧之長,至小數第十二位,先以度,分,秒,次以法度.

弧之長		弧之長		弧之長		弧之長	
1°	0.017453292520	1′	0.000290888209	1″	0.000004848137	gr 1	0.015707963268
2	0.034906585040	2	0.000581776417	2	0.000009696274	2	0.031415926536
3	0.052359877560	3	0.000872664626	3	0.000014544410	3	0.047123889804
4	0.069813170080	4	0.001163552835	4	0.000019392547	4	0.062831853072
5	0.087266462600	5	0.001454441043	5	0.000024240684	5	0.078539816340
6	0.104719755120	6	0.001745329252	6	0.000029088821	6	0.094247779608
7	0.122173047640	7	0.002036217461	7	0.000033936958	7	0.109955742876
8	0.139626340160	8	0.002327105669	8	0.000038785094	8	0.125663706144
9	0.157079632679	9	0.002617993878	9	0.000043633231	9	0.141371669412

弧之長		弧之長	
1°	0.0174532925199432957692369	1″	0.0000048481368110953599359
1′	0.0002908882086657215961539	1gr.	0.0157079632679489661923133

G. 弦及弓形

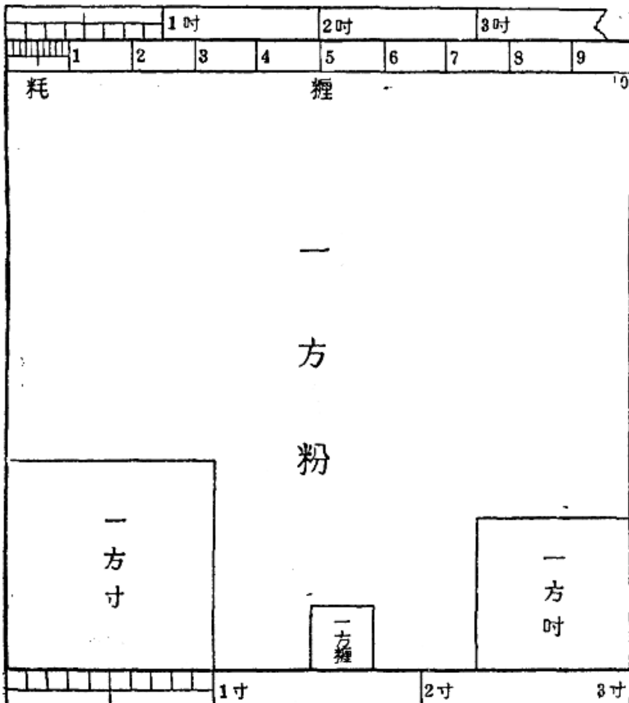
矢［由弧之中點至弦所引之垂線］長爲 1 時之弦長,弧長,弓形面積.

弦	弧	弓形	弦	弧	弓形	弦	弧	弓形
2.00	3.1416	1.5708	4.80	5.337	3.3085	8.50	8.810	5.7289
2.01	3.146	1.5764	4.90	5.427	3.3730	8.60	8.903	5.7947
2.02	3.152	1.5821	5.00	5.517	3.4377	8.70	9.003	5.8606
2.03	3.158	1.5879	5.10	5.608	3.5024	8.80	9.100	5.9266
2.04	3.164	1.5936	5.20	5.698	3.5672	8.90	9.196	5.9927
2.05	3.170	1.5993	5.30	5.789	3.6320	9.00	9.293	6.0587
2.06	3.176	1.6051	5.40	5.881	3.6969	9.10	9.390	6.1248
2.07	3.182	1.6108	5.50	5.973	3.7618	9.20	9.487	6.1909
2.08	3.187	1.6166	5.60	6.065	3.8269	9.30	9.584	6.2570
2.09	3.193	1.6224	5.70	6.157	3.8919	9.40	9.681	6.3230
2.10	3.199	1.6282	5.80	6.249	3.9571	9.50	9.778	6.3890
2.20	3.261	1.6863	5.90	6.342	4.0222	9.60	9.875	6.4551
2.30	3.324	1.7449	6.00	6.435	4.0874	9.70	9.972	6.5212
2.40	3.390	1.8041	6.10	6.528	4.1527	9.80	10.069	6.5873
2.50	3.458	1.8637	6.20	6.621	4.2182	9.90	10.167	6.6533
2.60	3.527	1.9238	6.30	6.715	4.2835	10.00	10.264	6.7194
2.70	3.599	1.9843	6.40	6.809	4.3489	10.10	10.362	6.7854
2.80	3.672	2.0452	6.50	6.903	4.4142	10.20	10.459	6.8515
2.90	3.746	2.1064	6.60	6.997	4.4797	10.30	10.557	6.9176
3.00	3.822	2.1679	6.70	7.091	4.5452	10.40	10.654	6.9837
3.10	3.899	2.2297	6.80	7.185	4.6107	10.50	10.752	7.0498
3.20	3.977	2.2917	6.90	7.280	4.6763	10.60	10.849	7.1160
3.30	4.056	2.3540	7.00	7.375	4.7420	10.70	10.947	7.1822
3.40	4.137	2.4165	7.10	7.470	4.8076	10.80	11.045	7.2484
3.50	4.218	2.4793	7.20	7.565	4.8732	10.90	11.143	7.3146
3.60	4.300	2.5422	7.30	7.660	4.9389	11.00	11.240	7.3809
3.70	4.383	2.6053	7.40	7.755	5.0047	11.10	11.338	7.4471
3.80	4.467	2.6686	7.50	7.850	5.0705	11.20	11.436	7.5133
3.90	4.551	2.7320	7.60	7.946	5.1363	11.30	11.534	7.5795
4.00	4.636	2.7956	7.70	8.042	5.2020	11.40	11.632	7.6457
4.10	4.722	2.8593	7.80	8.137	5.2678	11.50	11.730	7.7119
4.20	4.808	2.9231	7.90	8.233	5.3336	11.60	11.828	7.7781
4.30	4.895	2.9871	8.00	8.329	5.3994	11.70	11.926	7.8454
4.40	4.983	3.0512	8.10	8.425	5.4653	11.80	12.024	7.9117
4.50	5.071	3.1154	8.20	8.521	5.5312	11.90	12.122	7.9770
4.60	5.159	3.1796	8.30	8.617	5.5971	12.00	12.220	8.0433
4.70	5.248	3.2440	8.40	8.714	5.6630			

H. 正多面體

下表示正多面體之面數,及棱爲 1 時,表其面積及體積之數.

正多面體	面	面積	體積
正四面體…………	4個三角形	1.732051	0.117851
正六面體[立方體]	6個正方形	6.000000	1.000000
正八面體…………	8個三角形	3.464102	0.471404
正十二面體…………	12個五角形	20.645779	7.663119
正二十面體…………	20個三角形	8.660254	2.181695



索引例言

●本辭典以問題解法爲中心，翻檢之時，有待於簡便之索引，自屬必要．●但本辭典與他種辭典不同，帶有練習解題之性質，故第一門立體幾何學，始自初步問題，逐步遞進，由淺入深，以期單用本書，卽能進窺堂奧，而無事他求．●第二門爲平面幾何學之補遺，凡讀本書者，必須先熟知平面幾何學之全體；諸題皆爲之分門別類，以期便於檢索．●第三門第四門同第一門．●爲使用本辭典者便利計，注意於下列二事：●第一，所載各題，除至少數外，均各附圖，以檢索幾何學問題時，從圖形入手，實爲最妙之法也．●第二，另編索引，分册裝訂，不附於卷末，俾檢索之時，得便宜使用，而免上下翻頁之障礙．●第一門定理之部諸問題，從二方面類別之．一由於其定理之終結，如從 1 至 24 是，凡 81 雜題以外之一切定理，皆含於此中．一由於假設中之主要部分，如從 25 至 80 是．●一問題之終結，若含有許多事項，則依其事項之性質，分載於各處．●計算問題，依計算之目的物分類．●軌跡問題，依生軌跡之條件分類．●作圖題依欲作之目的物分類．●第二門定理之部，皆依假設之主要部分分類，其他同第一門．●第三門依本文之分節法分類，而假設中主要部分相同者，集於同處．●第四門定理之部，皆依其終結分類．●各門中難於分類之題，集爲雜題，而置於各部之終．●依終結分類之問題中，亦插入否定或疑問之定理，但皆載於其類之終．例如「平行」類中，載有「不平行」，「平行否」等問題．●角之相等大小之部，含二面角．●以比例式 AB:CD＝PQ:RS 等爲終結者，歸入「18. 成比例」之部中．●立體幾何學之問題，本書固不足以盡之，然合乎中等教育或稍高程度者，則皆臚列本書，毫無遺漏，是可自信者．

下　卷

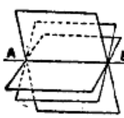
第一門　立體幾何解法之部

第一節

平面 垂線 斜線

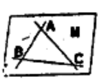
1. 過一任意定直線,得作無數平面.

解 過定直線 AB, 得作無數平面. 何則, 設任意取一平面, 在其上任意引一直線, 將此平面移動, 令所引直線與定直線 AB 相合, 以 AB 為軸, 將此平面旋轉, 於是在一切位置中所得之平面, 皆過直線 AB 故也.



2. 在以下各款中,得決定一平面. (I) 一直線與此線外之一點. (II)相交之二直線. (III)不在一直線上之三點 (IV) 平行之二直線.

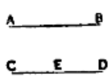
解 (I) 命 AB 為所設直線, C 為此直線外之一點; 求證直線 AB 與點 C 決定一平面. 過 AB 之平面有無數 [1 題], 取其任一, 以 AB 為軸而旋轉之, 令過點 C, 命此位置為 M, 於是 M 為過 AB 及 C 之平面. 次, 仍以 AB 為軸, 而依任意方向將此平面旋轉, 則旋轉之度雖至微, 而平面已不過 C 矣. 故過此直線與定點之平面唯一. 是以一直線與此線外之一點, 決定一平面.



(II) 設相交之二直線為 AB, AC; 求證 AB, AC 決定一平面. 命過直線 AC 上之任意點 C [點 A 以外者] 與直線 AB 之平面為 M. 於是因直線 AC 上之二點 A 與 C 在平面 M 上, 故直線 AC 在此平面上 [平面之定義]. 因此過直線 AB 與點 C 之平面含二直線 AB, AC. 故相交之二直線決定一平面 [本題 (I)].

(III) 設 A, B, C 為不在一直線上之三點; 求證 A, B, C 決定一平面. 今在此三點中, 聯結其任意二點 [例如 A, B], 則直線 AB 與點 C 所定之平面過三點 A, B, C. 故不在一直線上之三點, 決定一平面.

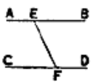
(IV) 設 AB, CD 為平行之二直線; 求證 AB, CD 決定一平面. 由平行直線之定義, 平行之二直線 AB, CD 必在同一平面上; 而過 AB, CD 之平面唯一. 何則, 過直線 AB, CD 之平面, 過 AB 及 CD 上之任



意點 E, 而一直線與此線外之一點決定一平面故也 [本題 (I)]. 故二平行直線決定一平面.

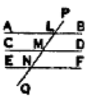
3. 二平行直線中,其一直線上之任意點與他直線上之任意點聯結而得之直線,在此平行直線所定之平面上

證 設 AB, CD 爲二平行直線, 其所定之平面爲 M [2 題]. AB 上之任意點 E 與 CD 上之任意點 F, 俱在平面 M 上. 故聯結此二點之直線 EF, 亦在平面 M 上 [平面之定義].



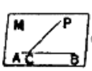
4. 設互相平行之諸直線與他一直線相交,則是等直線皆在一平面上.

證 設 AB, CD, EF,……爲互相平行且與他一直線 PQ 相交之直線. 此時是等直線皆在一平面上. 何則,命 PQ 與 AB, CD, EF,……之交點分別爲 L, M, N, …… . 因 AB, CD 平行, 故決定一平面 [2題]. 此時因 L, M 分別在直線 AB, CD 上,故又在 AB, CD 所定之平面上, 因而直線 PQ 亦在此平面上. 換言之, CD 在二直線 AB, PQ 所定之平面上. 同理, EF,……亦在 AB, PQ 所定之平面上. 故是等平行於 AB 而與 PQ 相交之直線,皆在 AB, PQ 所定之平面上.



5. 設一直線過一所設點,沿不過此點之定直線而移動, 則此直線成一平面.

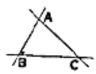
證 設 P 爲所設點, AB 爲不過 P 之定直線. 命點 P 與直線 AB 所決定之平面爲 M [2題]. 就過 P 與 AB 上之任意點 C 之直線 PC 考之,因 PC 上之二點 P, C 在平面 M 上,故 PC 亦在平面 M 上 [定義], 故過 P 而沿 AB 移動之直線, 皆在平面 M 上. 次, 平面 M 上過 P 之直線, 皆爲過 P 而沿 AB 移動之直線之某位置,此易知之. 是以適合條件之直線,成一平面.



注意 過 P 平行於 AB 之直線, 得視爲與 AB 在無窮遠處相交之直線.

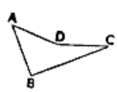
6. 兩兩相交於三點之三直線, 在一平面上.

證 設 AB, BC, CA 爲兩兩相交於三點 A, B, C 之三直線. 命三點 A, B, C 所定之平面爲 M [2 題], 則各直線上之二點皆在平面 M 上, 是以各直線亦皆在平面 M 上 [平面之定義].



7. 邊不在一平面內之四邊形, 可作得否?

解 取三任意點 A, B, C, 更取在此三點所定平面以外之點 D, 而聯結 ABCDA 作封閉折線. 於是因 D 不在平面 ABC 上, 故四邊形 ABCD 之邊不能在一平面上. 是以邊不在一平面上之四邊形,可作得之.

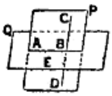


8. 平行四邊形及梯形,皆爲平面圖形.

證 設ABCD爲平行四邊形,則因 AB ∥ CD, 故聯結此各直線上之點所得之直線 BC, AD 俱在 AB, CD 所定之平面上 [3 題], 故平行四邊形 ABCD 之四邊在一平面上. 次, 設 ABCD 爲 AB ∥ CD 之梯形,則與前同理, BC, AD 在二平行線 AB, CD 所定之平面上. 故平行四邊形及梯形俱爲平面圖形.

9. 二平面之交界爲一直線.

證 設二平面 P, Q 相交, 求證其交界爲一直線. 因二平面相交, 在其交界上取一點A, 更在平面 P 上就平面 Q 之兩側, 取二點 C, D, 則因 C, D 在

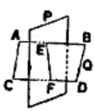


無限平面 Q 之異側, 故直線 CD 必與平面 Q 相交, 命其交點爲 B. 因二點 C, D 在平面 P 上, 故直線 CD 在平面 P 上 [平面之定義], 故 B 亦在平面 P 上. 於是二點 A, B 既在平面 P 又在平面 Q 上, 故直線 AB 爲二平面所公有. 又二平面所公有之點, 不能外於此直線 AB. 何則, 設此外尚有二平面所公有之點 E, 則因二平面 P, Q 公有直線 AB 及此線以外之點 E, 故兩平面必相合 [2 題], 而違反假設. 故兩平面 P, Q 之交界爲直線 AB.

註 若 CD 過點 A, 則可在平面 P 上, 取 CD 外之一點 D′ 而仿前論之.

10. 設二直線平行, 則與其一相交之平面, 又必與他一相交.

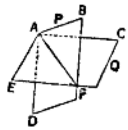
證 設 AB, CD 爲互相平行之二直線, P 爲與 AB 交於 E 之平面; 求證 P 又與 CD 相交. 因 AB, CD 平行, 故此二直線定一平面 [2 題], 命此平面爲 Q. 因 E 在 AB 上, 故又在平面 Q



上. 故二平面 P, Q 相交, 而其交界爲過 E 之直線 [9 題]. 命此交線爲 EF, 則因 EF 在平面 Q 上與 AB 相交, 故又與 AB 之平行線 CD 相交 [平 49 題]. 命此交點爲 F, 則 F 在直線 CD 及平面 P 上. 故 F 爲平面 P 與直線 CD 之交點.

11. 設由一點 A 發射若干直線, 過其中每二直線作一平面, 則所作諸平面中任何二者之交線皆過點 A.

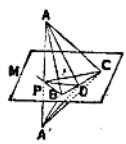
證 命由點 A 所引之直線爲 AB, AC, AD, AE,……. 設二直線 AB, AD 所定之平面爲 P; AC, AE 所定之平面爲 Q, 則因 A 在直線 AB 上, 故又在平面 P 上. 仿此, 因 A 在 AC 上, 故又在平面 Q 上. 故



A 爲二平面 P, Q 之公點. 是以此二平面之交線過點 A. 同理, 其他二任意直線所決定之平面與上述平面之交線亦皆過 A.

12. 若一直線直交他二直線於其交點, 則此直線垂直於後二直線所定之平面.

證 設二直線 PB, PC 之交點爲 P, 與此二直線直交於 P 之直線爲 AP; 求證 AP 垂直於 PB, PC 所定之平面 M. 在平面 M 上, 過 P 點引任意直線 PD, 又引任意直線



BDC, 命其與 PB, PD, PC 之交點分別爲 B, D, C. 次, 在 AP 之延線上取 A′, 令 A′P = AP. 將 A 及 A′ 各與 B, D, C 聯結, 則因 PB 爲 AA′ 之垂直二等分線, 故 BA = BA′, 同理, CA = CA′. 故 △ABC ≡ △A′BC [平 77 題]. 因此, 若以 BC 爲界, 而將三角形 ABC 折合於三角形 A′BC, 則 A 落於 A′, 而 D 不動, 故 AD 與 A′D 全合, 因而 AD = A′D, 故 DP ⊥ AA′ [平 94 題]. 故 AP 垂直於平面 M 上過 P 所引之一切直線, 因此 AP 垂