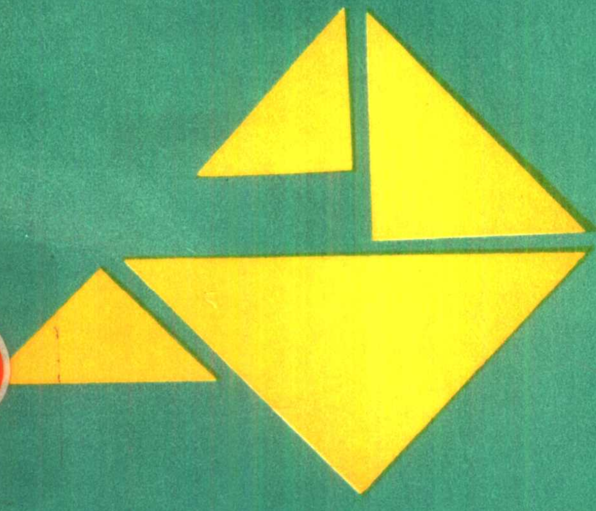
宋国栋 著

OR

·运筹学小丛书·

管理科学中的图论方法



·运筹学小丛书·

管理科学中的图论方法

宋国栋 著

辽 宁 教 育 出 版 社

1990年·沈阳·

管理科学中的图论方法

宋国栋 著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：72,000　开本：787×1092 1/32　印张：$3\frac{1}{2}$
印数：1,409—2,409
1987年12月第1版　1990年10月第2次印刷

责任编辑：杨　力　责任校对：理　力
封面设计：周晓风　插　图：夏兰兰

ISBN 7-5382-0252-8/G·211　定价：1.53元

出版说明

运筹学是二十世纪四十年代开始形成的一门学科，是现代数学的一个重要组成部分。在科学技术迅速发展的今天，运筹学有着广泛的应用。

为了向广大读者普及运筹学知识，在中国运筹学会的关心和支持下，尤其是在徐利治教授的积极倡导和组织下，编辑出版了这套《运筹学小丛书》。

这套丛书用通俗的语言，系统地介绍了运筹学中各个分支的基础知识和应用方法，其中包括规划论、对策论、排队论等方面的二十多个专题。在编写内容上，注重科学性、知识性和趣味性相结合，论述一般先从实例谈起，由浅入深，引出完整的数学理论。并且，大部分内容的引出方法都是初等的，因此，凡是具有高中以上文化程度的读者，都可以阅读。

目　　录

§1 图是管理科学中的一个得力工具

在一个管理系统中，人们常常处理许多事物的关系。如果我们只关心这种关系，而不关心这些关系的具体内容，我们就可以忽略对我们的考虑来说是非本质的内容，而把事物抽象为点，关系抽象为线，从而一个复杂的事物关系的情况，被表达成为一个“线条图”。例如，一公司下属五个独立的，互相没有业务往来的分厂。他们的关系就可以用下面的线条图表达（见图1）：

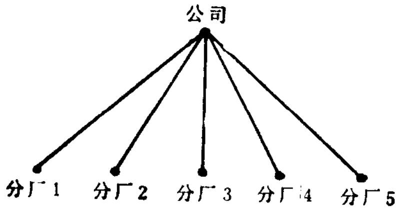


图1　公司与分厂关系图

上面的线条图说明了各分厂的独立关系。即，每个厂与另一个厂的关系都是通过公司联系起来的；而公司与每个厂都有联系。再如在地图上，把城市或村庄连起来的不同颜色的线条代表着公路或铁路，大小不同的圈点代表着城镇与村庄。如果我们关心的只是交通道路的连接情况，或者说关心的只

是它们的连接结构，而不关心这些道路是公路还是铁路，也不关心这些地点是城市或村庄，这时地图上的交通图就成了只由“点”与“线”构成的线条图了。这种线条图就是我们要研究的图。研究这种图的一般理论就是图论。

现代科学技术的发展，为各种新兴学科的应用，开辟了广阔的道路。图论的理论与方法已成为当代许多学科，例如物理学、化学、控制论、计算机科学、运筹学等的工具，特别是管理科学里常用的得力工具。正是图论在这些领域里的广泛应用，促进了图论本身在近些年来的飞速发展。

图论的一些思想，起源很早。早在1736年大数学家欧拉解决所谓“七桥问题”时，就产生了图的思想。当时，在东普鲁士的肯尼希堡城（即现在的加里宁格勒）的普雷格尔河的分岔处，有一个奈发夫岛。小岛与岸间有七座桥（见图 2 ）。据

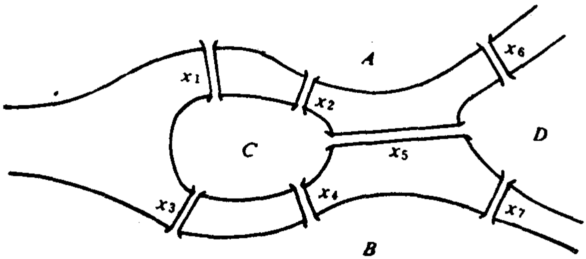


图 2　普雷格尔河上的七座桥

说当年沿河居民非常感兴趣的一个问题是：能否找到一个散步的途径，使散步人走过每座桥一次且仅一次再回到原处？大数学家欧拉得知这个问题以后，经过研究得出了否定的结

论。他的论文“肯尼希堡的七座桥”，被认为是图论的第一篇论文。他用点代表岛及陆地，用线代表桥，于是把岛、陆地与桥的关系用图 3 代表，把这一问题抽象为一个“一笔画”问题。他证明的结论是：一个图存在从某点出发通过每条线一次且仅一次再返到出发点的路线的充分且必要的条件是这个图中每个点所连接的线的条数都是偶数。由于七桥图中每个点所连接的线的条数都不是偶数，因此在普雷格尔河的七座桥上永远也找不到上面所要求的路线。

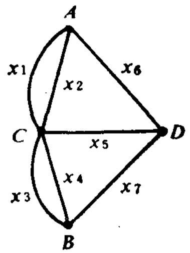


图 3　欧拉七桥图

下面，我们介绍图的概念及例子。

在图论里常用集合的概念来描述一个图，常把图中所有的点看成是一个集合 V，又把所有的线看成是一个集合 E，分别称为点集与线集。例如，用 x_1，x_2，…，x_7 表示上面的七座桥，于是 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_7\}$；用 A，B，D 与 C 代表陆地与岛，于是 $V=\{A, B, C, D\}$。 每个图都包括这两种对象：一种是点（又称为顶点或结点），一种是线（又称为弧或边）。

我们定义，一个图就是由

（1）点的集合 V，

（2）线的集合 E，

（3）点与线的连接关系 ψ，

所构成的（有序三元组）数学模型，记为 $G=(V, E, \psi)$。

有时点与线的连接关系 ψ 可以隐含在 E 的各线的表达方式里，例如指出图 3 中的线 x_1 是连接在岸 A 与岛 C 之间，这时图 G 可简记为 $G=(V, E)$。由于我们只由（1）～（3）决定一个图，即只关心点、线和它们的连接关系，所以图 4 中的 (a)～(f) 虽然画得形象不一样，但实质却是代表同一个图。我们把它们称为是同构的。

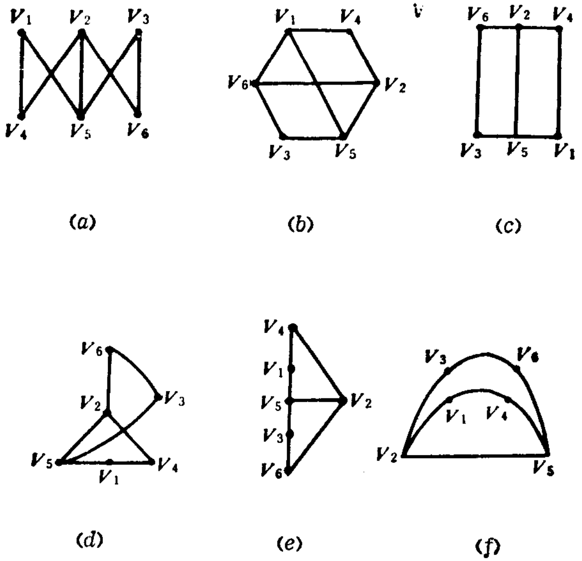


图 4　同构的图

下面再举一些图的例子，以使读者对图有进一步地直观地理解。

例 1　检修某机床的工序流程图如下：

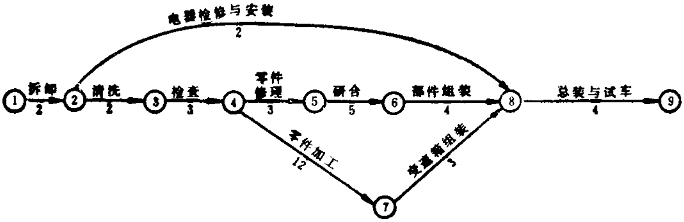


图 5　机床检修工序流程图

在图 5 中，用点代表各个工序开始或结束事件，用弧代表各个工序的工作，弧上的数字（称为弧的权）代表本工序所用的时间。

例 2　油田的输油、输气管路或者油、水循环管路构成的管网，如果把所有的管路看成是线，把分岔的地方看成是点，这样一个管路网构成一个图。类似这样的例子还有通讯网、供电网、计算机网等。

例 3　运输网络

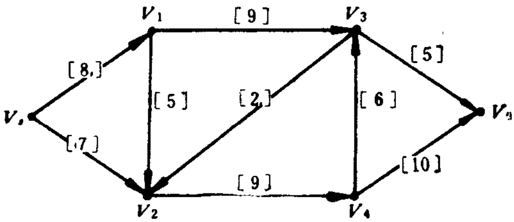


图 6　运输网络图

在图 6 中，点代表车站，弧代表交通线路，方括号中的数字是弧的权，代表在这条交通线上单位时间内容许通过货

物的最大容量。V_s 代表发货站，V_t 代表收货站，其它点为中间站。

例 4　在化学中，分子的结构可以用分子图代表。例如乙烯分子可用图 7 表达。在图 7 中，点代表组成乙烯分子的两种原子，边代表化学键。

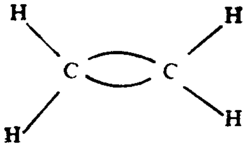


图 7　乙烯的分子图

例 5　人机匹配图

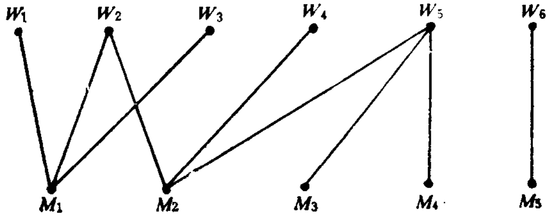


图 8　人一机匹配图

图 8 中，点 W_1，…，W_6 代表工人，点 M_1，…，M_5 代表机器；边代表某位工人可以胜任某台（或某几台）的操作工作。

在上述各图中，有的图在线上有标示方向的箭头，有的则没有。对于标有方向的图，称为有向图。例如图 5 、图 6 是有向图。而图 1 、图 3 、图 7 与图 8 都没有标示方向，我们称它们为无向图。

若 A、B 是图中的有向线 $A \to B$ 的两个端点，则有向线

$A \to B$ 记为 $(A,\ B)$，称为弧．$A,\ B$ 分别称为$(A,\ B)$的起点与终点．无向图中以 A、B为端点的线记为 $[A,\ B]$，称为边．边与弧统称为线．对于边有 $[A,\ B]=[B,\ A]$，对于弧 $(A,\ B)$不能改写为 $(B,\ A)$，因为 $(A,\ B)\neq(B,\ A)$．被一条线连接的两个点称为是相邻的点；与一个点连接的两条（或几条）线称为是相邻的线．设图G中有 n 个点构成一个点的序列 $V_1V_2V_3\cdots V_n$，如果序列中的相邻的两个点在G中也都是相邻的，则称上述点列决定的一串边是图G的一条道路．如不论道路中各点是否重复，各边都是相异的，则称所构成的道路是图 G的路，并记为 $\mu=[V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n]$．其中 $V_1(V_n)$ 称为路 μ 的起（终）点．有时上述路也简记为 $\mu=[1,\ 2,\ \cdots,\ n]$．如果 G 是有向图．μ 构成G的一条道路（或路），μ 中的各弧都是从V_1到V_n首尾相接的，这时称 μ是有向图G中的有向道路（或有向路），记为 $\mu=(V_1,V_2,\cdots,V_n)$．例如，图 8 中$W_1M_1W_2M_2W_5M_4$构成一条路．图 3 中是 $Dx_6Ax_1Cx_3Bx_4Cx_2Ax_6Dx_7B$ 是一条道路，而不是一条路．图 6 中 $V_sV_2V_4V_3V_2V_4V_t$ 是一条有向道路，$V_sV_2V_4V_3V_t$ 是图中的一条有向路．起点与终点重合的路（或道路）称为圈（或闭道路）．

我们常将图做如下分类：

（1）一个图G，如果它的任二相异点总存在连接它们的路，则称G是连通的，否则称G是不连通的．不连通的图可分成几个连通的部分，每一部分称为图的一个分支．例如，图1、3、4、5、6都是连通图，图8是有两个分支的不连通图．

（2）连通且无圈的图称为树。例如，图1是树；而图8（不连通）与图3、4等都不是树（因为有圈）。

（3）如果一个图G可能画在平面上，而使其任意两边除点外都不再相交，则称这样的图 G 是平面图。例如图4(a)～(f)都是平面图（因为(d)与(b)可能画成(a)）。否则称为非平面图。例如，图9中 K_1、K_2是两个著名的非平面图。

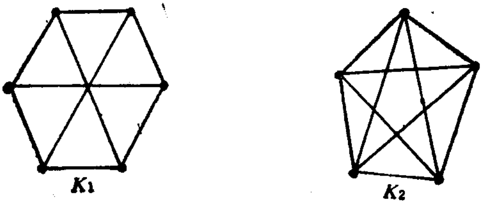


图9　非平面的库拉图斯基图

（4）如图中二相邻点间最多有p 条$(p>1)$ 边，则称此图为p—重图。例如，图3及图7都是一个2—重图。

（5）如果对图的每条线规定一个数（根据实际问题的需要，这个数可能有不同的意义），则这个图称为赋权图，并把各条线上规定的数称为该线上的权。例如，图5与图6都是赋权图〔注〕。

〔注〕 图论的有关概念及更进一步的内容可参看：J.A.邦迪、U.S.R.默蒂著《图论及其应用》，中译本，科学出版社版，1984。

§2 中国邮路问题与一笔画

管理中或技术中经常遇到的线路巡检员最佳巡回路线问题，自动巡回检测仪表检测路线选择问题，自动仓库货物查询路线问题，……。这些问题都可以形象地描述为下述问题：

一个邮递员从邮局出发，为投递信件走遍他负责的所有街道，最后返回邮局，那么他应按怎样的路线走，能使总的路程最短呢？

在1960年，我国数学家管梅谷同志给这个问题建立了数学模型，做了大量地研究工作[注]．他的工作引起了国内外的注意，国外称此问题为“中国邮路问题”．这是图论领域中第一个被国外学者用中国命名的问题．我们先介绍这个问题的一种特殊情况，即一笔画问题．

（一）一笔画问题

先看下面两个例子．

例 1　假设街道如图10，每条街都是一公里长．其中 V_1 是邮局的位置．邮递员选了下面两条闭道路做为他的送信路线：

L_1: $V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3 \to V_2 \to V_5 \to V_6 \to V_1$;

〔注〕见管梅谷《奇偶点图上作业法》，数学学报，V.10，1960，263～266．

L_2: $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_6 \to V_1$.

邮递员按 L_1 送信时走的路程为 8 公里，而按 L_2 为10公里. 可见路线不同，所走路程可以不同，那么送信路线如何选择呢？

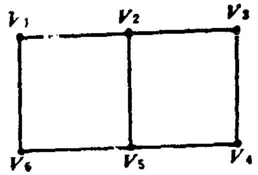


图10

例 2　设街道图为图11，邮局还在 V_1 处. 每条街上的数字是该边上的权，代表走过这条街需要的时间. 邮递员选了下面四条圈做为他的送信路线：

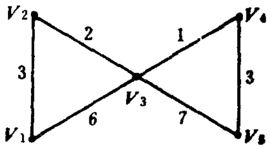


图11

L_1: $V_1 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_3 \to V_2 \to V_1$;

L_2: $V_1 \to V_3 \to V_5 \to V_4 \to V_3 \to V_2 \to V_1$;

L_3: $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_5 \to V_4 \to V_3 \to V_1$;

L_4: $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_3 \to V_1$.

这四条路线都是经过每条边一次且仅一次，因此经过它们需要的时间和都是 $3+2+1+3+7+6=22$. 在例 1 中的送信路线里，L_1 有〔V_2，V_5〕重复一次，L_2 有〔V_2，V_3〕，〔V_3，V_4〕，〔V_4，V_5〕各重复一次. 在例 2 中的送信路线 L_1～L_4 里，各边都路过一次且仅一次. 现在我们把上述问题抽象成图论模型如下：

定义 1　设图 G 为无向连通图，对于 G 的每个边〔V，W〕，都有一个权 l〔V，W〕$\geqslant 0$，称为边〔V，W〕的长度，要在 G 中找一个闭道路 C 并满足：

（1）C 包括 G 的每一条边至少一次；

（2）使C的各边长的和（称为C的长度，记为$l[C]$）最小。

这样的闭道路称为最优邮路，G中只满足（1）的闭道路称为邮路。寻找最优邮路的问题称为中国邮路问题[注]。

中国邮路问题中，条件（1）要求图的每条边在C中至少出现一次。可以想象，如果在图中能找到一个圈，使每条边在该圈中恰好出现一次，那么这样的圈一定是最短邮路。如果图G中的圈C包含G的每条边一次且仅一次，则圈C称为G的欧拉圈。如果G有一个欧拉圈，则沿着该圈只一笔就可以将G画出来，所以有欧拉圈的图称为一笔画，或称欧拉图。例如，图9的K_2与图11都是一笔画，图3、图10等都不是一笔画。

下面我们研究如何判断一个图是一笔画。先介绍我们将用到的几个图论术语。

图G中与点A连接的线的集合记为U_A，称为点A的线（边或弧）集。U_A的元素个数记为$|U_A|$，称为点A的度或次数。$|U_A|$为奇（偶）数，则称A为奇（偶）次点。例如图10中V_2、V_5是奇次（三次）点，图11中V_3是偶次（四次）点。对于有向图，以点A为起（终）点的弧的集合，记为U_A^+（U_A^-），称为A的出（入）弧集。$|U_A^+|$（或$-|U_A^-|$）称为点A的出（入）次数，是正（负）数。

〔注〕中国邮路问题仍被继续研究着，见E. Minieka, The Chinese Postman Problem for Mixed Networks, Manag. Sci., V. 25, 1979, 643～648.

对于无向图，有如下定理：

定理1 （握手定理） 一个图的各点的次数和是边数的二倍[注]。

证明 设图G的边数为q，用数学归纳法证明这个定理。当 $q=1$ 时，次数的和为2，显然定理成立。假设 $q>1$ 时这个定理成立，即这时次数和为$2q$。现在考虑边数为$q+1$的情况。因为增加一条边时，必有两个点的次数各增加1，次数和共增加2。这时次数和为 $2q+2=2(q+1)$。 也就是定理对 $q+1$ 也是成立的。 □

推论1 任何图的各点次数和是偶数。

推论2 图的奇次点的个数是偶数。

定理2 （欧拉定理） 连通图G是一笔画（欧拉图）的充要条件是G中只含偶次点。

证明： （1）必要性。

若G存在一条欧拉圈，设A是此欧拉圈C的任意一点。因为每经过A一次必用到与A连接的两个边，所以不论C经过A多少次，用到A的边数总是偶数。由于C包含A的所有边一次且仅一次，因此A的次数（即与A连接的边的个数）一定是偶数。

（2）充分性。

若G的每个点都是偶次点，则G必存在欧拉圈C，这个C我们可按下述方法构造出来。

〔注〕 因为此定理表示任何一次集会中，握过的手总是偶数，所以有的著作中称此定理为握手定理。