23

O21
G26

工科高等学校教学用书

新编概率论与数理统计

主 编 高雷阜 李 伟
编 者 石素英 彭晓华

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编概率论与数理统计/高雷阜,李伟主编.—沈阳:东北大学出版社,2000.12(2002.5 重印)

ISBN 7-81054-575-2

Ⅰ.新… Ⅱ.①高… ②李… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 73305 号

出 版 者:东北大学出版社

(邮编:110004 地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)

出 版 人:李毓兴

印 刷 者:铁岭市新华印刷厂

发 行 者:东北大学出版社

开　　本:850mm×1168mm 1/32

字　　数:286 千字

印　　张:11

出版时间:2000 年 12 月第 1 版

印刷时间:2002 年 5 月第 2 次印刷

责任编辑:郭爱民　　责任校对:冯 伟

封面设计:唐敏智　　责任出版:杨华宁

定　　价:15.00 元

垂询电话:024—83687331(发行部)　024—83680265(传 真)

E-mail:neuph@neupress.com

http://www.neupress.com

前言

本书是根据原国家教委 1995 年修订的工科高等学校本科生《概率论与数理统计》课程的教学基本要求，并参考了 2001 年工科硕士研究生入学考试大纲编写而成的。全书内容分为两大部分：前五章为概率论部分，后五章为数理统计部分。本书可作为工科高等学校本科生的教学用书，也可供科研设计部门的工程技术人员参考。

随着高等学校教学改革的不断深入，教材改革也势在必行。为了适应新形势的需要，本书在严格按照教学大纲的基本要求确定编写内容的前提下，适当地增加了实际应用方面的内容，以提高学生的应用能力。

本书共分10章内容，编写分工如下：第1～4章由高雷阜执笔；第5章由彭晓华执笔；第6，7，10章由李伟执笔；第8，9章由石素英执笔。概率论部分由高雷阜统稿，数理统计部分由李伟统稿。

辽宁工程技术大学郭嗣琮教授、盖如栋教授在百忙之中拨冗审阅了本书的全部书稿，并提出了许多宝贵的意见和建议。汪军、曾冰、吕明海同志为本书的誊稿做了大量工作。这里，谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，虽几经易稿，仍难免有疏漏之处，诚望各位专家和广大读者不吝赐教，批评指正。

编著者

2000年9月

目 录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究客观现象统计规律性的数学学科. 在大量同类客观现象中，就个别现象而言，其结果是不肯定的，但从整个集体现象来说，却遵从一定的规律，这种规律性叫做统计规律性. 概率论与数理统计的任务，就在于透过大量表面的偶然性发现内部隐藏着的规律，通过随机性去认识决定性，通过偶然性去认识必然性. 随机性和决定性、偶然性和必然性的矛盾，是概率论与数理统计研究的主要矛盾.

赌博现象有一种独特的性质曾引起了概率论学者的研究：它的不肯定性使得人们在一次特定的赌博中不能预测结果，但若多次进行下去，情形就不同了，人们可以预测平均赢利，可以谈论两种赌注中哪一种更为有利. 其他许多现象也具有同样性质，例如某地区种植某种庄稼的收成，大规模生产中废品的件数，某种零件的寿命等，这些现象在单独一次观测中其结果是不能预测的，但经多次重复观测或实验后，就会呈现某种规律性，概率论的研究目的就在于构造这类随机现象的数学模型. 为了构造这种模型，必须列出一切可能的结果来精确地描述一个试验，例如掷一枚硬币，人们关心的是它落下时出现"正面"还是"反面"，当然用不着去考虑那些偶发事件(如硬币侧立，或者掉入洞里等). 又如掷一颗骰子，有六种可能的结果，可以用朝上那一面的点数来表示，试验的结果称为"事件"，在掷一颗骰子时，人们还可以按出现奇数点或偶数点来打赌，"出现偶数点"这一事件可以以三种不同的方式发生(即出现 2 点、4 点或 6 点)，但"出现 2 点"这一事件却只能以一种方式发生. 通常把前者称为**复合事件**，后者称为**简单事件(或基本事件)**. 假设掷一颗骰子 n 次，而出现 6 点的情况有 m 次，那么，就称 m/n 为 n 次试验中"出现 6 点"这一事件

的相对频率. 再假定骰子是均匀的, 将会看到当 n 很大时, m/n 接近 1/6. 所谓的统计规律性就表现在这种相对频率的稳定性中, 所构造的数学模型应当反映事件的这种性质. 因此, 对每个事件指定的一个数, 作为相对频率的理想化数字(稳定值), 称为这个事件的**概率**.

1.1 样本空间与随机事件

1.1.1 样本空间

研究随机现象, 总是要进行观察、测量或做各种科学试验. 为了叙述方便起见, 将这一切活动统称为试验.

一个试验, 若满足下述条件:

① 试验可以在相同条件下重复地进行;

② 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

就称其为**随机试验**, 简称试验, 以字母 E 表示.

如掷硬币的试验, 可以在相同条件下重复进行, 试验的可能结果有两个, 即"正面"和"反面", 每次试验结果必出现其中之一, 但投掷之前不可能预言出现正面还是反面.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

一般通过研究随机试验来研究随机现象. 对于随机试验, 尽管在每次试验之前不能预知试验的结果, 但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 通常将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**, 记为 S; 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为**样本点**, 记为 W.

【例 1.1】 随机试验 E_1:将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_1 的样本空间 S_1: $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

【例 1.2】　随机试验 E_2:将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数.

E_2 的样本空间 S_2: $\{0,1,2,3\}$

【例 1.3】　随机试验 E_3:记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

E_3 的样本空间 S_3: $\{0,1,2,3,\cdots\}$

【例 1.4】　随机试验 E_4:在一批灯泡中任意抽取一次，测试它的寿命.

E_4 的样本空间 S_4: $\{t \mid t \geqslant 0\}$

【例 1.5】　随机试验 E_5:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

E_5 的样本空间 S_5: $\{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$,这里，$x$ 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

【例 1.6】　随机试验 E_6:一尺之棰，折成三段，观察其长度.

E_6 的样本空间 S_6: $\{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1\}$

用 x, y 分别表示折成的第一段和第二段的长度，则第三段的长度为 $1 - x - y$，且各段长度都必须大于 0 小于 1.

应该特别注意的是：样本空间的元素是由试验目的所确定的，例如，在 E_1 和 E_2 中同是将一枚硬币连抛三次，由于试验目的不同，其样本空间也不一样.

1.1.2　随机事件

实际进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯泡的寿命(h)小于500为

次品，则在 E_4 中人们关心灯泡的寿命是否有 $t \geqslant 500$，满足这一条件的样本点组成 S_4 的一个子集：$A = \{t \mid t \geqslant 500\}$. 称 A 为试验 E_4 的一个随机事件，显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 500$.

一般地，称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有 8 个基本事件 $\{HHH\}, \{HHT\}, \cdots, \{TTT\}$；试验 E_2 有 4 个基本事件 $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**；空集不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

【例 1.7】 在 E_1 中，事件 A_1："三枚硬币出现同一面"，即

$$A_1 = \{HHH, TTT\}$$

事件 A_2："恰有两枚硬币出现同一面"，即

$$A_2 = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$$

事件 A_3："至少两枚硬币出现正面"，即

$$A_3 = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

事件 A_4："恰有两枚硬币出现正面"，即

$$A_4 = \{HHT, HTH, THH\}$$

在 E_4 中，事件 A_5："寿命小于 1000h"，即

$$A_5 = \{t \mid 0 \leqslant t < 1000\}$$

在 E_5 中，事件 A_6："最高温度与最低温度相差 10℃"，即

$$A_6 = \{(x, y) \mid y - x = 10, T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$$

1.1.3 事件的关系和运算

事件既然是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然

可以按照集合论中集合之间的关系和集合运算相应处理，下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A, B, A_k(k = 1,2, \cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 事件的包含与相等

若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A，此时，事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件的和

事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，当且仅当 A, B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

(3) 事件的积

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的积事件，当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生，$A \cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(4) 事件的差

事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当 A 发生，B 不发生时，事件 $A - B$ 发生.

(5) 互不相容事件

若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或称互斥的. 即事件 A 与事件 B 不能同时发生，基本事件是两两互不相容的.

(6) 对立事件

若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，又称事件 A 与事件 B 互为逆事件．这指的是对每次试验而言，事件 A，B 中必有一个发生，且仅有一个发生．A 的对立事件记为 $\overline{A}$，且 $\overline{A} = S - A$．

用图 1.1 ~ 1.6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算，如图 **1.1** 中正方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A．又在如图 1.2 中正方形表示样本空间 S，圆 A 与 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A \cup B$．

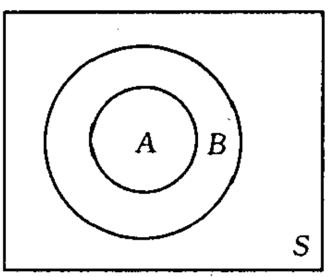

图 1.1

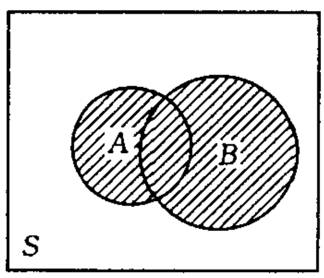

图 1.2

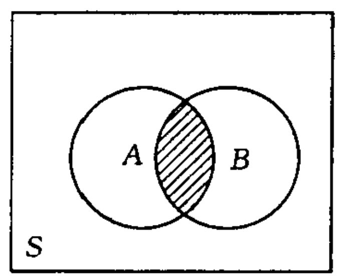

图 1.3

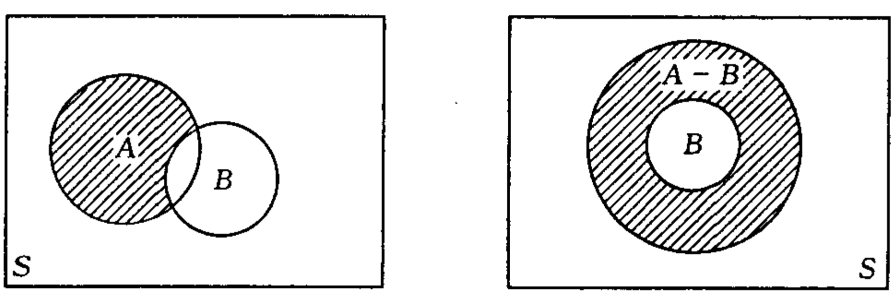

图 1.4

进行事件运算时，经常要用到下述定律，设 A，B，C 为事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

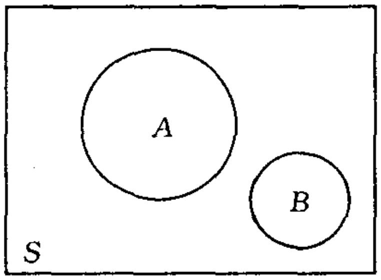

图 1.5

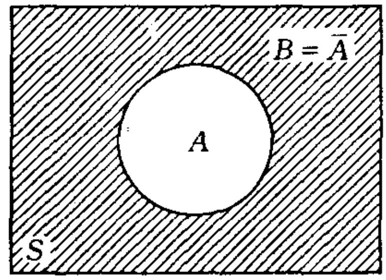

图 1.6

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

德 · 摩根(De Morgan) 定律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.2　古典概率

一般地说，一个事件在一次试验中发生的可能性有大有小，而人们经常探究的恰恰是某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大.

为了研究事件发生的可能性，需要用一个数字来描述这种可能性的大小，且将衡量这种可能性大小的数值叫做**事件的概率**. 事件 $A, B, C, \cdots$ 的概率分别用 $P(A), P(B), P(C), \cdots$ 表示. 由此可知，概率是随机事件的函数.

对于一个给定的事件 A，概率 $P(A)$ 到底是一个什么数?怎样求?本节先对一种最简单的情况加以讨论.

1.2.1　古典概率定义

先看一个简单例子：投掷一枚均匀的硬币，考虑出现正面和出现反面这两个事件的概率.

由于硬币是均匀的，因而出现正面和出现反面的可能性是一