实变函数论的典型问题与方法

张喜堂　主编

张喜堂　余东华　方育坤　编写

华中师范大学出版社

2000年·武汉

（鄂）新登字 11 号

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论的典型问题与方法/张喜堂主编．
—武汉：华中师范大学出版社，2002.4

ISBN 7-5622-2209-6/O・125

Ⅰ．实…　Ⅱ．张…　Ⅲ．实变函数论　Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 08672 号

实变函数论的典型问题与方法

© 张喜堂　主编

华中师范大学出版社出版发行

（武昌桂子山　邮编：430079　电话：027—87876240）

新华书店湖北发行所经销　　华中师范大学印刷厂印刷

责任编辑：张小新　　封面设计：罗明波

责任校对：张　钟　　督　　印：方汉江

开本：850mm×1168mm　1/32　　印张：13.375　字数 351 千字

版次：2000 年 5 月第 1 版　　2002 年 4 月第 3 次印刷

印数：4001－7000　　定价：20.00 元

前　言

《实变函数论》是大学数学课中理论性较强的一门基础课．在教学实践中我们注意到，学生学习和掌握教材的基本内容困难并不大，但要运用所学的知识去分析问题和解决问题就感到困难，对于难度稍大一些的题目甚至不知如何下手．为配合学生对该课程的学习，培养学生分析问题和解决问题的能力，我们编写了本书．

本书遵循现行《实变函数论》教材的顺序，对实变函数论的题目进行了比较筛选；对全国部分高校硕士研究生入学试题中的一些实变函数试题进行整理，确定出许多有较强典型性、启发性和综合性的题目．此外，在重点解答每个题目的同时，比较注重分析解题的思想和解题方法，使读者读来自然，学后能用．

全书以解题为中心，每章在“**内容提要**”中，对本章的要点、定义、定理、性质进行概括性阐述，然后在“**问题解答**”中，由浅到深地安排了一批又一批不同层次的例题，对具体的方法和技巧进行一步一步地分析讲解，并尽可能地与《实变函数论》教材中的重要概念和定理联系起来．这样有助于读者较好地把握住教材的难点和重点，使不同层次的读者从中找到自己所需要的东西．

本书由华中师范大学数学系副教授张喜堂主编，参加编写的有张喜堂（编写第一章，第二章），余东华（编写第三章，第四

章），方育坤（编写第五章，第六章），全书由张喜堂统稿，张喜堂还参加了第三章和第五章的部分编写工作.

由于编者水平有限，书中难免会有缺点和错误，有些题目的解法也不一定是最好，恳请读者和从事这一课程教学的教师不吝赐教.

编者于华中师范大学数学系

2000 年 4 月

目　　录

第一章　集合的一般理论

内 容 提 要

一、集合的概念及其运算

集合用大写字母 $A,B,X,E,\cdots$ 表示，而集的元素常用小写字母 $a,b,x,e,\cdots$ 表示.

当 x 是集 A 的元素时，记为 $x\in A$，否则，记为 $x\overline{\in} A$ 或 $x\notin A$.

注　1° 任一对象或事物 x 被当作某一给定集合 A 的元素时，则 x 与 A 的关系要么是 $x\in A$，要么是 $x\overline{\in} A$，二者必居其一，而不可兼得，即“非此即彼”.

2° 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$；仅含一个元素的集合称为单元素集；如果集合只含有限个元素，则称此集合为有限集，否则称为无限集.

［**定义 1.1**］　设 A,B 是两个集合

(1) 若 A 的所有元素都是 B 的元素，即 $\forall\ x\in A\Longrightarrow x\in B$，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2) 若 $A\subseteq B$，但存在 $x_0\in B$ 而 $x_0\overline{\in} A$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集 A 与 B 相等，记为 $A=B$(A 与 B 的元素完全相同).

注　1° 对任意集 A 有 $A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$.

2° 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

［**定义 1.2**］　设 A,B 是两个集合，则定义 A 与 B 的并(和)、交(积)、差、直积如下：

(1) $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

(2) $A\cap B=\{x|x\in B$ 且 $x\in A\}$；

(3) $A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\}$；

(4) 当 $B\subseteq A$ 时，称 $A-B$ 为集 B 关于 A 的补集，记为 $\mathscr{C}_A B=\{x|x\in A$ 但 $x\overline{\in}B,B\subseteq A\}$；

(5) $A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$.

注 A 与 B 的并 $A\cup B$ 也可用 $A+B$ 表示，交 $A\cap B$ 也可用 $A\cdot B$ 表示，$\mathscr{C}_A B$ 也可用 B^C 表示，特别，直积 $A\times B$ 不能写为 $A\cdot B$.

[**定理 1.1**] 集合具有如下常用性质：

(1) $A\cup A=A,A\cap A=A$；

(2) $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$；

$A\cup S=S,A\cap S=A$；(其中 S 为全集)

(3) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(5) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(6) $A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$；

(7) $A\cup\mathscr{C}A=S,A\cap\mathscr{C}A=\varnothing$；

(8) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$；

(9) 若 $A\subseteq B$，则有

$A\cup B=B,A\cap B=A,A-B=\varnothing$,

$A\cup C\subseteq B\cup C,A\cap C\subseteq B\cap C$；

(10) $A\cup B=[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$.

[**定义 1.3**] (1) 设 X 为任一集，若$\forall\ \alpha\in X$，都有一个集 A_α 与之对应，则称集 A_α 的全体为以 X 为指标集的集族，记为 $\{A_\alpha|\alpha\in X\}$或$\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$；

特别，当 $X=\{1,2,\cdots,n\}$时，$\{A_\alpha\}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$；当 X 为自然数集 N 时，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in N}=\{A_n\}_{n=1}^{\infty}=\{A_1,A_2,\cdots\}$称为集列，简记为 $\{A_n\}$.

(2) 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$的并集定义为

$$\bigcup_{\alpha\in X}A_\alpha\left(\text{或}\sum_{\alpha\in X}A_\alpha\right)=\{x\mid\exists\ \alpha_0\in X,\text{使}\ x\in A_{\alpha_0}\}.$$

(3) 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$的交集定义为

$$\bigcap_{\alpha\in X}A_\alpha(\text{或}\prod_{\alpha\in X}A_\alpha)=\{x\mid\forall\ \alpha\in X,x\in A_\alpha\};$$

特别,当 $X=\mathrm{N}$ 时,称$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可列并,称$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可列交.

[定理 1.2] 笛摩根(De Morgan)定理:设 S 是任一集合,而$\{A_\alpha\mid\alpha\in X\}$是 S 的一组子集,则有

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in X}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in X}(\mathscr{C}A_\alpha)$$

$$\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in X}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in X}(\mathscr{C}A_\alpha).$$

注 1° 若 $A_\alpha\subset B,\forall\ \alpha\in X$,则$\bigcap\limits_{\alpha\in X}A_\alpha\subset B$;

若 $A_\alpha\supset B,\forall\ \alpha\in X$,则$\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha\supset B$.

2° $(\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cap B=\bigcup\limits_{\alpha\in X}(A_\alpha\cap B)$;

$(\bigcap\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cup B=\bigcap\limits_{\alpha\in X}(A_\alpha\cup B)$.

3° $\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in X\\\beta\in Y}}(A_\alpha\cap B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cap(\bigcup\limits_{\beta\in Y}B_\beta)$;

$\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in X\\\beta\in Y}}(A_\alpha\cup B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cup(\bigcup\limits_{\beta\in Y}B_\beta)$.

[定义 1.4] 设$\{A_n\}$是一集列,则定义集列$\{A_n\}$的上限集$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 和下限集$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 如下:

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\exists\ \{A_{n_k}\}\subseteq\{A_n\},\text{使}\ x\in A_{n_k},k=1,2,\cdots\}$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\exists\ n_0\in\mathrm{N},\forall\ n>n_0,x\in A_n\}$.

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称$\{A_n\}$收敛.这时称$\{A_n\}$存在极限集,记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

[定理 1.3] (1) 对任一集列$\{A_n\}$,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

(2) 若集列$\{A_n\}$是单调增加的,即对$\forall\ n,A_n\subseteq A_{n+1}$,则$\{A_n\}$是收敛的,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

若集列$\{A_n\}$是单调减少的，即$A_n\supseteq A_{n+1}$，$\forall\ n$，则$\{A_n\}$是收敛的，且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

［**定义 1.5**］ 设X是一个固定的非空集，又$A\subseteq X$，作X上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\overline{\in}A(\text{即 } x\in X-A)\end{cases}$$

则称$\chi_A(x)$为集A的特征函数.

［**定理 1.4**］ 特征函数的性质：

(1) 若$\forall\ x\in X$，$\chi_A(x)=\chi_B(x)$，则$A=B$；

(2) $A=X\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv 1\ (x\in X)$；

$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv 0\ (x\in X)$；

(3) $A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$；

$A\supseteq B\Leftrightarrow\chi_A(x)\geqslant\chi_B(x)$；

(4) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$；

$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$.

二、集的势与无限集理论

［**定义 1.6**］ 设A,B为两个非空集合：

(1) 若对每一个$x\in A$，均存在唯一的$y\in B$与之对应，则称此对应为映射，记为$\varphi:A\to B$，并称φ是由A到B的一个映射.

(2) 若$\varphi:A\to B$，当$x_1,x_2\in A$，且$x_1\neq x_2$时，有$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$，则称$\varphi$是由$A$到$B$的一个单射；若$\varphi$的值域$\{y\mid y=\varphi(x),x\in A\}=B$，则称$\varphi$是由$A$到$B$的一个满射；若$\varphi$既是单射又是满射，则称$\varphi$是$A$到$B$上的一一映射.

(3) 若存在一个由A到B上的一一映射，则称集合A与B对等，记为$A\sim B$.

注 1° 对等关系满足三个基本性质：反身性，对称性，传递性.

2° 若$\{A_\alpha\}$与$\{B_\alpha\}$中任两个集都不相交，则$\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha\sim\bigcup\limits_{\alpha\in X}B_\alpha$.

3° 欲证两集合A,B对等，只须在A,B之间构造出一一对应即可.

4° $A\sim B$ 与 $A=B$ 的本质区别在于：

$$A=B\Longrightarrow A\sim B,\text{其逆不真}.$$

［**定义 1.7**］ (1) 能与自然数集对等的集称为可列集，不是可列集的无限集称为不可列集，有限集或可列集称为至多可列集.

(2) 如果两集合对等，则称它们具有相同的势或基数，集 A 的势用 $\overline{\overline{A}}$ 表示.

若 $A\sim \mathrm{N}$，则用 a 表示 A 的势，即 $\overline{\overline{A}}=a$.

若 $A\sim[0,1]$，则用 c 表示 $\overline{\overline{A}}$，即 $\overline{\overline{A}}=c$.

注 1° 若 $A\sim B$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

2° $\overline{\overline{\varnothing}}=0$，有限集的势为元素的个数.

3° 若存在 $C\subset B$，使 $A\sim C$，且 A 与 B 不对等，则 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

4° $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 有且只有一个成立.

［**定理 1.5**］ 伯恩斯坦(Bernstein)定理：设 A,B 为两个集，若有 A 的子集 A_1 与 B 的子集 B_1，使 $A\sim B_1$ 且 $A_1\sim B$，则 $A\sim B$.

［**定理 1.6**］ 无限集的特征性质：

(1) A 为无限集 $\Longleftrightarrow A_1$ 为 A 的某一真子集，且 $A\sim A_1$；

(2) A 为无限集 $\Longrightarrow \exists\ B\subseteq A$，使 $B\sim N$.

［**定理 1.7**］ 可列集的若干结论：

(1) A 为可列集 $\Longleftrightarrow A$ 的元素可排列成一个无穷序列的形式，即 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$；

(2) 可列集的任何子集都是至多可列集；可列集的无穷子集是可列集；

(3) 至多可列个至多可列集的并集是至多可列集，且参与并运算的集中至少有一个是可列集时，其并是可列集；

(4) 有限多个至多可列集 $A,B,C,\cdots,X$ 的直积 $A\times B\times C\times\cdots\times X=\{(a,b,c,\cdots,x)\mid a\in A,b\in B,c\in C,\cdots,x\in X\}$ 是至多可列集；

(5) 若 A 为至多可列集，B 为无限集，则 $A\cup B\sim B$；

(6) 有理数集 Q 是可列集；整系数多项式的全体所成之集是可列集；R^1 上某些长度不为零且互不相交的区间所成之集是至多可列集；R^1 上单调函数的不连续点所成之集是至多可列集；代数数全体所成之集是可列集.

［**定理 1.8**］ 不可数集的若干结论：

(1) 区间$[0,1]$是一个不可数集，其势记为 c，称 c 为连续基数；

(2) 至多可列个或不可列个不可列集的并集是不可列集；

(3) 有限个具有连续基数 c 的集合的直积集是具有连续基数 c 的集；

(4) 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\overline{\overline{A}}_n\leqslant c$，$\forall\ n$，且至少有一个 $\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有连续基数 c；

(5) 全体实数 R^1 是不可数集，且 $\mathrm{R}^1\sim[0,1]$，即$\overline{\overline{\mathrm{R}^1}}=c$；$\mathrm{R}^1$ 上任一个长度大于零的区间都与$[0,1]$对等，全体自然数数列所成之集具有连续基数 c；n 维空间中的所有点所成之集 R^n 具有连续基数 c；全体实数列所成之集具有连续基数 c.

［**定理 1.9**］ 无最大势定理：设 M 是任意集，$\mathscr{B}(M)$表示由 M 的所有子集所成之集，则有$\overline{\overline{\mathscr{B}(M)}}>\overline{\overline{M}}$.

问 题 解 答

一、回答问题并说明理由

［1.1］ 为什么说空集$\varnothing$是任何集的子集？

答 由于 $B\subset A$ 的意义是：若 $a\in B$，则 $a\in A$，此命题的逆否命题为：若 $a\overline{\in}A$，则必有 $a\overline{\in}B$. 因此，要证明$\varnothing\subset A$，只须证明若 $a\overline{\in}A$，则 $a\overline{\in}\varnothing$即可. 事实上，若 $a\overline{\in}A$，由于$\varnothing$中不含任何元素，当然有 $a\overline{\in}\varnothing$，于是，$\varnothing\subset A$，即$\varnothing$是任何集的子集.

[1.2] 若 $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$ 是什么原故？

解 (1) 若 $A=\varnothing$，则结论 $A\subset C$ 显然成立.

(2) 若 $A\neq\varnothing$，$\forall\, a\in A$，由题设 $A\subset B$，则有 $a\in B$，又 $B\subset C$，所以 $a\in C$，故 $A\subset C$.

[1.3] 为什么有 $A-B=A\cap\mathscr{C}B$？

答 因 $\forall\, x\in A-B$，则 $x\in A$ 且 $x\overline{\in} B$，从而 $x\in A$ 且 $x\in\mathscr{C}B$，即 $x\in A\cap\mathscr{C}B$，所以，$A-B\subset A\cap\mathscr{C}B$.

反之，$\forall\, x\in A\cap\mathscr{C}B$，则 $x\in A$ 且 $x\in\mathscr{C}B$，从而 $x\in A$ 且 $x\overline{\in} B$，即 $x\in A-B$，所以，$A\cap\mathscr{C}B\subset A-B$.

综上可知，$A-B=A\cap\mathscr{C}B$.

注 我们在以后问题的证明中，经常用到这一等式将差化为交. 因为差运算性质不多，而交的运算性质多而方便，所以运用这一等式可使问题简化.

[1.4] $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 成立的充要条件是什么？

答 左边 $=(A-B)\cup B=(A\cap\mathscr{C}B)\cup B$

$$=(A\cup B)\cap(\mathscr{C}B\cup B)=(A\cup B)\cap S=A\cup B.$$

右边 $=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\mathscr{C}B$

$$=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(B\cap\mathscr{C}B)=(A-B)\cup\varnothing=A-B.$$

要使左边 = 右边，即 $A\cup B=A-B$，从而当且仅当 $B=\varnothing$ 时才能成立. 即 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 成立的充要条件是 $B=\varnothing$.

[1.5] $(B-A)\cup A=B$ 成立的充要条件是什么？

答 左边 $=(B-A)\cup A=(B\cap\mathscr{C}A)\cup A$

$$=(B\cup A)\cap(\mathscr{C}A\cup A)=(B\cup A)\cap S$$
$$=B\cup A.$$

右边 $=B$，要使 $B\cup A=B$，当且仅当 $A\subset B$ 时才能成立，即 $(B-A)\cup A=B$ 成立的充要条件是 $A\subset B$.

[1.6] 为什么说 $\{x\,|\,x>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{n}\right\}$？

答 设 $x_0\in\{x\,|\,x>0\}$，则 $x_0>0$，从而存在 $n_0\in\mathrm{N}$，使 $x_0>\dfrac{1}{n_0}$，

即 $x_0\in\left\{x|x>\dfrac{1}{n_0}\right\}$，也即 $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x|x>\dfrac{1}{n}\right\}$. 所以 $\{x|x>0\}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x|x>\dfrac{1}{n}\right\}$.

反之，设 $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x|x>\dfrac{1}{n}\right\}$，则 $\exists\, n_0\in\mathrm{N}$，使得 $x_0\in\left\{x|x>\dfrac{1}{n_0}\right\}$，即 $x>\dfrac{1}{n_0}>0$，从而 $x_0\in\{x\mid x>0\}$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x|x>\dfrac{1}{n}\right\}\subset\{x|x>0\}$.

综上知 $\{x|x>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x|x>\dfrac{1}{n}\right\}$.

[**1.7**] 设 N 为自然数集，N_e 为正偶数集，N 与 N_e 对等吗？

答 N 与 N_e 是对等的. 在 N 与 N_e 上建立映射 $f:\mathrm{N}\to N_e$，$f(n)=2n\ (n\in\mathrm{N})$，显然 $f:\mathrm{N}\to N_e$ 是一一映射，故 $\mathrm{N}\sim N_e$.

[**1.8**] R^1 上以有理数为端点的区间的全体所成之集与自然数集之间能否建立一一对应？

答 能建立一一对应关系.

事实上，设直线上的全体有理点为 $a_1,a_2,\cdots$，令 $A_{ij}=(a_i,a_j)$ $(i\neq j,a_i<a_j)$，则 $\{A_{ij}\}$ 可如下排成序列：

$$\begin{array}{llllll}
A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & \cdots, & A_{1n}, & \cdots\\
 & A_{23}, & A_{24}, & \cdots, & A_{2n}, & \cdots\\
 & & A_{34}, & \cdots, & A_{3n}, & \cdots\\
 & & & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

令 $1\to A_{12},2\to A_{13},3\to A_{23},4\to A_{14},5\to A_{24},6\to A_{34},\cdots$ 即 $\{A_{ij}\}$ 与 N 之间建立了一一对应关系.

[**1.9**] 为什么说任何无限集 A 都包含有可列子集？

答 因为在任何无限集 A 中总可挑出一个可列子集.

事实上，A 非空，任取 $a_1\in A$，$A-\{a_1\}$ 也非空，否则 $A=\{a_1\}$ 与 A 为无限集矛盾，所以任取 $a_2\in A-\{a_1\}$，由于 $A-\{a_1,a_2\}$ 非空，否则 A 为 $\{a_1,a_2\}$ 矛盾，所以任取 $a_3\in A-\{a_1,a_2\}$，如此下去，设已从 A 中取出了 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，由于 $A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 非空，否

则 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为有限集矛盾，所以任取 $a_{n+1}\in A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，…，因此，在 A 中必可取出一可列子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

[**1.10**] 怎样建立无限集与它的一个真子集的一一对应关系？

答 设 A 为无限集，则 A 必有一个可列子集 $A^*=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，令 $A_0=A-A^*$，则有 $A=A_0\cup A^*$.

令 $\hat{A}=A_0\cup\{a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，则 $\hat{A}$ 是 A 的真子集，作 A 到 $\hat{A}$ 的映射 f，使 $f(a_n)=a_{n+1}$，$\forall\ n$，而当 $x\in A_0$ 时，令 $f(x)=x$. 显然 $f:A\to\hat{A}$ 为一一映射，即 $A\sim\hat{A}$.

[**1.11**] 由直线上互不相交的开间隔所成之集是至多可列集吗？

答 是.

因为设 $G=\{I\}$为直线 R 上互不相交的开间隔所成之集. 其中 I 为 R 上的开间隔.

对$\forall\ I,J\in G$，有 $I\cap J=\varnothing$，由有理数的稠密性知，在每一 I 中至少含有一个有理数，故从 G 中每一个开间隔中取定一个有理数 r 组成集合 A，因为 G 中开间隔互不相交，所以 A 中的有理数彼此不同，令 G 中的开间隔 I 与 I 中取定的有理数对应，显然这种对应是一一的，由于 A 是有理数集 Q 的子集，而 Q 为可列集，所以 A 为至多可列集，即 G 也为至多可列集.

注 此结论常可用来证明至多可列集的有关问题.

[**1.12**] 为什么说平面上顶点具有有理坐标的三角形所成之集是可列集？

答 因为设 M 为平面上顶点具有有理坐标的三角形所成之集，由于有理数集 Q 是可列集，平面上的三角形由三个顶点所确定，而每个顶点由两个数决定，故六个数可确定一个三角形，所以 M 中的每个元素由 Q 中六个相互独立的数所确定，即 $M=\{a_{x_1x_2\cdots x_6}\mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Q\}$，所以 M 为可列集.

[**1.13**] 设 A 为平面上以有理点为中心，以有理数为半径的圆所组成的集合，则 A 为可列集.

解 因有理数集 Q 为可列集,令

$$B=\{b_{xyz},x,y,z\in \mathrm{Q}\},$$

由于 B 中的元素 b_{xyz} 依赖于三个独立的有理数,所以 B 为可列集.

对 A 中的每个元素 a,它的圆心为有理点(x_r,y_r),半径为有理数 z_r,作映射 $\varphi: A\to B$,使

$$\varphi(a)=b_{x_r y_r z_r}\in B,$$

则 φ 是 A 到 B 的一一映射,故 A 与 B 的一个子集对等,而 B 为可列集,故 A 为至多可列集,又 A 为无限集,所以 A 必为可列集.

[1.14] 设 B 为自然数列的全体所成之集,N 为自然数集,$B\sim \mathrm{N}$ 对吗?

答 B 与 N 不对等.

用反证法,假设 $B\sim \mathrm{N}$,则 B 为可列集,由对等定义知,可建立 B 的元素与 N 的元素之间的一一对应,故对 $\forall\ i\in \mathrm{N}$,有且仅有一个无穷序列 $\{n_k\}$ 与之对应,现把与自然数 i 对应的序列 $\{n_k\}$ 记为 $\{n_{ik}\}$,于是可将 B 的全体元素排列如下:

$\{n_{1k}\}$: n_{11}, n_{12}, n_{13}, $\cdots$, n_{1k}, $\cdots$

$\{n_{2k}\}$: n_{21}, n_{22}, n_{23}, $\cdots$, n_{2k}, $\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\{n_{kk}\}$: n_{k1}, n_{k2}, n_{k3}, $\cdots$, n_{kk}, $\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

现在考察序列 $n_{11}+1,n_{22}+1,\cdots,n_{kk}+1,\cdots$,可见此数列与排列起来的每一无穷序列都不同,故它不是 B 的元素,但是 $n_{ii}+1$ 都是自然数,因此它又应是 B 的元素,矛盾,因此 B 与 N 不对等.

注 此结论说明了"由各项均为自然数的无穷数列全体所成之集是不可列集".

二、集合的运算及性质

[1.15] 证明 $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$.

证 先证 $A-B=A-(A\cap B)$.

$$\begin{aligned}\text{右边}&=A-(A\cap B)=A\cap \mathscr{C}(A\cap B)\\&=A\cap(\mathscr{C}A\cup \mathscr{C}B)=(A\cap \mathscr{C}A)\cup(A\cap \mathscr{C}B)\end{aligned}$$

$=\varnothing\cup(A\cap\mathscr{C}B)=A\cap\mathscr{C}B=A-B=$左边.

再证 $A-B=(A\cup B)-B$.

右边$=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\mathscr{C}B$

$=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(B\cap\mathscr{C}B)=(A-B)\cup\varnothing$

$=A-B=$左边.

[**1.16**] 证明:(1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(2) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

证 (1) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(A\cap\mathscr{C}C)$

$=A\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)=A\cap\mathscr{C}(B\cup C)=A-(B\cup C)$;

(2) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap\mathscr{C}C)\cup(B\cap\mathscr{C}C)$

$=(A\cup B)\cap\mathscr{C}C=(A\cup B)-C$.

[**1.17**] 证明 $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

证 $(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)=A\cap[\mathscr{C}B\cup\mathscr{C}(\mathscr{C}C)]$

$=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)=A\cap\mathscr{C}(B-C)$

$=A-(B-C)$.

注 1° 若按集合相等的定义证明,即证左右相互包含,则要讨论各种情形,过程太繁,这种证明方法不可取.

2° 本题的直接推论有许多,诸如:

i) $A-(A-B)=A\cap B$;

ii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$;

iii) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$ 的充要条件是 $C=A$. 读者可相仿给出证明.

[**1.18**] 证明$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

证 $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)$

$=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)$

$=(A\cap C)-(B\cup D)$.

注 此题结论在以后多处用到,请读者留心.

[**1.19**] 证明对于任意的集族$\{A_\alpha\}$,成立以下笛摩根公式:

(1) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha}(\mathscr{C}A_\alpha)$;