
悬索曲线理论及其应用

单圣淦 李飞云 陈洁余 朱祖桦著



湖南科学技术出版社

悬索曲线理论及其应用

单圣彦 李飞云 陈洁余 朱祖撈著

责任编辑：李遂平

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1983年7月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：8.625 插页：4 字数：224,000

印数：1—4,200

统一书号：15204·106 定价：1.80元

内 容 提 要

在本书中，作者提出了新的悬索计算理论（“悬索曲线”理论），论述了作者新创立的悬索的无量纲计算法的基本原理，介绍了悬挂钢索的静力系统测试装置、方法和数据，并结合索道承载索的设计计算，提供了可以简化计算的索道无量纲设计实用数值表格。本书可供高等院校有关专业的高年级学生及科研人员参考，亦可作为有关学科研究生的参考教材。书中的索道设计实用数值表，可供一般索道工程技术人员在索道设计时使用。

前 言

本世纪六十年代,由于悬索工程新技术的迅速发展,悬索工程中出现了悬索的中央挠度系数大于现有悬索计算理论的适用范围的情况,因而目前各国普遍采用的“抛物线”计算理论,已不能满足悬索工程新技术发展的要求,且嫌计算繁琐。

针对上述情况,在大量科研工作的基础上,本书提出了新的悬索计算理论,论述了新创立的悬索的无量纲计算法的基本原理,提供了索道承载索的无量纲设计实用数值表格和悬挂钢索静力的系统测试装置、方法及数据。新的悬索计算理论和现有的“抛物线”理论比较,能扩大计算范围两倍左右。悬索的无量纲计算的基本原理,能使悬索的各种计算理论大为简化。悬索静力的系统测试技术,能为悬索计算理论的研究和悬索工程新技术的继续发展提供可靠的实验手段。

上述成果在研究过程中,得到了中央林业部、湖南省科技局、林业厅、教育厅等上级机关和中南林学院、湖南国营莽山林场的大力支持,得到过中国科技大学龚升教授、湖南大学石任球教授、中南矿冶学院童子琦教授、李德巨副教授、长沙铁道学院郑君翹教授、熊秉衡副教授、东北林学院关承儒副教授、中国科学院应用数学研究所裴定一助理研究员等同志的热情指导与帮助。在此谨致衷心的感谢。

由于水平所限,难免存在缺点和错误,诚恳地希望读者指正。

著 者

1983.2.

BAV33/03

目 录

绪论.....	(1)
第一章 “悬索曲线”理论	(3)
一、悬索的重力曲线特性	(3)
二、“悬索曲线”	(6)
三、“悬索曲线”的辅助曲线	(9)
四、“悬索曲线”的解	(12)
五、“悬索曲线”理论中的非线性计算问题	(16)
第二章 悬索的线型分析及“悬索曲线”算法.....	(21)
一、“悬链曲线”及其“八次曲线”算法	(21)
二、“抛物线”的线型分析	(26)
三、“悬索曲线”的线型分析	(28)
四、两种近似理论的对比和验证	(30)
五、“悬索曲线”计算的进一步逼近处理	(35)
第三章 悬索张力的测试验证和无量纲计算	(38)
一、悬索的张力测试	(38)
二、张力测试数据的技术处理	(40)
三、悬挂钢索张力的测试数据	(42)
四、悬索的无量纲计算	(43)
五、三个结论	(49)
第四章 集中荷重悬索的“悬索曲线”理论.....	(51)
一、集中荷重时的悬索	(51)
二、集中荷重悬索的“悬索曲线”理论	(54)
三、荷重前后悬索张力的相互关系	(58)

四、集中荷重悬索的“八次曲线”检验法	(61)
五、集中荷重时“悬索曲线”理论的误差	(66)
第五章 荷重悬索的无量纲计算及其张力的测试实验	(69)
一、荷重悬索的无量纲计算公式	(69)
二、集中荷重悬索的张力测试	(73)
三、两种方法的验证	(79)
四、两种理论比较	(81)
第六章 悬索无量纲计算的基本原理及其在“抛物线”理论 中的应用	(84)
一、无量纲量的概念	(84)
二、“抛物线”理论的无量纲基本运算	(86)
三、荷重悬索的“抛物线”无量纲运算	(92)
四、悬索的最小挠度和无量纲容许荷重	(94)
五、索道承载索的“抛物线”无量纲设计法	(96)
六、关于承载索的“抛物线”无量纲表格设计法	(99)
第七章 无量纲计算在悬索理论研究中的应用	(101)
一、“八次曲线”理论的无量纲计算公式	(101)
二、“悬索曲线”理论的无量纲计算公式	(108)
三、应用无量纲量进行对比和验证	(111)
第八章 “悬索曲线”理论的无量纲计算及其在索道设计中 的应用	(113)
一、“悬索曲线”的无量纲基本运算	(113)
二、“悬索曲线”理论的无量纲解	(120)
三、“悬索曲线”的最小挠度	(121)
四、“悬索曲线”理论的无量纲容许荷重	(123)
五、“悬索曲线”理论的无量纲实用数值表格	(124)
六、索道设计中的无量纲实用数据表格	(128)

第九章 悬索张力的测试	(178)
一、试验装置与原理	(178)
二、试验方法与步骤	(179)
三、测试数据的技术处理	(180)
四、测试结果	(181)
五、误差分析	(185)
第十章 集中荷重悬索张力的测试	(186)
一、概述	(186)
二、试验结果	(187)
三、误差分析	(195)
第十一章 索道承载索的张力测试	(197)
一、无集中荷重索道承载索的张力测试	(198)
二、中央集中荷重索道承载索的张力测试	(199)
三、结论	(201)
第十二章 大跨距的单跨大挠度索道技术	(202)
一、单跨大挠度索道技术	(203)
二、单跨索道的设计计算	(205)
第十三章 索道的测量和两腰不宜测原理	(209)
一、问题的提出	(209)
二、索道测量的两腰不宜测原理	(211)
三、索道承载索的测量	(215)
四、两腰不宜测原理的验证	(218)
第十四章 关于“抛物线”理论的无量纲容许荷重表	(221)
一、计算公式	(221)
二、悬索的无量纲容许荷重表	(222)
参考文献	(239)
附 录	(240)

绪 论

悬挂绳索的受力分析，即所谓的悬索计算理论，是各种悬索工程的设计计算方法的基础理论知识之一。

十七世纪，伽俐略第一个研究了悬挂于两固定支架上、且不可伸长的索或链的曲线线型，称之为“悬链曲线”。“悬链曲线”的解，是几何学家 James Bernoulli 等人于1691年开始建立的。但因为是超越函数，由于计算上的困难而不能直接应用于悬索工程的设计计算，只能根据悬索工程的要求，采用不同的近似计算方法。

1794年，Fuss 在一次悬索桥的设计中发现荷重沿悬索的跨距均匀分布时形成的“抛物线”。“抛物线”的解，是一些不知名的人士逐步建立的。直到1862年以后，“抛物线”理论才形成体系；到目前为止，已成为各国普遍采用的悬索工程设计计算的主要依据。

“抛物线”理论之所以被重视，不仅因为“抛物线”是简单的二次代数函数曲线，而且由于在很多情况下，悬索的荷重确实是沿悬索的跨距均匀分布的。但对于自重是沿曲线均匀分布的悬挂绳索，“抛物线”理论的计算只是“悬链曲线”展开级数式取前一项进行改造后的近似计算；其适应范围为中央挠度系数等于百分之八左右。

本世纪六十年代，大跨距的单跨索道、悬挂式屋盖结构以及大跨度的桥梁等悬索工程新技术迅速发展，悬索的中央挠度系数出现了大于百分之八的情况。为扩大设计计算范围，有的对“抛物线”理论进行修正，有的用模拟试验获得大挠度悬索工程的设计数据。但以上途径未获显著效果。因此，我们认为，还是着手解决线型的限制问题，寻找新的计算理论，才是解决问题的根本办法。

在寻求新的悬索计算理论过程中，为避免计算繁琐，除了应

尽可能避免超越函数和高次方程的运算外，还要尽可能减少参与运算的因子。如日本《林业架空索道设计法》一书，由于采用了“荷重比”这个无量纲的量，在运算中已取得了比较显著的简化效果。可见，在悬索理论的研究中，只有设法找到正确的公比因子，实现对悬索进行全面的无量纲计算，才能最大限度地简化各种悬索计算理论的计算公式。写本书的目的，即论述新的悬索计算理论和已求得的对悬索全面进行无量纲计算的公比因子。为证明本书所提出的新理论和无量纲计算的可靠性和实用价值，本书还论述了悬索张力的系统测试和已应用于生产实际的长跨距单距大挠度索道技术，以及新的测量和设计方法。

第一章 “悬索曲线”理论

图1—1所示，将绳索绷起，两端分别固结于两支架的端点A、B。当A、B间的水平距离足够大时，索被看成是可挠的。在自重力的作用下，必然形成一条下凹的曲线。这条曲线叫做“悬链曲线”。



图1—1

但是，对于悬索，也可以根据其重力曲线特性，并假定其自重自曲线的顶点开始，沿水平方向递增分布，从而导出一条新的代数函数曲线来表示。此曲线可称为“悬索曲线”。

一、悬索的重力曲线特性

按图1—2，在图1—1所示的AB索上任取一线元 dL 进行受力分析。设索之单位长度自重为 q 。当悬索平衡静止时，若用 T_1 和 T_1' 分别表示悬索线元 dL 两端的张力，并用 V 和 V' 分别表示两张力的垂直分量，根据力的平衡原理，应有

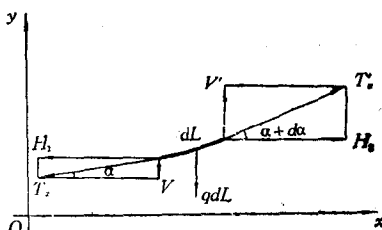


图1—2

$$V' = V + qdL$$

$$(1-1)$$

$$\text{和} \quad H_1 = H_2 = H_0 \quad (1-2)$$

式中, H_0 表示悬索张力的水平分量, 亦可称为悬索的水平张力。

(1-2)式表示, 悬索平衡静止时, 索上各处之水平张力相等。

按图1-2, 并根据力的平衡方程, 应有

$$T_1' \sin(\alpha + d\alpha) = qdL + T_1 \sin\alpha \quad (1-3)$$

$$T_1' \cos(\alpha + d\alpha) = T_1 \cos\alpha = H_0 \quad (1-4)$$

式中, α 和 $(\alpha + d\alpha)$ 分别表示 T_1 和 T_1' 与 Ox 轴的夹角。

(1-3)式和(1-4)式相除, 且因 $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$, 有

$$H_0 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qdL}{dx} \quad (1-5)$$

(1-5)式说明, 悬索的线型决定于索的单位长度自重和由于自重所生的水平张力。故这种曲线与一般的轨迹曲线不同, 可称为重力曲线。它具有如下的重力曲线特性:

(一) (1-5)式等号右边的物理意义: $\left[\frac{qdL}{dx}\right]$ 表示索上之单位长度自重折合在 Ox 轴上的单位长度重量。可用 ω_s 表示。

$$\omega_s = \frac{qdL}{dx} \quad (1-6)$$

于是, (1-5)式可写成

$$H_0 \frac{d^2y}{dx^2} = \omega_s \quad (1-7)$$

(1-7)式表明, 悬索上任意处切线的斜率的变化率与其水平张力之积等于该处之单位长度索重折合在 Ox 轴上的单位长度重量。

(二) 因为

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha} \quad (1-8)$$

联立(1-8)、(1-6)两式, 有

$$\frac{\omega_s}{q} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (1-9)$$

(1-9)式代入(1-4)式, 有

$$T_s = \frac{H_0}{\cos \alpha} = \frac{\omega_s}{q} H_0 = H_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (1-10)$$

(1-10)式表明, 悬索上各处之张力, 亦等于水平张力与该处单位长度自重折合在 Ox 轴上的单位长度重量之比的乘积。

(三)按图1-3用矢量分析图1-2中 dL 段的静态受力, 有

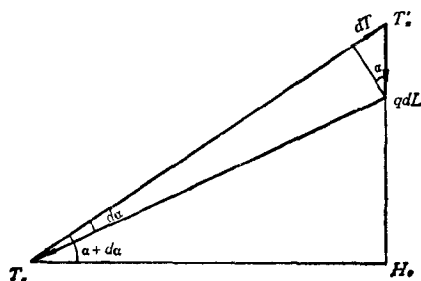


图1-3

$$dT = qdL \sin \alpha$$

而 $\sin \alpha = \frac{dy}{dL}$, 故有

$$dT = qdy \quad (1-11)$$

若索的线密度均匀, 按图1-4

给定的边界条件 $[x=a$ 时, $y=$

$y_{(a)}$; $x=b$ 时, $y=y_{(b)}$] 解微分方程(1-11)式, 有

$$T_{0B} - T_{0A} = qh \quad (1-12)$$

式中 h 表示悬索两端 A, B 之高差, 且

$$y_{(b)} - y_{(a)} = h$$

而 a, b, T_{0A}, T_{0B} 分别表示悬索两固结端 A, B 处的水平坐标和所承受的张力。

(1-12)和(1-11)两式表示, 对于线密度均匀的悬索, 任意两处的张力差等于索的单位长度自重与该两处高差之积。

(四)悬索之自重应力 M_0 , 根据(1-6)式, 有

$$M_0 = \int_a^b \omega_s dx \quad (1-13)$$

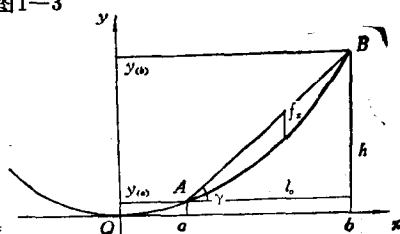


图1-4

悬索之长度则为 L ，有

$$L = \frac{M_0}{q} = \frac{1}{q} \int_a^b \omega_s dx \quad (1-14)$$

所以，悬索之自重亦可沿 Ox 轴对索之单位长度自重折合在 Ox 轴上的单位长度重量进行积分获得。

(五)整条索的平均张力应为 T_{00} ，根据(1-10)式，有

$$T_{00} = \frac{1}{l_0} \int_a^b T_s dx = \frac{M_0 H_0}{l_0 q} \quad (1-15)$$

(1-15)式表明，悬索之平均张力与索之自重和由于自重所生水平张力之积成正比例，并与单位长度自重和水平跨距之积成反比例。式中之 l_0 表示悬索两端的水平跨距。

以上推演，是悬挂绳索在自重力的作用下所形成的重力曲线的重力曲线特性，也是以后进行推导的理论依据。

二、“悬索曲线”

按图1—5在 Ox 轴上取两段长度相等的 Δx 进行对比，可以看出，当 Δx 离原点愈远时，所包含的索段 ΔL 愈长。而由于索之线密度均匀，故离原点愈远的 Δx 所包含之索段 ΔL_2 之自重愈大。也就是说，悬索之自重从曲线的顶点开始，始终沿 Ox 轴递增分布。因此，悬索之自重折合在 Ox 轴上的单位长度重量应沿 Ox 轴递增。故可假设：

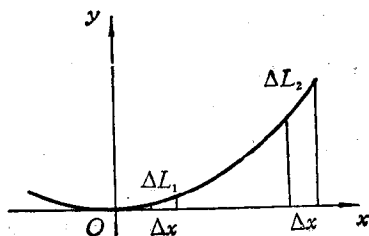


图1—5

$$\omega_s = q + \rho_0 x^2 \quad (1-16)$$

式中之 ρ_0 可称为悬索之自重沿 Ox 轴递增分布的递增系数。

(1-16)式代入(1-7)式，有

$$H_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = q + \rho_0 x^2 \quad (1-17)$$

(1—17)式, 可称为“悬索曲线”理论的二阶微分方程, 是“悬索曲线”计算理论的基本方程。

现设索的线密度均匀, 并将 ρ_0 近似地视为一常数, 按图1—5给定的边界条件(当 $x=0$ 时, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$.) 解微分方程(1—17)式, 有

$$y = \frac{q}{2H_0}x^2 + \frac{\rho}{12H_0}x^4 \quad (1-18)$$

此即“悬索曲线”的曲线方程。因此“悬索曲线”是一条四次代数函数曲线。

(1—16)式代入(1—10)式, 有

$$T_s = \frac{H_0}{q}(q + \rho_0 x^2) \quad (1-19)$$

此即“悬索曲线”理论的张力方程。于是, 悬索两端固结点的张力分别为 T_{0A} 和 T_{0B} , 有

$$T_{0A} = H_0 + \frac{H_0}{q}\rho_0 a^2 \quad (1-20)$$

$$T_{0B} = H_0 + \frac{H_0}{q}\rho_0 b^2 \quad (1-21)$$

(1—20)、(1—21)两式相减, 有

$$T_{0B} - T_{0A} = \frac{H_0}{q}\rho_0(b^2 - a^2) \quad (1-22)$$

(1—22)式与(1—12)式联立, 有

$$\rho_0 = \frac{q^2 h}{(b^2 - a^2)H_0} \quad (1-23)$$

$$\text{因为 } b - a = l_0 \quad (1-24)$$

(1—24)式与(1—23)式联立, 有

$$a = \frac{q^2 h}{2H_0 \rho_0 l_0} - \frac{l_0}{2} \quad (1-25)$$

$$b = \frac{q^2 h}{2H_0 \rho_0 l_0} + \frac{l_0}{2} \quad (1-26)$$

(1-16)式代入(1-13)式, 有

$$M_0 = q(b-a) + \frac{l_0}{3}(b^3 - a^3) \quad (1-27)$$

(1-24)、(1-25)、(1-26)三式同时代入(1-27)式, 有

$$\rho_0 H_0^3 = \frac{3q^2 h^2}{l_0(12M_0 - 12ql_0 - \rho_0 l_0^3)} \quad (2-28)$$

根据几何关系, 悬索上任意处到 AB 弦上的铅垂距离称为悬索在该处的挠度, 可用 f 表示, 有

$$f = (x-a)\tan\gamma + y_{(a)} - y \quad (1-29)$$

式中, γ 表示 AB 弦的倾角, 也称为曲线 AB 的倾角 (见图 1-4)。

索的中央挠度, 也可写成

$$f_0 = \frac{1}{2}[y_{(a)} + y_{(b)}] - y_{(\frac{a+b}{2})} \quad (1-30)$$

(1-18)、(1-24)、(1-25)和(1-26)等式同时代入(1-30)式, 有

$$\rho_0 H_0^3 = \frac{6q^4 h^2}{192H_0 f_0 - 24ql_0 - \rho_0 l_0^4} \quad (1-31)$$

微分(1-29)式, 有

$$\frac{df}{dx} = \tan\gamma - \frac{dy}{dx} \quad (1-32)$$

令 $\frac{df}{dx} = 0$, 有

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \tan\gamma \quad (1-33)$$

(1-33)式表示在悬索挠度最大处 ($x=x_0$), 索的切线方向与 AB 弦的方向一致。此处悬索的张力为 T_{x_0} , 有

$$T_{x_0} = H_0 \sec\gamma$$

按(1-10)式, 有 $\frac{\omega_{x_0}}{q} H_0 = H_0 \sec\gamma$, 故可从(1-16)式得

$$\omega_{x_0} = q + \rho_0 x^2 = q \sec\gamma \quad (1-34)$$

(1-34)、(1-18)两式同时代入(1-33)式, 有

$$\rho_0 H_0^2 = \frac{q^3 (\sec \gamma + 2)^2}{9 (\sec \gamma + 1)} \quad (1-35)$$

(1-35)、(1-31)、(1-28)三式联立解, 可得

$$H_0 = \frac{l_0}{16 f_0} (M_0 + q l_0 D_i \gamma) \quad (1-36)$$

$$\rho_0 = \frac{12}{l_0^3} (M_0 - q l_0 D_i \gamma) \quad (1-37)$$

式中, $D_i \gamma = 1 + Q \tan^2 \gamma$, 可称为悬索的倾斜因子。而

$$Q = \frac{9 (\sec \gamma + 1)}{4 (\sec \gamma + 2)^2} \quad (1-38)$$

式中, Q 称为悬索的高差项系数。

于是, “悬索曲线”的曲线方程(1-18)式可写成

$$y = \frac{8 f_0 x^2}{l_0^4 (M_0 + q l_0 D_i \gamma)} [q l_0^3 + 2 (M_0 - q l_0 D_i \gamma) x^2] \quad (1-39)$$

(1-39)式, 是比“抛物线”更为接近实际情况一些的代数函数曲线。若直接以此式继续推导有关的计算公式, 显然会比“抛物线”理论复杂, 而且不利于有集中荷重情况时的计算。因此尚需作进一步的近似处理。如果经过进一步的近似处理后, 其计算精度不致降低, 则是可行的。

三、“悬索曲线”的辅助曲线

为寻找较简便的“悬索曲线”理论计算公式, 可根据悬索的自重自曲线的顶点开始, 始终沿 Ox 递增分布的性质, 按图1-6, 将笛卡尔坐标系 (x', O', y') 的原点 O' 置于悬索之尾端 A 处, 并假设此处索之单位长度自重折合在 Ox' 轴上的单位长度重量为 ω_0 , 则索上任意处的单位长度自重折合在 Ox 轴上的单位长度重量为 ω'_x , 有

$$\omega'_x = \omega_0 + \rho'_0 x'^2$$

(1-40)

(1-40)式代入(1-7)式, 则有

$$H'_0 \frac{d^2 y'}{dx'^2} = \omega_0 + \rho'_0 x'^2$$

(1-41)

按图1-6给定的边界条件($x' = 0$ 时, $y' = 0$; $x' = l_0$ 时, $y' = h$)

解微分方程(1-41)式, 有

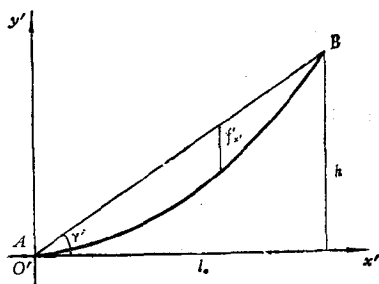


图1-6

$$y' = \frac{\omega_0}{2H'_0} x'^2 + \frac{\rho'_0}{12H'_0} x'^4 + \left(\tan \gamma - \frac{\omega_0}{2H'_0} l_0 - \frac{\rho'_0}{12H'_0} l_0^3 \right) x'$$

(1-42)

此即“悬索曲线”的辅助曲线方程。式中的 $\tan \gamma = \frac{h}{l_0}$, 称为悬索的斜率。

(1-42)式代入(1-29)式, 有

$$f'_x = \left(\frac{\omega_0}{2H'_0} l_0 + \frac{\rho'_0}{12H'_0} l_0^3 \right) x' - \left(\frac{\omega_0}{2H'_0} x'^2 + \frac{\rho'_0}{12H'_0} x'^4 \right)$$

(1-43)

此即辅助曲线的挠度方程。

当 $x' = \frac{l_0}{2}$ 时, 索的中央挠度为 f'_0 , 根据(1-43)式, 有

$$f'_0 = \frac{\omega_0}{8H'_0} l_0^2 + \frac{7\rho'_0}{192H'_0} l_0^4$$

(1-44)

(1-40)式代入(1-10)式, 有

$$T'_x = \frac{H'_0}{q} (\omega_0 + \rho'_0 x'^2)$$

(1-45)

此即辅助曲线的张力方程。

于是, 悬索A处的张力公式为

$$T'_{0A} = \frac{H'_0}{q} \omega_0$$

(1-46)