

薄壁结构力学

陈伯真 胡毓仁 编著

互异性

上海交通大学出版社

上海交通大学“九五”重点教材

薄 壁 结 构 力 学

陈伯真 胡毓仁 编著

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书叙述了开口和闭口薄壁杆件的弯曲、扭转和稳定性问题,还介绍了为了电子计算机应用所需的关于薄壁断面特性的数值解法及薄壁杆件弯扭耦合数值分析等内容,最后还讨论了薄壁杆件的塑性扭转。

本书可供从事造船、宇航、土建、起重、车辆、力学等专业的技术人员在进行薄壁结构分析时参考,也可作为工科高等院校结构力学专业的教学用书。

薄壁结构力学

陈伯真 胡毓仁 编著

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

常熟市印刷二厂·印刷

开本:787×1092(mm) 1/16 印张:13 字数:319 千字

版次:1998 年 8 月 第 1 版

印次:1998 年 8 月 第 1 次 印数:1-1200

ISBN 7-313-01929-7/O·132

定价:21.50 元

本书任何部分之文字及图片,如未获得本社之书面同意,
不得用任何方式抄袭、节录或翻印。

(本书如有缺页、破损或装订错误,请寄回本社更换。)

前 言

本书为 1988 年上海交通大学出版社出版的《薄壁结构力学》的修订本。

薄壁结构在结构工程领域中一直有着广泛的应用。近年来随着电子计算机的发展,采用经典薄壁结构理论和数值解法相结合的方法在薄壁结构分析中已越来越受到重视。例如在大开口集装箱船的弯扭分析中,将船体分为有限个薄壁梁段的处理方法已被公认为是一种具有足够精确度又较全船有限元分析经济的实用计算方法。本书就是在 1988 年版关于开口和闭口薄壁杆件弯曲、扭转及稳定性理论的基础上大量增补了薄壁结构数值分析内容,如薄壁断面特性的数值计算(包括应用图论的计算方法)、薄壁杆件弯扭耦合分析及程序等,此外还增加了薄壁杆件的塑性扭转。这些内容的加入对进行实际工程中大型、复杂的薄壁结构分析将是有益的。

本书内容在上海交通大学船舶及海洋工程学院研究生教学中使用多次。书稿经武汉交通科技大学杨永谦教授及上海交通大学顾永宁教授审阅推荐后被列入上海交通大学“九五”重点教材并由上海交通大学出版社出版。在此对上述审稿人、上海交通大学教材办公室表示感谢。作者希望本书能对薄壁结构力学的教学及相关专业的工程技术人员有所帮助,并希望得到广大读者的批评指正。

编 者

于上海交通大学

1996 年 11 月

符 号 表

A	断面积, 扭转中心	l	杆件长度, 单元长度
$\bar{A}$	闭室薄壁中心线围绕的面积	m	分布外扭矩
A_{xx}, A_{yy}	断面沿 x 方向和 y 方向的剪切面积	M_B	布雷特扭矩
A_{xy}	断面的混合剪切面积	M_f	自由扭转扭矩
$[A]$	插值矩阵	M_p	塑性极限扭矩
B	双力矩	M_s	圣维南扭矩
$[B]$	关联矩阵	M_x, M_y	绕 x 轴和 y 轴的弯矩
$[B_f]$	基本关联矩阵	M_y	始屈扭矩
$[C_f]$	基本回路矩阵	M_z	扭矩
E	材料的弹性模数	M_ω	二次扭矩
f	剪应力流(剪流)	N_x, N_y	沿 x 方向和 y 方向的剪力
$\hat{f}$	闭口断面的剪流	o	坐标原点, 断面形心
f_B	布雷特剪流	P	轴向力
f_p	塑性剪流	P_{cr}	临界力
f_x, f_y	在 xoz 平面和 yoz 平面内弯曲时的弯曲剪流	$[P_i]$	从第 i 单元到第 $i+1$ 单元的点迁移矩阵
f_ω	二次剪流	q_x, q_y	沿 x 方向和 y 方向的分布外力
$[F_i]$	第 i 单元的场迁移矩阵	s	沿薄壁中心线的自然坐标
F_{ij}	单元的节点力矢量	S_{sx}, S_{sy}	对 x 轴和 y 轴的剪切静矩
G	材料的剪切模数	S_x, S_y	对 x 轴和 y 轴的静矩
h	断面薄壁中心线上任意点处的切线到断面扭心的距离	S_ω	扇性静矩
$[H]$	总迁移矩阵	$[S]$	位移协调矩阵
I_p	对扭心的极惯性矩	t	壁厚
I_x, I_y	断面绕 x 轴和 y 轴的惯性矩	$[T]$	坐标转换矩阵
I_ω	断面的扇性惯性矩	u	在 xoz 平面内弯曲时的挠度, 沿 x 方向的位移
$I_{\omega x}, I_{\omega y}$	断面的扇性惯性积	v	在 yoz 平面内弯曲时的挠度, 沿 y 方向的位移
J	扭转惯性矩(扭转常数)	V	应变能
k_x, k_y	弹性介质在 x 方向和 y 方向的抗弯刚性系数	$V_i^{(1)}, V_i^{(2)}$	第 i 单元始端和末端的扭转要素矢量
k_φ	弹性介质的抗扭刚性系数		
$[K_\varphi]$	单元的约束扭转刚度矩阵		

w	沿 z 方向的位移, 翘曲	ν	材料的泊松比
W	外力功	ξ	切向位移
W_t	断面的扭转模数	σ_z	轴向正应力
W_P	断面的塑性扭转模数	σ_ω	扇性正应力(翘曲应力)
x_a, y_a	断面扭转中心的坐标	τ	剪应力
α	翘曲相容因子	τ_B	布雷特剪应力
$[\alpha]$	翘曲相容矩阵	τ_y	屈服剪应力
γ_{sz}	剪应变	τ_ω	二次剪应力
δ_{ij}	单元的节点位移矢量	φ	扭角
ϵ_z	轴向正应变	φ'	扭率
η	中性面到中面的距离	Ψ	扭转函数
θ	翘曲函数	ω	扇性坐标
θ_x, θ_y	断面绕 x 轴和 y 轴的转角		

目 录

绪论	(1)
第一章 薄壁梁的弯曲	(3)
§ 1-1 薄壁梁的弯曲微分方程式及弯曲正应力	(3)
§ 1-2 开口薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心	(7)
§ 1-3 单闭室薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心	(10)
§ 1-4 多闭室薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心	(14)
§ 1-5 剪切对薄壁梁弯曲的影响	(18)
第二章 薄壁杆件的自由扭转	(20)
§ 2-1 等断面直杆的圣维南扭转	(20)
§ 2-2 开口薄壁杆件的自由扭转	(23)
§ 2-3 闭口薄壁杆件的自由扭转	(24)
§ 2-4 翘曲	(29)
第三章 开口薄壁杆件的约束扭转	(33)
§ 3-1 约束扭转的基本概念	(33)
§ 3-2 约束扭转的正应力及剪应力	(33)
§ 3-3 扇性几何特性	(35)
§ 3-4 二次扭矩与双力矩	(40)
§ 3-5 约束扭转微分方程式及其解	(43)
§ 3-6 绕定轴的扭转	(48)
第四章 闭口薄壁杆件的约束扭转	(51)
§ 4-1 约束扭转的翘曲函数	(51)
§ 4-2 约束扭转正应力及剪应力	(51)
§ 4-3 约束扭转微分方程式	(55)
§ 4-4 扇性几何特性	(56)
§ 4-5 约束扭转微分方程式的解	(60)
§ 4-6 开、闭口混合断面薄壁杆件的约束扭转	(65)
第五章 薄壁断面弯扭特性的数值计算方法	(68)
§ 5-1 引言	(68)
§ 5-2 扇性坐标的计算	(69)
§ 5-3 自由扭转剪流(布雷特剪流)的计算	(74)
§ 5-4 二次剪流的计算	(78)
§ 5-5 弯曲剪流的计算	(83)

第六章 图论在薄壁断面弯扭特性计算中的应用	(87)
§ 6-1 薄壁断面的图模型	(87)
§ 6-2 扇性坐标的计算	(91)
§ 6-3 自由扭转剪流(布雷特剪流)的计算	(93)
§ 6-4 二次剪流及弯曲剪流的计算	(95)
第七章 迁移矩阵法和有限元法	(99)
§ 7-1 引言	(99)
§ 7-2 迁移矩阵法的基本原理	(99)
§ 7-3 场迁移矩阵	(100)
§ 7-4 单元间的连续条件与点迁移矩阵	(104)
§ 7-5 翘曲相容因子	(106)
§ 7-6 有限元法的基本原理	(113)
§ 7-7 单元的约束扭转刚度矩阵	(115)
第八章 薄壁杆件的弯扭耦合分析	(123)
§ 8-1 引言	(123)
§ 8-2 位移、应变、应力和内力	(123)
§ 8-3 弯扭耦合微分方程式	(128)
§ 8-4 插值函数	(130)
§ 8-5 弯扭耦合刚度矩阵和等效节点力	(132)
§ 8-6 单元的组合	(135)
§ 8-7 翘曲相容矩阵	(138)
第九章 船体薄壁杆件弯扭分析程序及若干问题	(141)
§ 9-1 船体的弯扭分析及计算机程序	(141)
§ 9-2 纵向骨材的处理	(145)
§ 9-3 横向甲板条的附加刚度	(147)
§ 9-4 横向抗扭箱的附加刚度	(150)
第十章 薄壁杆件的稳定性	(152)
§ 10-1 概述	(152)
§ 10-2 开口薄壁杆件中心受压的稳定性	(152)
§ 10-3 开口薄壁杆件在弹性介质中的中心受压稳定性	(156)
§ 10-4 开口薄壁杆件偏心受压的稳定性	(158)
§ 10-5 开口薄壁杆件的侧向稳定性	(161)
§ 10-6 开口薄壁杆件绕定轴扭转时的侧向稳定性	(165)
§ 10-7 闭口薄壁杆件的稳定性	(170)
第十一章 薄壁杆件的塑性扭转	(174)
§ 11-1 引言	(174)
§ 11-2 薄壁杆件的始屈扭矩	(174)

§ 11-3 等断面直杆和开口薄壁杆件的极限扭矩	(176)
§ 11-4 闭口薄壁杆件扭转极限分析的基本概念及上下限定理	(179)
§ 11-5 闭口薄壁杆件的极限扭矩	(183)
§ 11-6 图论在薄壁杆件扭转极限分析中的应用	(186)
§ 11-7 薄壁杆件约束扭转极限分析	(191)
参考文献	(197)

绪 论

薄壁结构力学是薄壳力学的一个分支,它研究的对象是薄壁杆件,因此又称为薄壁杆件结构力学。所谓薄壁杆件(thin-walled bar)指的是这样一类薄壳结构,它们在一个方向上的尺度远大于另外两个方向的尺度,也就是说,薄壁杆件是长条形的,其长度远大于断面尺度,并且组成杆件的壁的厚度又远小于断面的宽度或高度。薄壁杆件的断面称为薄壁断面(thin-walled section)。结构工程中常用的一些型材,如工字钢、槽钢、钢管等都可看作是薄壁杆件。仅承受弯曲载荷的薄壁杆件又称为薄壁梁(thin-walled beam)。

在工程实际中,一些大型结构,如船体结构、飞机结构、桥梁结构、起重及车辆结构以及某些建筑结构等,都是由薄板或薄壳构成的。其长度大于断面尺度,因此在计算中也可当作薄壁杆件来处理。但这些结构的断面更为复杂,且断面沿长度方向还有可能变化,计算时显然会更加复杂。

薄壁断面有开口、闭口和混合三种形式。开口断面(open section)是单连通的,不存在封闭的闭室(见图0-1(a)、(b))。闭口断面(closed section)是多连通的,形成有封闭的闭室(见图0-1(c)、(d)、(e))。只有一个闭室的断面称为单闭室断面(single cell section,见图0-1(c)、(d)),有多个闭室的断面称为多闭室断面(multi-cell section,见图0-1(e))。兼有开口与闭口部分的断

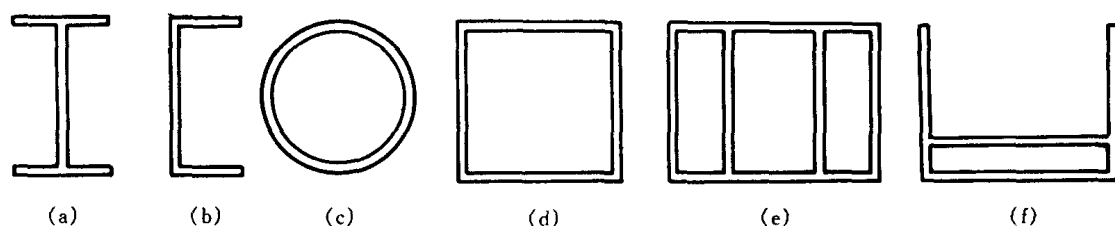


图0-1

面称为混合断面(mixed section 或 hybrid section,见图0-1(f))。

在外载荷作用下,薄壁杆件主要将发生弯曲和扭转。此外,当某些外载荷达到一定数值时,杆件还有可能发生失稳(屈曲)。所以,薄壁结构力学将主要研究薄壁杆件的弯曲、扭转和稳定性问题。

薄壁杆件的弯曲与扭转早期是分别考虑的。薄壁梁的弯曲理论建立在平断面假定的基础上,因此除了闭口薄壁梁的弯曲剪应力计算外,一般可以用材料力学的方法来解决。薄壁杆件的扭转分为自由扭转与约束扭转两种。自由扭转(free torsion)指的是杆件在扭转时不受任何约束,断面可以自由翘曲。自由扭转的理论是18世纪中叶由圣维南(St. Venant)提出的,所以自由扭转又可称为圣维南扭转。约束扭转(restrained torsion)时,杆件断面的翘曲受到约束,并在杆件内引起翘曲应力。在约束扭转时,杆件事实上同时又发生了弯曲,因此约束扭转又可称为弯曲扭转。铁木辛柯(Timoshenko)与符拉索夫(Власов)在19世纪初分别提出了开口薄壁杆件的约束扭转理论,其中符拉索夫的理论比较完整,它的基础是“刚周边假定”,即薄壁杆件在外载荷作用下变形时,断面的形状不发生变化,因此这个假定被称为符拉索夫假定。基于

同样的假定,本斯考特(Benscoter)及乌曼斯基(Уманский)提出了闭口薄壁杆件的约束扭转理论。

随着研究的深入,发现当薄壁杆件具有非对称断面而且剪切的作用不容忽视时,弯曲与扭转之间将发生耦合。最早发现这个问题的是梅勒特(Maillart),他引入了剪切中心的概念,从而解释了弯曲与扭转的耦合现象,这对工程结构有重要的实际意义。此外,为了研究薄壁杆件扭转的承载能力,还需要进行扭转塑性极限分析。那达依(Nadai)提出的“沙滩比拟”方法可以作为研究这个问题的基础。

薄壁杆件弯曲与扭转的耦合也反映在杆件失稳的情形之中。即使处于中心受压状态的直杆,由于断面的形心与剪切中心不重合,也将导致失稳时发生弯、扭耦合变形。对于开口薄壁杆件,由于其抗扭刚度相对较小,这个现象更为明显。因此研究杆件的弯、扭屈曲更有实际意义。薄壁杆件的稳定性理论主要是铁木辛柯建立的。

根据薄壁结构力学的基本原理,薄壁杆件的弯曲和扭转都与一些由断面的几何形状决定的断面弯扭特性参数有关。因此断面弯扭特性的计算也是薄壁结构力学的一个重要内容。尤其对于诸如船体之类断面形状复杂的杆件,断面特性的计算是十分复杂的。在薄壁结构力学中,对此已有专门研究,并形成了一整套系统的数值计算方法。这也是薄壁结构力学的一个重要特色。

对于大型、复杂的薄壁结构,有限元法已引入了扭转或弯扭耦合计算,将薄壁杆件沿长度方向划分成若干个单元,根据薄壁结构力学的基本原理建立单元刚度矩阵后,按一般有限元的步骤即可求解。川井忠彦(Kawai)首先将有限元法应用于船体扭转分析,并采用多项式扭角插值函数导出了单元刚度矩阵。贡劳格松(Gunnlaugsson)和彼得森(Pedersen)采用双曲函数形式的插值函数推导单元刚度矩阵,使这一方法得到进一步改进。有限元法计算的整个过程均可用电子计算机进行。实践证明,这是一种十分有效的计算方法,目前已在工程实际中得到广泛的应用。

本书将对上述内容作详尽的介绍,并主要以船体结构为对象来讨论。由于船体结构构件中有不少薄壁杆件,船体本身又是一个大型、复杂的变断面薄壁杆件,它既有典型性,又有一般性,因此书中所述可以推广应用到其他领域中的薄壁结构。

由于薄壁结构因重量轻、强度高而越来越广泛地应用于结构工程中,因此学习薄壁结构力学也具有更加重要的意义。

第一章 薄壁梁的弯曲

§ 1-1 薄壁梁的弯曲微分方程式及弯曲正应力

考虑一等断面薄壁梁,采用图1-1所示的直角坐标系,坐标原点在断面形心处, z 轴沿梁长, x 轴与 y 轴为断面的主惯性轴。在薄壁结构力学中,通常还采用沿断面薄壁中心线的自然坐标 s (见图1-1)。现在我们来推导薄壁梁的弯曲微分方程式。在薄壁梁的弯曲理论中仍采用熟知的“平断面假定”。先考虑 $yo z$ 平面内弯曲的情况。

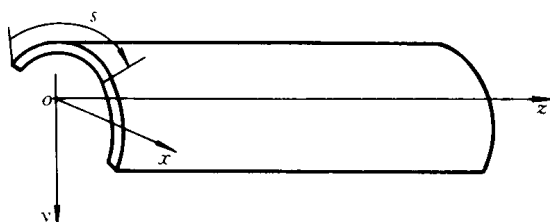


图1-1

从图1-2(a)中可以看到,由于平断面假定,断面上任意点 P 的轴向位移(沿 z 轴方向)为:

$$w(s, z) = -y(s)\theta_x(z) \quad (1-1)$$

从图1-2(b)中可以看到,梁弯曲后,断面上任意点 P 的切向位移(沿 P 点的切线方向 ξ ,即在 P 点处自然坐标 s 的方向)为:

$$\xi(s, z) = \beta(s)v(z) = \frac{dy(s)}{ds}v(z) \quad (1-2)$$

在以上两式中, v 为薄壁梁在 $yo z$ 平面内弯曲时的挠度,即断面形心沿 y 轴方向的位移,规定与 y 轴正方向一致时为正; θ_x 为弯曲时断面的转角,按图1-2那样选取坐标时,规定从 z 轴向 y 轴顺时针方向转动为正。

由此出发可得到轴向正应变和剪应变分别为:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -y\theta'_x \quad (1-3)$$

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{dy}{ds}(v' - \theta_x) \quad (1-4)$$

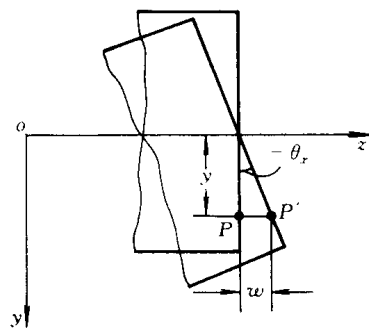
与一般结构力学中研究梁的弯曲问题时类似,我们先不考虑剪切的影响,令(1-4)式等于零,得到:

$$\theta_x = v' \quad (1-5)$$

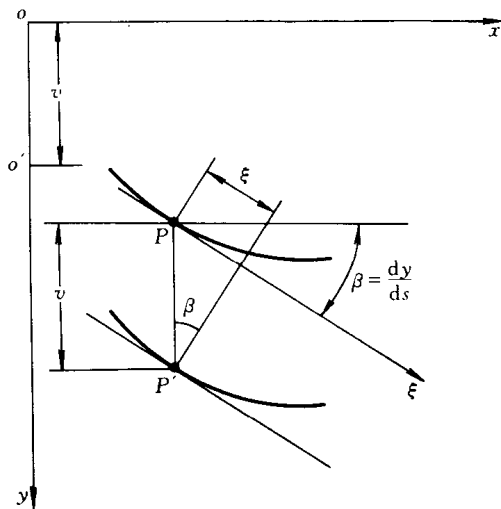
在材料符合虎克定律的假定下,计及(1-5)式,薄壁梁中的正应力可写成:

$$\sigma_z = E\epsilon_z = -Ey\theta'_x = -Eyv'' \quad (1-6)$$

断面上正应力的合力应等于该断面上的弯矩 M_x 。若规定图1-3中画出的弯矩、剪力和分布外



(a)



(b)

图1-2

力均为正方向*, 那么

$$M_x = - \int_A \sigma_z y dA = E \left(\int_A y^2 dA \right) v'' = EI_x v'' \quad (1-7)$$

式中 I_x 为断面绕 x 轴的惯性矩:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (1-8)$$

进一步列出图1-3所示微梁段的静力平衡方程式可得到:

$$\frac{dN_y}{dz} = q_y \quad (1-9)$$

和

$$\frac{dM_x}{dz} = N_y \quad (1-10)$$

将(1-7)式代入(1-10)式后得:

* 这里采用的符号规定与参考文献[5]中相同。

$$(EI_x v'')' = N_y \quad (1-11)$$

再代入(1-9)式得:

$$(EI_x v'')'' = q_y \quad (1-12)$$

上式就是薄壁梁在 yoz 平面内弯曲时的微分方程式。对于等断面梁,上式变成:

$$EI_x v^{IV} = q_y \quad (1-13)$$

实际上,上述推导得到的就是材料力学或结构力学中导得的梁的弯曲微分方程式。但这里为统一起见,在推导中采用了薄壁结构力学惯用的表示方法,即引入 s 坐标和切向位移 ξ 。以后在讨论薄壁杆件的扭转问题时,我们也将采用这样的表示法。

简单地对(1-13)式积分可得到挠度 v 的形式为:

$$v = f(z) + \frac{a}{6} z^3 + \frac{b}{2} z^2 + cz + d \quad (1-14)$$

式中:

$$f(z) = \frac{1}{EI_x} \int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z q_y dz^4 \quad (1-15)$$

常数 a 、 b 、 c 、 d 则根据边界条件来确定。

断面的转角、剪力和弯矩分别为:

$$\theta_x = v' = f'(z) + \frac{a}{2} z^2 + bz + c \quad (1-16)$$

$$N_y = EI_x v''' = EI_x [f'''(z) + a] \quad (1-17)$$

$$M_x = EI_x v'' = EI_x [f''(z) + az + b] \quad (1-18)$$

关于弯曲微分方程式的解以及边界条件这里不再详细讨论,可参阅参考文献[5]。

对 xoz 平面内的弯曲亦可作类似的推导。根据图1-4,断面的位移为:

$$w(s, z) = -x(s)\theta_y(z) \quad (1-19)$$

$$\xi(s, z) = \beta(s)u(z) = \frac{dx(s)}{ds}u(z) \quad (1-20)$$

弯曲微分方程式为:

$$EI_x u^{IV} = q_x \quad (1-21)$$

式中 I_y 为断面绕 y 轴的惯性矩,

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (1-22)$$

转角、剪力和弯矩分别为:

$$\theta_y = u' \quad (1-23)$$

$$N_x = EI_y u''' \quad (1-24)$$

$$M_y = EI_y u'' \quad (1-25)$$

其中 N_x 和 M_y 的正方向见图1-5。

现在来考虑梁中弯曲正应力的计算。对 yoz 平面内弯曲的情况,由(1-6)式和(1-7)式可

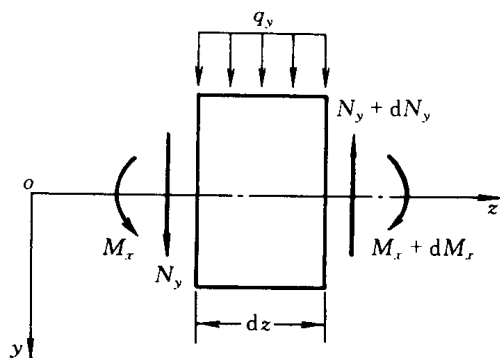
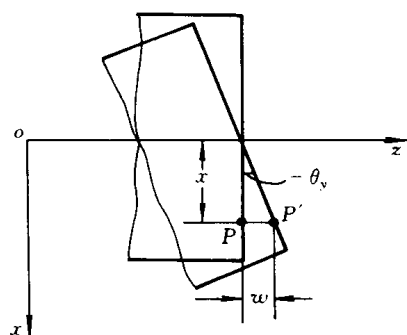
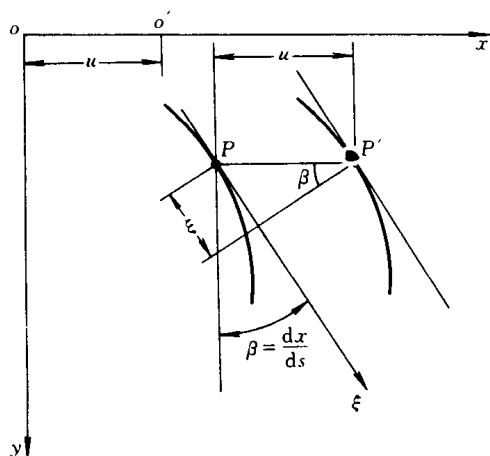


图 1-3



(a)



(b)

图1-4

得:

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x}y \quad (1-26)$$

同理对 xoz 平面内弯曲的情况有:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y}x \quad (1-27)$$

当薄壁梁在任意外载荷作用下弯曲时,我们可以将其分为在 yoz 平面内和 xoz 平面内的弯曲两部分来考虑,然后将结果叠加,于是有:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y}x - \frac{M_x}{I_x}y \quad (1-28)$$

此弯曲正应力公式无论对开口断面还是闭口断面的薄壁梁都是适用的。

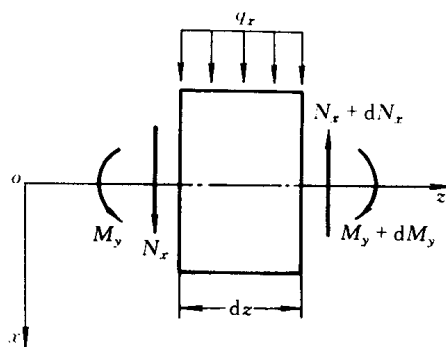


图1-5

§ 1-2 开口薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心

梁在弯曲时,一般来说断面中还有弯曲剪应力。对于薄壁断面,可认为剪应力沿壁厚是均匀分布的,并将剪应力 τ 与壁厚 t 的乘积称为剪应力流或简称为剪流,用 f 表示,即

$$f = \tau t \quad (1-29)$$

梁的弯曲剪应力是用来平衡相邻断面中的弯曲正应力的,因此弯曲剪流的计算公式要从梁中微块的静力平衡条件导得。我们仍先考虑在 $yo z$ 平面内弯曲的情况。

参阅图1-6,在梁中取出 $ds \times dz$ 的微块,这里 s 坐标的原点取在开口断面的端点,于是有 z 方向的力的平衡方程式:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \cdot t \cdot ds = - \frac{\partial(\tau t)}{\partial s} ds \cdot dz \quad (1-30)$$

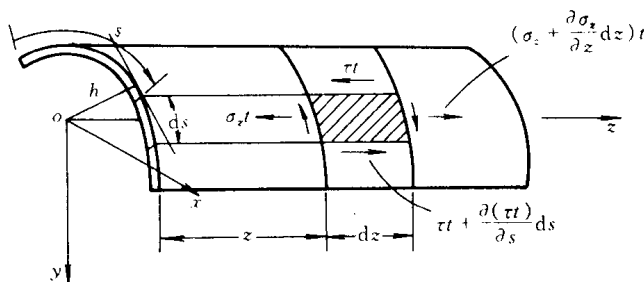


图1-6

由(1-26)式有:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{dM_x}{dz} \frac{y}{I_x} = - N_y \frac{y}{I_x} \quad (1-31)$$

故得:

$$\tau t = \frac{N_y}{I_x} \int_0^s y(s) t ds + C \quad (1-32)$$

式中 C 为积分常数,因 $s=0$ 处为开口断面的端点,无剪应力,故 $C=0$ 。再将断面中长度为 s 的面积对 x 轴的静矩记为:

$$S_x = \int_0^s y(s) t ds \quad (1-33)$$

则最后得梁在 $yo z$ 平面内弯曲时的剪流为:

$$f_y = \tau t = \frac{N_y S_x}{I_x} \quad (1-34)$$

这里需要特别注意剪流的方向。由于我们在上述推导中已假定了图1-6中微块上剪应力的正方向,故剪流的正方向亦应与之相符(见图1-7),即当断面的外法线方向与 z 轴方向相同时,该断面上剪流的正方向与 s 坐标的方向一致;当断面的外法线方

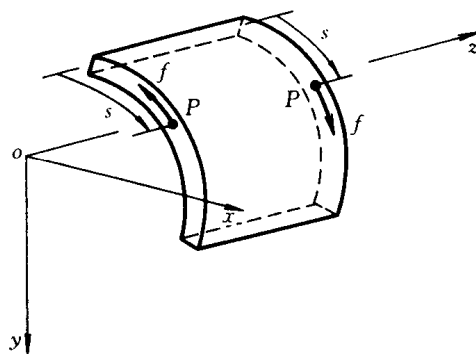


图1-7

向与 z 轴方向相反时,该断面上剪流的正方向与 s 坐标的方向相反。

同理可得梁在 xoz 平面内弯曲时的剪流为:

$$f_x = \tau t = \frac{N_x S_y}{I_y} \quad (1-35)$$

式中 S_y 为断面中长度为 s 的面积对 y 轴的静矩,

$$S_y = \int_0^s x(s) t ds \quad (1-36)$$

在一般情况下,梁断面上的弯曲剪流为在 xoz 平面内和 yoz 平面内弯曲时的剪流之和,即

$$f = f_x + f_y = \frac{N_x S_y}{I_y} + \frac{N_y S_x}{I_x} \quad (1-37)$$

梁断面剪流的合力的作用点就是断面的弯曲中心 $A(x_a, y_a)$, 弯曲中心亦称剪切中心。为计算弯曲中心的位置,要对断面建立一个等效力矩方程式,即弯曲剪流对断面上任一点的合力矩应等于该断面上剪力对同一点的力矩。为方便起见,我们对形心(原点) o 取矩。当梁在 yoz 平面内弯曲时有(见图1-8(a)):

$$\int_0^{s_1} f_y h ds = -N_y x_a$$

式中: s_1 为断面薄壁中心线的全长; h 为断面薄壁中心线上任意点处切线至断面形心的距离。将(1-34)式代入上式后即可得到:

$$x_a = -\frac{1}{I_x} \int_0^{s_1} S_x h ds \quad (1-38)$$

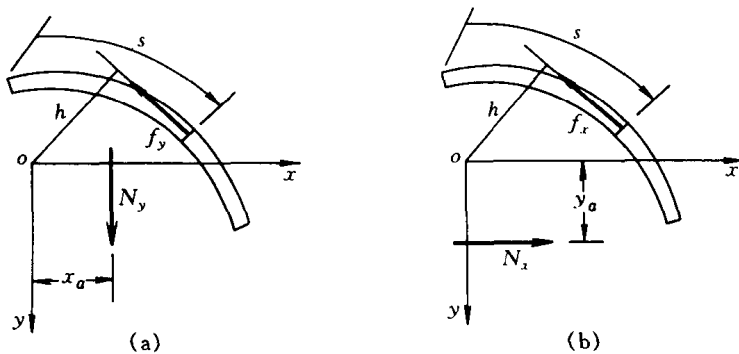


图1-8

类似地考虑梁在 xoz 平面内弯曲的情况,可列出(见图1-8(b)):

$$\int_0^{s_1} f_x h ds = N_x y_a$$

将(1-35)式代入后得:

$$y_a = \frac{1}{I_y} \int_0^{s_1} S_y h ds \quad (1-39)$$

这里要注意,当我们按图1-7那样规定了剪流的正向后,以上各式中的 h 是一个带有正负号的