Л. В. 康特洛维奇著

生产組织与计划中的数学方法

科学出版社

生产組織与計划中的数学方法

Л. В. 康特洛維奇 著

中国科学院力学研究所运筹室 譯

科 学 出 版 社

Л. В. КАНТОРОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ И ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Издание ленинградского
государственного университета
Ленинград, 1939

生产组织与计划中的数学方法

Л. В. 康特洛维奇著
中国科学院力学研究所运筹室译

*

科学出版社出版
北京朝阳門内大街137号
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1959年5月第一版	开本：850×1168 1/32
1966年7月第四次印刷	印张：2 5/8
印数：16,101—18,100	字数：64,000

统一书号：13031·1053
本社书号：1728·13—1

定价：[科五] 0.38 元

編者的話

“生产組織与計划中的数学方法”的作者Л. B. 康特洛維奇教授,是数学領域中卓越的專家。这部著作引起了純数学方面的兴趣,因为它找到了超出古典数学分析范圍的求极值的新穎方法。另一方面,在这著作中还給出数学方法在生产組織問題上的应用,因此值得各工業部門的工作者予以重視。

这本受到讀者注意的著作曾在国立列宁格勒大学数学力学研究所数学組的会議上討論过,得到了数学家們很高的評价。此外,大学校長办公室也邀請过工業工作者的專門会議,对著作的另一方面——它的实用价值——进行了討論。工業工作者一致表示对著作发生很大兴趣,并表示希望能很快的出版。

这本書的主要部分,是在上述工業工作者專門会議上所作的报告的內容,其中包括数学問題的提出以及指出归結为这种問題的工業、建筑業、运輸業及农業等部門中組織与計划的問題。闡述是以几个具体的、給出数据的例子来說明的。由于时間不够,并且作者是一个数学家而不是一个生产人員,所以,旣不可能增加这些例子的数量,也不可能把这些例子做得很現实、很正确。虽然如此,但我們認为由于这些例子說明了应用数学方法的条件及效果,它們对于讀者还是很有益的。

在这著作的三个附录[1]中,說明了并論証了按作者的方法解决所述极值問題的过程。

我們希望这本書在我們的社会主义工業的发展中,会起很有益的作用。

A. P. 馬尔琴柯

1) 附录1—附录3是屬于作者的;附录4—附录7是譯者添加的——譯者。

目　錄

編者的話
引言……………………………………………………………… 1
I. 按机床分配零件加工，使得在成套的条件下得到最大的生产率(基本数学問題的提出) ……………… 3
II. 在規定品种的条件下，保証最好地完成計划的生产組織 ……………………………………………… 9
III. 机器的最充分利用 ……………………………………12
IV. 最大限度地减少殘料 ………………………………15
V. 最充分地利用綜合性的原料 ………………………18
VI. 最合理地利用燃料 ……………………………………18
VII. 在現有建筑材料的条件下，最好地完成建設計划 ………19
VIII. 播种面积的最优分配 …………………………………21
IX. 最优运輸計划 …………………………………………22
結束語……………………………………………………………23
附录 1. 解乘数法………………………………………………28
附录 2. 在复杂的情况下問題A的解法(膠合板托拉斯的問題)……………………………51
附录 3. 理論上的补充(証明解乘数的存在)……………62
附录 4. 在整套及要获得最大生产率的条件下另件加工按机床的分配……………………………………65
附录 5. 在規定品种的条件下最大的生产量………………70
附录 6. 問題B解法范例…………………………………73
附录 7. 合理剪裁問題之一例……………………………76

引 言[1)]

第三个五年計划提出的巨大任务，要求在充分利用現有的工業儲备（原料、人力和裝备）的基础上取得最大的生产量。

提高車間、企業和整个工業部門的工作效率有兩条路：一条路是技术方面的各种改进，卽，在各个机床上的新裝置，改变工艺过程，找出新型的、好的原料等等；另一条路，暫时还較少利用的一条道路——在生产組織及計划方面求得改进。与此有关的，比方說，有下述一些問題：在企業中，各个机床或机器間如何分配工作的問題，按企業正确地分配定貨的問題，正确分配各种类型的原料、燃料等等問題。关于这点，在根据莫洛托夫同志的报告所作的第十八次党代会的决議中已有极其清晰的說明。决議中說到："在完成第三个五年計划中生产增長的任务时，最重要的条件是……广泛地开展运用最新技术及科学的生产組織的工作"[2)]。这里指出的也正是我們上面所說到的两个要点。与运用最新技术的同时，还应当强調指出科学的生产組織的作用。

正好在膠合板托拉斯試驗室交給国立列大数学力学研究所的問題解决之后，我发現屬于科学的生产組織的一系列問題，虽然它們具有各种不同的性質（例如，最好地給机床或机器分配工作，尽量減少廢料，最好地利用原料、当地材料、燃料及运輸能力等問題），但都归結为同一种数学問題（卽极値問題）。这种問題并不是直接屬于数学分析中所研究的問題；正确的說，形式上它們是屬于这类的，甚至形式上看起来也很簡單，但用数学分析方法来解的过程实际上完全不能用，因为这样求解需要解成千、成万，甚至上百

1) 这部著作的初稿，是作者于 1939 年 5 月 13 日在国立列宁格勒大学所做的报告的速記記录，經过很多的补充而成．出席这次报告会的还有工業研究所的代表．此外，这里还利用 1939 年 5 月 26 日在列宁格勒工業建筑工程研究所所作的和建筑有关的特殊問題的报告材料．

2) "布尔什維克"("Большевик") 1939, № 7, 14 頁．

万的方程組。

我成功地找到了解这类問題的一个一般的又比較簡單的方法，并且能应用到上面我所提过的一切問題上，相当簡單而又有效。这样一来，这类問題的求解在实际条件下就完全可行了。

我还想着重指出这样一点：我將要談到的大部分关于生产組織与計划中的問題，仅就苏維埃經济体系而言，而且在大半情况下，在資本主义社会的經济中是不会发生的。那里，产品的选定不是由計划决定，而由个别资本家的利益来决定。企業所有者决定生产那种商品，是看那个时候什么商品的价錢高，容易找到銷路，从而能得到很大的利潤而定。原料的选擇也不是看国家儲备的多少，而是看企業主是否可以廉价买到而定。充分利用裝备的問題在那里并不存在，因为大多数企業只动用了一半生产能力。

在苏联，卻是另一回事，所有一切并非受个别企業的利益和好处所支配，而是服从于完成国家計划的任务。

企業的主要任务是完成和超額完成包含在全国計划中的計划，并且，不仅要按照总指标，按照产品总产值、总重量来完成計划，还一定要按所有的产品种类完成計划；就是說，在品种方面，按各个类型的产品完成計划，在产量的成套性方面，滿足产品成套的要求等等。

必須成套地、按品种地完成計划，就是这一点，对我們来說极其重要，这是因为当我們提出求得产品最大产量这个問題的时候，我們应該把品种和成套性作为极重要的补充条件加以考虑。重要的还有，不随便武断地决定利用什么原料和材料，而要注意利用实际有的，特别是当地的材料，并依它在該地区生产的数量多少而定；应該說一下，我們的方法正好能够解决考虑到这些具体条件和情况的問題。

現在讓我們轉过来研究生产組織与計划中的各种具体問題，并闡述由它們引出的数学問題。

I. 按机床分配零件加工使得在成套的条件下得到最大的生产率（基本数学問題的提出）

为了說明即將討論的問題的性質，我举一个极为簡單的例子。由于它本身就很清楚、明了，因而求它的解并不需要任何特殊的方法。这例子將会起例証的作用[1]并帮助我們闡明問題的提法。

例 1. 在金屬制品零件加工中，銑的工作可以在不同的机床上进行——銑床，大为改进了的六角車床及六角自动机床。为了确定起見，我考察这样的問題：設有三个銑床，三个六角車床及一个自动机床；产品（我們考察最簡單的情况）則仅由两个零件組成。

每一种零件的产量是这样的：在銑床上，一个工作日里能够制出 10 个第一种零件或 20 个第二种零件；在六角車床上，是 20 个第一种或 30 个第二种；在自动机床上，是 30 个第一种或 80 个第二种。如果我們把全部机床数量同时考虑在内（銑床和六角車床各为三个，自动机床是一个），那么，在一个工作日里，我們能够在每組机床上制出 30+60+30 个第一种零件，在所有机床上共 120 个；或者制出 60+90+80=230 个第二种零件（看表 1）。

表 1　机床的生产率

机床組	机床数	每个机床的生产率		总的生产率	
		零件 I	零件 II	零件 I	零件 II
銑床	3	10	20	30	60
六角車床	3	20	30	60	90
自动机床	1	30	80	30	80

1) 因为这个例子起着純粹例証的作用，所以我們并不企图做到使它很現实，即不选擇在实际中能够遇到的情况和数据。

現在我們需要解决这样的問題，卽要想获得最大的生产率，在一个工作日中，該給这些机床以多少負荷的工作分担問題；同时，重要的不仅是生产最大数量的零件，而且还要找出使成套产品的出产量达到最大的方法（这里是兩个零件組成一套）。于是，我們应該这样来选定每个机床的工作时間，使得我們获得最大数量的成品。

如果解决这問題时，不注重于最大量，只要求成套，那么，可以在每个机床上，以同样数量生产兩种零件。为了这点，只要分定每一机床在工作日里生产同样数目的兩种零件就行了。于是，銑床可以生产 20 个第一种零件和 20 个第二种零件，事实上，在銑床上生产 20 个第二种零件相当 10 个第一种的。六角車床可以生产 36 个第一种的和 36 个第二种的，自动机床生产 21 个第一种的和 21 个第二种的，而全部机床的总生产能力为 77 个第一种的和 77 个第二种的，卽 77 套（看表 2）。

現在要在这个例子里找出最合适的工作方法。在这里比例不同，在銑床上，一个第一种的相当于兩个第二种的；在六角車床上，这比例为 2:3；在自动机床上，是 3:8。这点可用不同的原因来解說，某一个工序在所有机床上用去同样多的时間，另一个工序則可能在自动机床上以五倍于銑床上的速度进行，等等；就是由于这种原因，加工同样零件时，这些比例对于不同的机床常常不同。一种零件在某一种机床上制造比較好，而另一种零件又在另一种机床上制造比較好。

考察这些比例，立卽引出解。应該在制造第一种零件最有利的机床上加工第一种零件（卽六角車床上），而第二种零件則应該在自动机床上加工；至于銑床，則在它們中間应該生产一些第一种零件也要生产一些第二种零件，但所生产兩种零件的数目应該这样来划分，卽使得总合起来第一种零件数和第二种零件数一样。

如果按照这方法进行分配，那么，数字是这样的：在銑床上，26 和 6；在六角車床上，只生产 60 个第一种零件，不生产第二种的；在自动机床上，生产 80 个第二种零件，根本不生产第一种零件。

总计得 86 个第一种零件和 86 个第二种零件(表 2).

表 2　按机床来分配零件的加工

机床组	最简单的解		最有利的解	
	零件 I	零件 II	零件 I	零件 II
铣床	20	20	26	6
六角车床	36	36	60	—
自动机床	21	21	—	80
套数	77	77	86	86

因此,如果这样的重新分配生产,那么由于这样做我们得到了虽不很大但却很重要的效果——增加产量 11%;这时生产能力的增长不发生任何耗费.

然而这问题只有在这样简单的情况下——有三个机床和两种零件,才能如此容易地从初等设想中找到解答. 实际上,在多数情况下,事情要复杂得多,我们未必能按照合理的设想简单地找到解. 难于相信,普通的工程师不用任何计算就能猜中这样的解.

为了说明它引向怎么样的数学问题,我将以更一般的形式来考察这问题. 在这里,先举几个与制造由几个零件组成的产品有关的数学问题. 至于我在上面提到的数学方法所能应用的其它领域,则从数学问题上看来也是一样的(表面上问题属于各种不同类型,但在数学的解法上却是一样的——译者注),所以在其它的情况下,我只要指出事情归结为那一种问题就够了.

我们来考察一般的情况:设有 n 个机床,在这些机床上制造由 m 个不同的零件组成的产品. 假定在第 i 个机床上加工第 k 种零件,一天能生产 $\alpha_{i,k}$ 个零件. 这些是已知的(注意,如果在第 i 个机床上不能加工第 k 种零件,则应认为相应的 $\alpha_{i,k}=0$).

现在我们需要干什么呢?需要适当地按机床来分配零件的加工,以制造出最多套数的零件. 以 $h_{i,k}$ 表示在第 i 个机床上生产第 k 种零件的时间(以占一工作日的份额表示). 这时间是未知的,它应该根据得到最大产量的条件来确定. 确定 $h_{i,k}$ 有这样一些条件.

首先，$h_{i,k}\geqslant 0$，即非負的；实际上，这个条件是很显然的，但我們也应該指出，因为它在数学上处于重大的难于处理的位置。注意，对于每一个給定的 i，和 $\sum\limits_{k=1}^{m} h_{i,k}=1$。这条件表示在第 i 个机床上生产所有零件的时間总計为一个工作日；其次，由于每一个乘积 $\alpha_{i,k}\,h_{i,k}$ 是在第 i 个机床上生产第 k 种零件的数量，所以所生产的第 k 种零件的总数是 $z_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}h_{i,k}$。为了要得到成套的产品，我們应該要求这些数彼此相等，即 $z_1=z_2=\cdots=z_k$。这些数的共同值 z 确定了产品数，它应該是最大的。

这样說来，我們的問題的解引向下述的数学問題。

数学問題 A。根据下述条件确定 $h_{i,k}$ $(i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,m)$：

1) $h_{i,k}\geqslant 0$；

2) $\sum\limits_{k=1}^{m} h_{i,k}=1\ (i=1,\ 2,\cdots,n)$；

3) 如果采用符号 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i,k}\,h_{i,k}=z_k$，則 $h_{i,k}$ 該这样来选擇：使得 $z_1, z_2,\cdots, z_m$ 彼此相等，同时 $z=z_1=z_2=\cdots=z_m$ 具有最大的可能值。

如果在零件的加工中要求有几道工序，并且每一道工序可以在几个机床上进行，那么，在机床上分配对一个零件进行的不同工序的問題完全同样地会引向数学問題 A。在这里，差别只是現在 $\alpha_{i,k}$ 已表示第 i 个机床上进行第 k 道工序数，而 $h_{i,k}$ 是指第 i 个机床上进行第 k 道工序所用的时間。

数学問題 A 可能有几个不同形式。

例如，我們要做的不是一种产品而是兩种产品，那么，要做組成第一种产品的零件和組成第二种产品的零件。以 z 表示第一种产品的件数，以 y 表示第二种产品的件数。如果我們对品种沒有規定，只要求最大的总产值，那么，如果第一种产品的价值为 a 盧布，第二种产品的价值为 b 盧布，显然我們应該去求 $az+by$ 的最大值。

另一种問題。如果还有其他限制条件，例如，在加工时每个过程都有各自的电力消耗量。令在 (i,k) 过程中（即在第 i 个机床上加工第 k 种零件）电力的消耗量为每工作日 $c_{i,k}$ 瓩-时，于是，总的电力消耗为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} h_{i,k}\,c_{i,k}$，我們可以要求这数不超过固定的数 C，

即我們拥有的电力。

这样一来,可以轉入下面一个数学問題。

数学問題 B. 根据数学問題 A 的条件 1),2),3)及条件 4) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{i,k} h_{i,k} \leqslant C$,求 $h_{i,k}$.

注意,$c_{i,k}$ 在这情况下也可以表示其他的数量,例如,在(i,k)过程中服务的人員数。于是,如果我們拥有确定的人-日数,那么,这也將是限制的条件,并引向問題 B. 同样,如果需要的話,用水量不能超过我們备有的一定量,那么,在每个过程中用水量也可以作为一个限制的条件。

另一个問題,即数学問題 C,有如下述。假定在同一个机床上可以同时加工几个零件(或对一个零件进行几道工序),在这情况下,我們可能以几种不同的方式来組織生产过程。一种方式——在这个机床上加工这三个零件;另一个方式——可能在它上面加工其他两个零件;如此等等。于是問題又复杂了一些,就是說,以第 l 种方式組織生产,假設我們在第 i 个机床上一个工作日可以得到 $\gamma_{i,k,l}$ 件第 k 种零件,即我們同时得到 $\gamma_{i,1,l}$ 件第 1 种零件,$\gamma_{i,2,l}$ 件第 2 种零件,等等(有些 $\gamma_{i,k,l}$ 可能是零)。

于是,如果以 $h_{i,l}$ 表示按第 l 种方式在第 i 个机床上工作的未知时間,那么,在所有机床上生产的第 k 种零件的件数 z_k 表达起来就比以前的方式更为复杂了,即 $z_k=\sum_{i,l}\gamma_{i,k,l}h_{i.l}$。但問題依然归結为:在 $z_1=z_2=\cdots=z_m$ 的条件下,求最大套数 z。于是得数学問題 C。

数学問題 C。根据下述条件求 $h_{i,l}$:

1) $h_{i,l}\geqslant 0$;

2) $\sum_{l} h_{i,l}=1$;

3) 如果令 $z_k=\sum_{i,l}\gamma_{i,k,l}h_{i,l}$,那么,必須使 $z_1=z_2=\cdots=z_m$ 并使其共同数 z 得到它的最大可能值。

此外,問題还可能有这种不同形式:它允許不成套的生产,例如,不足的零件需按較貴的价格續購,或者多余的零件要比整套的便宜些,因而整套的数目在評定产值时起着重要的作用。然而我

將不提到所有类似的情况。

現在我將談一些关于解这些数学問題的方法問題。我曾說过，一般的数学方法所指出的途徑，实际上怎么也不能用。我最初找到的几个特殊的方法，它們較为有效，但还是十分复杂。在这以后，我成功地找到一种非常有效的方法，它既可应用于解数学問題A，B，C，也可用于其它这种类型的問題。这方法就是解乘数法。先講一講它的思路。为了确定起見，我以問題A来講。方法基于下列事实：原来对应于每一种零件存在着这样一些乘数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，只要找到了它們，問題就差不多解决了；也就是說，如果对每一个給定的 i 来考察乘积 $\lambda_1\alpha_{i,1}, \lambda_2\alpha_{i,2}, \cdots, \lambda_m\alpha_{i,m}$，并把那些具有最大乘积的 k 分出，則对于其余所有的 k，可以令 $h_{i,k}=0$。至于說到那些分出来的不多的 $h_{i,k}$，它們易于从下述条件 $\sum\limits_{k=1}^{m} h_{i,k}=1$ 和 $z_1=z_2=\cdots=z_m$ 来确定。这样求到的 $h_{i,k}$ 就給出 z 的最大値——也就是問題的解。于是，不用去求很大数目的 nm 个未知数 $h_{i,k}$，可以只去寻找 m 个未知数 λ_k；在具体情况下，例如，代替32，只要找4个未知数(参看下面的例2)。至于乘数 λ_k，它們不怎么困难地用逐次逼近法就可以求得。整个解是比較簡單的，而且并不比普通的工程演算复杂。根据情况的复杂性，解的过程可能要一刻鐘到5、6个鐘点。

在这里，我不准备講这解法的細节，只談談它的主要之点。这个解法在实际上是完全可行的，至于解的檢查，那更簡單。如果解找到了，大約在10—15分鐘內就可以檢查出它的正确性[1]。

我还想指出一个有实际意义的事实，即在求得的解中，数 $h_{i,k}$ 大部分是零。正因为这样，每个机床在一天內只做一兩种零件，也就是，实际上行不通的解是得不出的，譬如 $\frac{1}{2}$ 小时机床加工一种零件，而 $\frac{3}{4}$ 小时加工別种零件。实际上，用这种方法得出的解是非常适当的解：大部分机床整天加工一种零件，而只有兩三部机床在一天內要有一次調換。为了得到同样数量的各种零件，后者是完全必要的。

---

1) 通过数字的例子对解法所作的补充說明(特别是某些在报告中談到的問題的解)，請看附录1"解乘数法"。

这里所研究出来的、在成套的条件下得到最大产量的問題的解，在我看来，它很可以应用于大多数金屬加工工業及木材加工工業的企業中，因为在这兩种场合下，都有以不同的生产率进行同样工作的各种机床，正因为如此，所以就发生了对各机床进行最合理地分配工作的問題。

进行这样的分配，只有在大量生产的組織中才有意义和有可能。对于單个产品来說，不需要考虑在每个机床上要繼續多久地加工每种零件，而且寻求这个解也不会有什么意义。可是在金屬加工工業和木材加工工業中，多是大批生产的情况。

II. 在規定品种的条件下，保証最好地完成計划的生产組織

不必談在計划經济的条件下按品种完成計划的意义了。我們只談不按品种完成計划，即使按总指标（产值、吨数）完成了計划，还是不允許的。这使得生产一种产品的物資积压、停滞，而生产另一种产品的物資卻严重不足，“这能够使与其有关的企業的工作发生很大的困难甚至于遭受破坏”。因此，完成計划的，超額完成計划的，即使未完成計划的也好，都必須保持国家所規定的各种产品間的比例。通常，沒按品种完成計划是許多企業的过失。因此，为保証規定品种的产品达到最大产量而組織生产的問題具有很大的現实意义。

在下述条件下来考察这个問題。假定有 n 个机床（或机床組），它們可以用来制造 m 种产品；又設第 i 个机床的生产能力是每个工作日生产 $\alpha^*_{i,k}$ 單位 k 种产品。各种产品間的比例給定为

$$p_1:p_2:\cdots:p_m,$$

要求在这样的条件下能够保証最大产量地来組織机床的工作。于是，如果以 $h_{i,k}$ 表示第 i 个机床（或机床組）制造第 k 种产品的时間，則为了确定 $h_{i,k}$，有下列条件：

$$1)\ h_{i,k}\geqslant 0;\ 2)\ \sum_{k=1}^{m} h_{i,k}=1;\ 3)\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h_{i,1}\alpha^{*}_{i,1}}{p_1}=\cdots=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} h_{i,m}\alpha^{*}_{i,m}}{p_m},$$

并且最后一比数的共同值应大到最大值。现在只要令

$$\alpha_{i,k}=\frac{1}{p_k}\alpha^{*}_{i,k},$$

最后的条件就成了数学問題 A 中条件 3)的样子，这样一来，問題又轉到前面所考察过的数学問題 A 了。

例 2. 我开始作这种工作所考虑的第一个問題，也是膠合板托拉斯中央試驗室所提出的，正好就屬于在給定产品品种下要求最大产量的一类問題。这个具体的例子我們已經解决了，不久前这工作也交給試驗室了。情况是这样的：有八个剝切机和五种名目的材料。每个机床对每种名目材料的生产率，如表 3 所示。

表 3

机床号	名目				
	1	2	3	4	5
1	4.0	7.0	8.5	13.0	16.5
2	4.5	7.8	9.7	13.7	17.5
3	5.0	8.0	10.0	14.8	18.0
4	4.0	7.0	9.0	13.5	17.0
5	3.5	6.5	8.5	12.7	16.0
6	3.0	6.0	8.0	13.5	15.0
7	4.0	7.0	9.0	14.0	17.0
8	5.0	8.0	10.0	14.8	18.0

在这样的条件下，也就是第一种名目的材料佔 10%，第二种佔 12%，第三种佔 28%，第四种佔 36%，第五种佔 14%，应該如何分配工作，才能保証最大的产量。

A. И. 尤金按照我們的方法[1]所找到的这个問題的解，归結为求 $h_{i,k}$ 值——按每种名目的材料来进行工作时間的分配（佔一个工作日的多大份額）（参看表 4）。

1）解这个問題的步驟，將在附录 2 中詳細說明。

由于所有机床的工作条件差不多是一样的(比較一下表3中每列的数字,可以看出相差不大——譯者註),从收效的观点看,这里的計算并没有太大好处;但是比起直观的解(如果在每一机床上保持着品种的比例),产品产量仍然大5%。在其他场合下,机床的生产率依材料种类有較大的变化,这样的解就会得到比較大的效益。可是,不需要任何耗費而使生产率增加5%仍然是有实际意义的。

表4

机床号	名目				
	1	2	3	4	5
1	0	0.3321	0	0	0.6679
2	0	0.9129	0.0871	0	0
3	0.5744	0	0.4256	0	0
4	0	0	0.9380	0.0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0

其次,我还想說說这問題对企業协作的意义。在前面說到的生产兩种零件的例子(第I节)中,在不同的机床上,我們得到了不同的零件加工量間的比例。可能有这样的情况:在一个企業A必須做这样数量的第二种零件,或者拥有的机床数目具有这样的比例,使得比其它机床有利于生产第二种零件的自动机床不得不做一部分第一种零件;而另一个企業B则相反,在最有利于做第一种零件的六角車床上要做一部分第二种零件。于是显然,这些工厂协作是較有利的,这样可以把一部分第一种零件的任务从工厂A轉移到工厂B,而把一部分第二种零件的任务从工厂B轉移到工厂A。在簡單的情况下,这問題可用初等方法解决,然而在复杂的情况下,关于工厂之間什么时候宜于协作,应該怎样协作的問題就可以用我們的方法求解。

托拉斯或部門給各企業分配計划也有这种情况。如果分配得

合理，即每个企業所分的生产任务最宜于它的裝备，就会大大地增加产品产量。这个論題自然是大家所熟知的，大家所公認的，但通常，当問題进行解决时，不会有清楚的指示：某种产品用何种設备更合适。在足够的已知数据条件下，我們的方法能給出正确解决这种問題的确定方法。

III. 机器的最充分利用

許多工作可用同样的机器进行。例如，作土工就有許多方法，用来掘土的有下列机器：斗式挖掘机，开溝机，擺式戽斗，水力冲泥机——一系列的各种系統各种形式的掘土机；在不同条件下，它們有不同的效率。效率与土壤的类型、地槽的規模、已掘出来的土方的运輸条件等等有关。例如，溝渠宜于用一种掘土机，深的地槽宜于用另一种，淺的地槽用第三种；用一种掘土机挖沙較适合，而粘土宜于用另一种，等等。每种机器进行每种工作的效率依所有这些条件而定。

現在来看这样的問題：总的工作是給定的，具备的机器总額也是給定的，要求这些工作在一个最短期間完成。如果不具备某种机器，或者它已經过載荷，即使它最宜于做該項工作，也还是沒法用它。然而，关于最合理地配置机器来使得在給定的具体条件下得到最大可能的生产率这一問題是可以解决的。象前面兩种情況一样，列出条件后，可以証实問題的解会归結为数学問題A的解。

現在我們用兩个具体的例子来說明这些一般見解。第一个与土工有关，第二个与木工有关。

例 3. 有三种土工(I,II,III)和三个掘土机(A,B,C)。每一种工作的任务都是 20,000 土方。如何分配这些工作給掘土机才最合理？进行每种工作的工作定額(方/时)見表 5 (以粗体字标出)。

用我們的方法求出的机器的最合理配置，在同一个表中表示了，即在每个方格中右边的数字表示每个机器应做相应类型工作的时間；例如，掘土机A应以 190 小时做第 I 种工作，以 92 小时做