数学奥林匹克竞赛题精解

——献给中学同学（修订本）

中兴 大海 书云 编

電子工業出版社

数学奥林匹克竞赛题精解

——献给中学同学

（修 订 本）

中兴、大海、书云 编

電子工業出版社

（京）新登字 055 号

内 容 提 要

本书精选中学数学中最重要的习题分类编写，旨在提高学生分析问题和解决问题的能力．其内容包括：选择题、填空题、代数、几何与三角、整数，这些题目大多出于专家之手，构思巧妙，题目新颖别致，富于思考性与趣味性．每一题都给出了解答，有些题还给出了多种解法，解法不落俗套．

本书供参加奥林匹克数学竞赛的中学生及一切想提高数学能力的广大中学同学和数学教师阅读．

数学奥林匹克竞赛题精解

——献给中学同学

（修订本）

中兴、大海、书云　编

责任编辑　詹善琼

*

电子工业出版社出版（北京万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

中国科学院印刷厂　印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：14.25　字数：320 千字

1992年 8 月第一版　　1992年 8 月第一次印刷

印数：1—12000册　　　定价：8.00元

ISBN 7-5053-1681-8/G·126

前　　言

学好数学的一个重要途径是解一定数量的习题，解题不仅能激发我们对数学的兴趣，而且还能提高解题的本领．解哪些题目呢？近几年来，各种类型的习题集纷纷出版，在如此浩瀚的题目中精选出适合学生练习的题目，也要耗费教师和学生的精力和时间，特别是在学生熟习了数学的基本题目之后，要寻找一些提高自己能力的题目，更不易把握其题目的数量与质量．为此，我们试编了此书．

本书汇集了近几年来国内外各类习题集、杂志、报刊、数学竞赛中出现的适合中学生作的题目，分类编写，并作了详细解答．这些题目对我们的智力要求是较高的，解答它们绝非是一帆风顺的，有不少题目的解答甚至需要付出艰苦的劳动．但是，我们相信，富有创造性的、有强烈愿望、兴趣与好奇心的同学们一定能发挥自己的聪明才干，克服层层障碍，攻克一个个难题．

如果本书能给同学们和老师们带来一点裨益的话，将给我们以极大的欣慰．

因我们水平有限，编写又很仓促，缺点与错误在所难免，恳请读者批评指正．

编者

1989 年 5 月 24 日

目　　录

第一章　选择题

说明： 以下各题，每一小题都有若干个答案，其中只有一个答案是正确的，请把正确的答案找出来。

1. a、b 为实数，下面五个命题中正确的是 3

(A) 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$；(B) 若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$；(C) 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$；(D) 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$；(E) 若 $a\neq|b|$，则 $a^2\neq b^2$。

2. 多项式 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除，则 a/b 的值为

(A) -2；(B) -12；(C) 6；(D) 4；(E) 3。

3. 若 $a-b=2$，$b-c=\sqrt[3]{7}$，则 $(c-b)[(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]$ 的值为

(A) 1；(B) -5；(C) 9；(D) 15；(E) 以上答案都不对。

4. 二质数 p、q 为整系数方程 $x^2-99x+m=0$ 的二根。则 $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}$ 的值为

(A) 9413；(B) $\dfrac{9413}{194}$；(C) $\dfrac{9413}{99}$；(D) $\dfrac{9413}{97}$；(E) 以上答案都不对。

5. 若 $a>b>c>0$，$l_1=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$，$l_2=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$l_3=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$，则积 l_1l_3、l_2l_3、l_1l_2、l_2^2、l_3^2 中最小的一个是

(A) I_1I_3； (B) I_2I_3； (C) I_1I_2； (D) I_2^2； (E) I_3^2。

6. 方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小一个根的负倒数为

(A) -1； (B) $-\frac{1}{2}$； (C) $\frac{1}{2}(3+\sqrt{7})$； (D) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{7})$； (E) $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$。

7. 某次数学测验共10道选择题，评分办法是：每一题答对得4分，答错得 -1 分，不答得0分。

如果这次测验至多有 n 种可能的成绩，则 n 应当等于

(A) 42； (B) 45； (C) 46； (D) 48； (E) 以上答案都不对。

8. 对 $a>b>c>0$，$m>n>0$（m,n 为整数）成立的关系式是

(A) $a^mb^n>b^mc^n>c^na^m$； (B) $a^mb^n>c^na^m>b^nc^m$； (C) $a^mc^n>a^mb^n>b^nc^m$； (D) $b^nc^m>c^na^m>a^mb^n$； (E) $a^mc^n>b^nc^m>a^mb^n$。

9. 有一个正数 x 恰满足下面四个条件中的三个

(甲) $|x-2.5|<1.5$； (乙) $\sqrt{x^2+x+1}$ 不是整数； (丙) x 是整数； (丁) $\log_x 10>2$。

则 x 不满足的条件为

(A) 甲； (B) 乙； (C) 丙； (D) 丁； (E) 以上答案都不对。

10. 由甲乙两站分别同时对开第一辆电车后，每隔6分钟再同时对开一辆，如果电车是匀速前进，需30分钟到达对方站，有一乘客乘坐从甲站开出的第一辆电车到乙站，则乘客在途中遇到从乙站开来的电车有

(A) 4辆； (B) 5辆； (C) 6辆； (D) 10辆。

11. 甲、乙、丙、丁、戊、巳六个队进行单循环赛（每个球队分别与其他各队比赛一场且只比赛一场），当比赛到某一天时，统计出甲、乙、丙、丁、戊五个队分别已经比赛了5、4、3、2、1场。由此可知，还没有与乙队比赛过一场的队是

(A) 丙；(B) 丁；(C) 戊；(D) 巳。

12. 已知 x、y 分别为 a 位、b 位正数，它们常用对数的尾数之和大于1，则它们的积 xy 是

(A) $a+b$ 位数；(B) ab 位数；(C) $a+b-1$ 位数；(D) 以上答案都不对。

13. 如果 a、b 皆为自然数，a 除以7余2，b 除以7余5。当 $a^2>3b$ 时，a^2-3b 除以7的余数为

(A) 1；(B) 3；(C) 4；(D) 6。

14. 如果 $a=\log_2[\log_4(\log_8 4000)]$，则

(A) $a>0$；(B) $a=0$；(C) $a<0$；(D) a 无意义。

15. 方程 $x^2+1984513x+3154891=0$

(A) 没有实数根；(B) 有整数根；(C) 有正数根；(D) 二根的倒数之和小于 -1；(E) 以上答案都不对。

16. 下列哪一个数一定不是某个自然数的平方（其中 n 为自然数）：

(A) $3n^2-3n+3$；(B) $4n^2+4n+4$；(C) $5n^2-5n-5$；(D) $7n^2-7n+7$；(E) $11n^2+11n-11$。

17. 当 $a<b<c$，且 $x<y<z$ 时，下列四个代数式中值最大的一个是

(A) $ax+by+cz$；(B) $ax+cy+bz$；(C) $bx+ay+cz$；(D) $bx+cy+az$。

18. 如果 $p(p\geqslant 5)$ 是一个质数，而 p^2-1 除以24没有余数，则下列情况正确的是

(A) 决不可能； (B) 只是有时可能； (C) 总是可能的； (D) 只有当 $P=5$ 时可能。

19. 已知 x_1 与 x_2 为方程 $x^2+px+4=0$ 的二不相等的实根。判断下列结论哪个正确

(A) $|x_1|>2$ 且 $|x_2|>2$； (B) $|x_1+x_2|>4$； (C) $|x_1+x_2|<4$； (D) $|x_1|=4$ 且 $|x_2|=1$； (E) 以上答案都不对。

20. 若 $S=(1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})(1+2^{-\frac{1}{8}})(1+2^{-\frac{1}{4}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{2}})$，则 S 等于

(A) $\frac{1}{2}(1+2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$； (B) $(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$； (C) $1-2^{-\frac{1}{32}}$； (D) $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})$。

21. 若 $|x-\log_a y|=x+\log_a y$，其中 x 和 $\log_a y$ 为实数，则

(A) $x=0$； (B) $y=1$； (C) $x=0$ 且 $y=1$； (D) $x(y-1)=0$； (E) 以上答案都不对。

22. 已知 $abcd>0$，$a<c$，$bcd<0$. 则

(A) $a>0$，$b>0$，$c<0$，$d>0$； (B) $a<0$，$b<0$，$c>0$，$d<0$； (C) $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d<0$； (D) $a<0$，$b>0$，$c<0$，$d>0$； (E) $a>0$，$b<0$，$c<0$，$d<0$。

23. $5-\sqrt{3}$ 的整数部分为 x，小数部分为 y. 则 $2x^3-\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$ 的值为

(A) 2； (B) -2； (C) $\sqrt{3}+2$； (D) $2+3\sqrt{3}$； (E) $2-6\sqrt{3}$。

24. 有多少个大于 10 小于 100 的整数，当数字交换位置后得到的数比原来增加 9?

(A) 0; (B) 1; (C) 8; (D) 9.

25. 已知 $\log_x a = a$（a 为大于 1 的正整数），则 x 的值为

(A) $10^{a\lg a}$; (B) $10^{\frac{\lg a}{a^2}}$; (C) $10^{\frac{\lg a}{a}}$; (D) $10^{a\lg\frac{1}{a}}$.

26. 如果 $a < b$，则 $\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$ 等于

(A) $(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$; (B) $(x+a)\cdot\sqrt{(x+a)(x+b)}$; (C) $-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$; (D) $-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$.

27. 如果关于 x 的方程 $||x-2|-1|=a$ 有三个整数解，则 a 的值为

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

28. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数（例如$[\sqrt{5}]=2$）。令 n 为自然数，且

$$I=(n+1)^2+n-[\sqrt{(n+1)^2+n+1}]^2.$$

则

(A) $I>0$; (B) $I<0$; (C) $I=0$; (D) 当 n 取不同的值时，以上三种情况都可能出现。

29. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若

$$y=4\times\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$$

且当 $x=1, 8, 11, 14$ 时，$y=1$。

$x=2, 5, 12, 15$ 时，$y=2$。

$x=3, 6, 9, 16$ 时，$y=3$。

$x=4, 7, 10, 13$ 时，$y=0$。

则表达式中的 u 等于

(A) $\frac{x+2}{4}$； (B) $\frac{x+1}{4}$； (C) $\frac{x}{4}$； (D) $\frac{x-1}{4}$。

30. 已知 a、b 为二不相等的正数，下列三个代数式

① $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$； ② $\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$； ③ $\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2$ 中最大的一个为

(A) ①； (B) ②； (C) ③； (D) 与 a、b 的取值有关但不确定。

31. 当 $k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$\sqrt{|1-x|}=kx$ 的解的个数为

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3； (E) 4。

32. 如果 $abc=1$，则

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}$$

的值为

(A) $\frac{1}{3}$； (B) 1； (C) $1\frac{1}{2}$； (D) 3。

33. 方程 $x^2+px-3=0$ 与方程 $x^2-4x-(p-1)=0$ 有公共根，则 p 的实数值为

(A) -4； (B) -2； (C) 0； (D) 2； (E) 4。

34. 如果 a、b 为满足不等式 $b<a<2b$ 的二正数；则方程组

$$\begin{cases}|x+y|+|x-y|=a\\|x|+|y|=b\end{cases}$$

的解的组数为

(A) 2 组； (B) 4 组； (C) 6 组； (D) 8 组。

35. 设 $y=ax+2a+1$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时 y 的值有正有负，则实数 a 的范围是

(A) $a\geqslant -\frac{1}{3}$； (B) $a\leqslant 1$； (C) $a>-1$； (D) $a<-\frac{1}{3}$； (E) $-1<a<-\frac{1}{3}$。

36. 当 $0<x<1$ 时，x 的一次函数 $y=m(x-a)$（此处 $m>0$）都是正数，则应取

(A) $a\leqslant 0$； (B) $a>0$； (C) $a\leqslant 1$； (D) $a>1$。

37. 实数 a、b、c 满足 $a+b+c=0$ 与 $abc=2$。若 $c>0$，则

(A) $c\leqslant 2$； (B) $c\geqslant 2$； (C) $c<2$； (D) $c>2$。

38. 若 α 与 β 为方程 $x^2+px+q=0$ 的二不同实根，则

(A) $|\alpha+\beta|>4\sqrt{2}$； (B) $|\alpha|>3$ 或 $|\beta|>3$； (C) $|\alpha|>2$ 且 $|\beta|>2$； (D) $\alpha<0$ 且 $\beta<0$； (E) $|\alpha+\beta|<4\sqrt{2}$。

39. 求一个最大整数，用它去除 13511，13903 和 14589 有相同的余数，这个最大整数是

(A) 28； (B) 49； (C) 98； (D) 比 49 大的、7 的奇数倍。

40. 若 $\nu=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ 的小数部分为 β，则 $\nu\beta$ 等于

(A) 0.5； (B) 1； (C) 1.5； (D) 2。

41. 两个相同的瓶子里装满酒精溶液，在一个瓶子中纯酒精与水之比为 $m:1$，而在另一个瓶子中为 $n:1$。若把两瓶溶液混合在一起，则混合溶液中纯酒精与水的溶液之比为

(A) $\frac{m+n}{2}$; (B) $\frac{m^2+n^2}{m+n}$; (C) $\frac{2mn}{m+n}$; (D) $\frac{m+n+2mn}{m+n+2}$.

42. 六位数，由三位数重复而得，如 256256，或 678678 等等。这种类型的任何数恰可被何数整除？

(A) 只有 7; (B) 只有 11; (C) 只有 13; (D) 101; (E) 1001.

43. 从某两位数 N 减去其数字互换位置后的数，所得的结果为完全立方数，则

(A) N 不可以 5 为结尾; (B) 除 5 外，N 可为任何数字结尾; (C) N 不存在; (D) N 恰有 7 个值; (E) N 恰有 10 个值。

44. 若二实数 x 与 y 满足方程式 $\frac{x}{y}=x-y$. 则

(A) $x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 0$; (B) y 能等于 1; (C) x 与 y 均为无理数; (D) x 与 y 不可能均为整数; (E) x 与 y 均为有理数。

45. 方程 $2^{2x}-3^{2y}=55$ 的解共有多少？(其中 x, y 为整数)

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 多于 3，但有限。

46. 若 x、y 为整数，方程式 $(x-8)(x-10)=2^y$ 有多少组解？

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 多于 3.

47. 令 N 为正整数，使 $1260x=N^3$ 之最小正整数 x 为

(A) 1050; (B) 1260; (C) 1260^2; (D) 7350; (E) 44100.

48. 对于正实数，运算*定义为 $a*b=\dfrac{ab}{a+b}$，则 $4*(4*4)$ 等于

(A) $\frac{3}{4}$； (B) 1； (C) $\frac{4}{3}$； (D) 2； (E) $\frac{16}{3}$。

49. 如果 p 为任意三个相邻正奇数的乘积，则能整除所有这样的 p 的最大整数为

(A) 15； (B) 6； (C) 5； (D) 13； (E) 1。

50. 如果 p 等于 3，659，893，456，789，325，678 和 342，973，489，379，256 的乘积，p 中数字的位数是

(A) 36； (B) 35； (C) 34； (D) 33； (E) 32。

51. 已知 $\log_2 a+\log_2 b\geqslant 6$，则所能取到的 $a+b$ 最小值为

(A) $2\sqrt{6}$； (B) 6； (C) $8\sqrt{2}$； (D) 16； (E) 非上述答案。

52. 如果 $x=t^{\frac{1}{t-1}}$，$y=t^{\frac{t}{t-1}}$ $(t>0,\ t\neq 1)$，则 x 与 y 的关系为

(A) $y^x=x^{\frac{1}{y}}$； (B) $y^{\frac{1}{x}}=x^y$； (C) $y^x=x^y$； (D) $x^x=y^y$； (E) 非上述答案。

53. 定义 $a*b=a^b$(a、b 为任意正数)，则对所有的正数 a，b，c，n，我们有

(A) $a*b=b*a$； (B) $a*(b*c)=(a*b)*c$； (C) $(a*b^n)=(a*n)*b$； (D) $(a*b)^n=a*(bn)$； (E) 非上述答案。

54. 数字 $(2^{48}-1)$ 可以刚被两个在 60 与 70 之间的数除尽，这两个数是

(A) 61，63； (B) 61，65； (C) 63，65； (D) 63，67；

(E) 67，69。

55. 一盒里盛有各种颜色纸片，其中有红的、白的和蓝的，蓝片的数目最少是白片的数目的一半，至多是红片数目的1/3，白片与蓝片的总数至少是55。红片的数目至少是

(A) 24； (B) 33； (C) 45； (D) 54； (E) 157。

56. 凸 n 边形的 n 个内角与某一个外角的总和为 1350°，则 n 等于

(A) 6； (B) 7； (C) 8； (D) 9； (E) 10。

57. 一条直线分一张平面为两部分，两条直线最多分一张平面为四部分，设五条直线最多分一张平面为 n 个部分，则 n 等于

(A) 32； (B) 31； (C) 24； (D) 18； (E) 16。

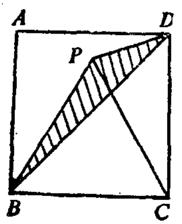

图 1-1

58. 如图 1-1，$ABCD$ 是一个面积为 1 的正方形，$\triangle BPC$ 为正三角形，则 $\triangle BPD$ 的面积为

(A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$； (B) $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{8}$； (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$； (D) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$。

59. 四边形 $ABCD$ 的边长 $AB=1$，$BC=2$，$CD=3$，$DA=4$。若把这四边形的其中两边的夹角变形为 180°（其它三个角的大小随着变化，但线段 AB，BC，CD，DA 的长不变），则这个四边形可变形为

(A) $\triangle ABD$； (B) $\triangle ABC$； (C) $\triangle BCD$； (D) $\triangle CDA$。