唐祐华 著

二 項 式 定 理
萊 布 尼 兹 定 理
de
等价公式的建立和推广

SSSSS

SSS

大学出版社

内 容 提 要

二项式定理与莱布尼兹（Leibniz）定理是人们所熟悉的两个重要定理。作者从对称多项式基本定理出发，首先介绍了二项式定理的两个常用的重要等价公式，并给出了它们在算术、代数、三角函数、双曲函数、反三角函数、反双曲函数等方面的有趣的应用。不仅导出了数以百计的新的数学公式，而且将历史上一些著名的数、多项式及某些重要公式的表达式给予了惊人的简化。接着，将二项式定理推广到相当普遍的情形，从而确立了由二项式定理的全部等价公式构成的一个无穷集合。

在微分学上作了与上面完全平行的工作，即建立了莱布尼兹定理的几个常用的重要等价公式，给出了它们各种有趣的应用，并将莱布尼兹定理推广到相当普遍的情形，从而确立了由莱布尼兹定理的全部等价公式构成的一个无穷集合。

本书主要内容全是新的，它对于大学数学基础课教师、中学数学教师、大学生、成绩优良的高中学生及具有同等学力的数学爱好者，可分别作为教学参考书、课外补充读物和自学提高之用。

二项式定理、莱布尼兹定理
的等价公式的建立和推广

唐佑华 著
责任编辑：宋 华
☆
湖南大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　湘潭大学印刷厂印刷
☆
787×1092 32开 5.625印张 126千字
1989年2月第1版　　1989年2月第1次印刷
印数：0001——5000册
ISBN 7—314—00312—2/O·19
定价：1.95元

前　　言

二项式定理是初等代数中最基本、最重要的定理之一。它虽属初等代数范畴，可是它的应用范围之广在数学中是少见的。这就确定了它在整个数学中的重要作用与地位。学过初等代数的读者对它都有一定程度的熟悉，但是对二项式定理有些什么等价公式？能否再推广？关心这类问题的人相对地少了。然而对于如此重要的定理，这个问题确有研究一番的必要，本书就是这方面工作的纪录。

笔者有幸，近几年有机会从事高等代数的教学工作，从而有条件重新接触、重温高等代数的有关材料。我们从对称多项式基本定理出发，首先找出了二项式定理的两个常用的重要等价公式，并给出了它们在各方面的应用，获得了一大批新的数学公式；接着从二元n次齐次对称多项式出发，将二项式定理推广到相当普遍的情形，从而确立了由二项式定理的全部等价公式构成的一个无穷集合，进而证明此集合构成一个代数系统——线性空间。

由于二项式定理与微分学中的莱布尼兹定理（公式）的相应系数完全一样，这样我们在微分学中作了与上面完全平行的工作，即推广了莱布尼兹定理，找出了莱布尼兹定理的全部等价公式，并证明由莱布尼兹定理的全部等价公式组成的无穷集合亦构成一个代数系统——线性空间。

自然，类似的工作还可以在多元齐次对称多项式上进

行。考虑到这项工作很繁杂，同时讨论的方式、方法又与二元齐次对称多项式的相应工作完全类似，结论也是平行的，所以作得比较简略，仅建立了个别新公式，但证明了它与几个古老而又著名的公式——牛顿公式，华林公式，多项式定理的等价性。

这样一些基本内容，我们认为本书可以作为大学一二年级学生关于莱布尼兹定理、对称多项式的应用以及线性空间概念等的补充读物；也可供部分成绩优良的高中学生及具有同等学力的数学爱好者阅读，部分内容似乎也可以供中学数学教师及大学数学基础课教师作为教学参考资料。

本书是笔者关于“二项式定理、莱布尼兹定理的等价公式的建立，应用与推广”工作的综合与小结。本书中除了包含占篇幅极少的一些必要的引导性内容与回顾性的内容外，其余材料（包括某些尚未发表过的部分材料）都是第一次写进书本的，因此，很可能有不够成熟之处，特别由于笔者水平不高，不妥之处，在所难免，敬请读者同志们批评指正。

作者谨在此向知识渊博，现在海南大学任教的老同事、老朋友耿济同志表示衷心的感谢，对于本书的写作，他给予了作者真诚的、竭尽全力的帮助、关心与鼓励。

对于本书的出版，湘潭大学数学系给予了热忱的支持，在此表示由衷的感谢。

唐祐华

一九八五年十月于湘潭大学

目　录

一、对称多项式的基本定理

这一部分首先简略地叙述对称多项式的基本概念，着重介绍对称多项式基本定理。并以对称多项式基本定理的观点，来分析、处理初等代数中我们熟悉的某些问题，借以确立并加强对称多项式基本定理在我们心目中的地位，为后面的讨论作准备。

在初等代数里，经常讨论有关多项式的许多问题。多项式又有一元多项式与多元多项式之分。例如ax^2+bx+c为一元多项式，而$ax^2+bxy+cy^2$与$x^3+y^3+z^3-3xyz$（其中a、b、c为常数）则分别为二元与三元多项式的例子。当然还有四元、五元以至n元多项式。

在多元多项式中，有一类形式特殊、应用极广的多元多项式，就是所谓对称多项式。究竟什么样的多元多项式是对称多项式？它在形式上又有什么特别的地方呢？让我们先来看两个具体的例子吧！

考虑下面两个多元多项式：

$$f(x,y)=x^2+bxy+y^2+cx+cy+d;$$

$$g(x,y)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

其中x，y，z为文字，b，c，d为常数。若我们将第一个多项式中的两个文字x，y互换，也就是把x换成y，把y换成x，结果，多项式中除了某些项的先后次序有所变动

外，别无任何其它变化。而项的先后次序的变动是无关紧要的，是不必计较的，即可以认为没有发生变化。同样，在第二个多项式中互换其中任意两个文字（互换时第三个文字保持不变），结果多项式也不发生变化。这就是上面两个多项式的特点所在。随手写出的多元多项式，未必具有这一特点。多元多项式的这一特点，是值得注意和加以利用的。事实上，有些多元多项式之所以会有较广泛的应用，就是因为它具有如此重要的、独树一帜的特点。

下面陈述对称多项式的概念。

定义 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一个 n 元多项式，若互换其中任意两个文字 x_i 与 $x_j(i\neq j)$ 之后，多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 保持不变，即有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

$(i\neq j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n)$，则称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为关于 n 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式。简称为 n 元对称多项式，或对称多项式。

根据这个定义，容易知道前面两个例子所给出的多元多项式 $f(x,y)$ 及 $g(x,y,z)$，分别是关于文字 x，y 及文字 x，y，z 的对称多项式。所以对称多项式是存在的；但是又并非每一个多元多项式都是对称多项式，例如多项式

$$h(x,y,z)=xy-xz+yz,$$

就不是对称多项式，因为若将它的两个文字例如 x 与 y 互换后，得到

$$h(y,x,z)=yx-yz+xz$$
$$\neq h(x,y,z).$$

同样地，互换 y 与 z 后，得

$$h(x,z,y)=xz-xy+zy\neq h(x,y,z).$$

所以，不是对称多项式的多元多项式也是存在的。综合以上三个多项式：$f(x,y)$，$g(x,y,z)$，$h(x,y,z)$，就清楚地说明了上面给出的对称多项式的定义是符合客观实际的，是合理的。

对称多项式的来源之一以及它的应用的一个重要方面，是在研究一元高次代数方程的根上。例如，设一元二次代数方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

的两个根为 x_1 与 x_2，即

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)=0 \quad (a\neq 0).$$

于是，由方程的根与系数的关系，就有

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

显然，这里的 x_1+x_2 和 x_1x_2 就是两个最简单的二元对称多项式。若把这一结果推广到一元 n 次代数方程上去，就有下面的结论：

设一元 n 次代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

的 n 个根为 $x_1,x_2,\cdots x_n$，即

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$\equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0 \quad (a_0\neq 0).$$

根据方程的根与系数的关系，就有

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}; \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}。 \end{cases}$$

记

$$\begin{cases} \sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n; \\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_n=x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n。 \end{cases}$$

易见，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 就是 n 个最简单的 n 元对称多项式，由于它们的形式别致，结构简单，因此称它们为 n 元初等对称多项式（或基本对称多项式）。初等对称多项式在研究对称多项式的有关问题上，有特别重要的作用。为了说明这种作用，让我们再回头考虑前面已经给出的三个多项式 $f(x,y)$，$g(x,y,z)$ 及 $h(x,y,z)$，看看 $f(x,y)$，$g(x,y,z)$ 在表达形式上较 $h(x,y,z)$ 有什么特殊之处，从而显示出 $f(x,y)$，$g(x,y,z)$ 与 $h(x,y,z)$ 的本质上的差异来。

通过简单的计算，容易为 $f(x,y)$ 及 $g(x,y,z)$ 找出下面的表达式：

$$\begin{aligned} f(x,y)&=x^2+bxy+y^2+cx+cy+d \\ &\equiv(x+y)^2+(b-2)xy+c(x+y)+d; \\ g(x,y,z)&=x^3+y^3+z^3-3xyz \\ &\equiv(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz). \end{aligned}$$

这两个恒等式的右端的表达式有什么特殊的地方呢？仔细一看就能发现：前一个恒等式的右端是二元 x，y 的初等对称

多项式 $x+y$ 与 xy 的多项式；后一个恒等式的右端是三元 x，y，z 的初等对称多项式 $x+y+z$ 与 $xy+xz+yz$ 的多项式。总之它们都是初等对称多项式的多项式。因此，我们称它们各自的右端为其左端那个对称多项式的初等表达式。而多项式 $h(x,y,z)=xy-xz+yz$ 是肯定不能写成 $x+y+z$ 与 $xy+xz+yz$ 的多项式的。我们关心的是，对于一般的 n 元对称多项式，是否都可以写成 n 元初等对称多项式的多项式呢？回答是肯定的，我们将此问题的答案写在下面：

定理（对称多项式基本定理），任何一个 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都可以唯一地表示成初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式。

这个定理的证明并不困难，然而，由于证明的方法是构造性的，即证明过程本身既肯定了结论的正确性，同时又给出了具体寻求对称多项式的初等表达式的方法，所以证明过程倒是比较繁锁的。在这里我们就不证了。有兴趣的读者，可以在任何一本《高等代数》教材（例如北京大学数学力学系编的《高等代数》）中找到它的证明。

上面这个未加证明的定理，确实是一个很重要的定理，它是我们这本书的一些主要结论的依据和出发点。关于这一点，即将为后续的材料所证实。下面，我们在初等代数的范围内，给出它的几个简单应用例子。

例 1　分解多项式 $x^4+(x+y)^4+y^4$ 成因式。

解　此多项式是关于文字 x，y 的二元对称多项式。根据对称多项式基本定理，一定可以找到它的初等表达式；同时它又是齐次多项式（即多项式中各项的次数均相等。本例题的多项式为四次齐次对称多项式），故可设

$$x^4+(x+y)^4+y^4\equiv a_0(x+y)^4+a_1(x+y)^2(xy)+a_2(xy)^2.$$

其中a_0,a_1,a_2为待定常数。为了确定这些待定的常数，我们于所设的恒等式中令$x=0$，可以得到$a_0=2$，将$a_0=2$代入后再令$x=-y$，又得到$a_2=2$。将$a_2=2$代入后再令$x=y=1$，最后得到$a_1=-4$。于是有

$$\begin{aligned}x^4+(x+y)^4+y^4&\equiv 2(x+y)^4-4(x+y)^2(xy)+2(xy)^2\\&\equiv 2[(x+y)^4-2(x+y)^2(xy)+(xy)^2]\\&\equiv 2[(x+y)^2-xy]\\&\equiv 2(x^2+xy+y^2)^2.\end{aligned}$$

因式分解工作完成。

在这里我们要再说几句话。如果有人硬要把$x+y$也看成一个新的、与x，y无关的独立文字z，从而所考虑的多项式在形式上就成为三个文字x，y，z的对称多项式$x^4+y^4+z^4$了，再根据对称多项式基本定理，按上述方法显然可设

$$\begin{aligned}x^4+y^4+z^4\equiv\ & a_0(x+y+z)^4+a_1(x+y+z)^2(xy+xz+yz)\\&+a_2(x+y+z)(xyz)+a_3(xy+xz+yz)^2.\end{aligned}$$

同前面一样，我们可以确定$a_0=1$，$a_1=-4$，$a_2=4$，$a_3=2$。将它们代入并注意$z=x+y$，化简后得到和前面一样的结果。但这里确定待定常数的工作量，要远比前面来得大。所以这种看问题的方法虽然正确，但并不可取。

在初等代数学中，可以用对称多项式基本定理，将多元对称多项式进行因式分解的例子是很多的，例如多项式：

$$P(x,y)=(x+y)^5-x^5-y^5,$$

$$Q(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的因式分解工作都可如上进行，虽运算工作量未必会得到减轻，但方法比较固定、统一，因此建议因题制宜地使用。

例 2　设方程$x^3+px^2+qx+r=0$的三个根为$x_1,x_2,$

x_3，试计算 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 的值。

解 首先注意，表达式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是关于文字 x_1, x_2, x_3 的三元齐次对称多项式，根据对称多项式基本定理，它必定有唯一的初等表达式。因此可假设

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \equiv a_0(x_1+x_2+x_3)^2+a_1(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

和例1一样，我们可以较快地确定待定常数 $a_0=1$，$a_1=-2$。于是得到

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

再根据方程的根与系数的关系，知应有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p; \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q。\end{cases}$$

所以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=p^2-2q$。

例 3 已知三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3，求作一个以 x_1^2, x_2^2, x_3^2 为根的三次方程。

解 由题设知应有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p; \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q; \\ x_1x_2x_3=-r. \end{cases}$$

为方便计，设欲求的三次方程为

$$x^3-lx^2+mx-n=0.$$

其中 l，m，n 为待定常数。由方程的根与系数的关系，可得

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=l; \\ x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=m; \\ x_1^2x_2^2x_3^2=n. \end{cases}$$

这三个等式的左端，都是关于文字 x_1, x_2, x_3 的三元齐次对称多项式。前在例2中已经求得

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\equiv(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

故有

$$l=p^2-2q.$$

同样，我们可以得到

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$$

$$=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2x_3),$$

故又有

$$m=q^2-2pr.$$

再有

$$n=r^2.$$

故欲求的、满足题设条件的三次方程为

$$x^3-(p^2-2q)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0.$$

例 4 求解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3; & ① \\ x^2+y^2+z^2=3; & ② \\ x^5+y^5+z^5=3. & ③ \end{cases}$$

解 此方程组的每一个方程的左端，均为 x，y，z 的三元齐次对称多项式，故此方程组为第一型对称方程组（所谓第一型对称方程组，乃指于方程组中任意互换二变量，方程组中各方程皆无变化者）。根据对称多项式基本定理，先将第二、三两方程的左端变形，首先有

$$x^2+y^2+z^2\equiv(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz).$$

再利用方程①，则方程②变成

$$xy+xz+yz=3. \qquad ④$$

其次，我们根据对称多项式基本定理，并利用类似前面的方法，可得

$$x^5+y^5+z^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3.$$

其中σ_1，σ_2，σ_3都是文字x，y，z的三元初等对称多项式。如再利用方程①及④，则方程③可变形为

$$xyz=1.$$

这样，原方程组就变形为如下的等价方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ xy+xz+yz=3, \\ xyz=1. \end{cases}$$

这样，x，y，z必须为三次方程

$$u_3-3u^2+3u-1=0$$

的根，即方程

$$(u-1)^3=0$$

的根。从而原方程组的解为

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

若用常规的方法解此方程组，那是很麻烦的。

例 5 求解无理方程

$$\sqrt[4]{97-z}+\sqrt[4]{z}=5.$$

解 若令 $x=\sqrt[4]{z}$，$y=\sqrt[4]{97-z}$，就有方程组：

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$$

此方程组亦为第一型对称方程组。根据对称多项式基本定理，经过计算可得

$$x^4+y^4\equiv(x+y)^4-4(x+y)^2(xy)+2(xy)^2.$$

再利用方程组中的第一个方程，则第二个方程就变成

$$xy=25\pm19\ 。$$

所以求得与上面方程组的等价方程组为

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=25\pm 19. \end{cases}$$

这样，x，y 必须为二次方程

$$u^2-5u+44=0$$

及

$$u^2-5u+6=0$$

的根。易知 $u=2,3$，$\frac{1}{2}(5\pm i\sqrt{151})$。所以

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}(5\pm i\sqrt{151}), \\ y=\frac{1}{2}(5\mp i\sqrt{151}). \end{cases}$$

故原无理方程的解为

$$z=16,18,\ \frac{1}{16}(5\pm i\sqrt{151})^4。$$

例 6　某三角形的三条边长 x_1,x_2,x_3 恰为三次方程

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

的三个根。求该三角形的面积 S。

解　由海伦公式，有

$$S=\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)}.$$

其中 $p=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$。故根号下的表达式是关于三条边长 x_1，x_2，x_3 的三元齐次对称多项式。写出它的初等表达式后，得

$$S=\frac{1}{4}\Big((x_1+x_2+x_3)[-(x_1+x_2+x_3)^3+4(x_1+x_2+x_3)\times (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-8x_1x_2x_3]\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

若注意到方程的根与系数的关系，就得到

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-8c)}。$$

这就是欲求的三角形的面积。

前面所举诸例，在一般的初等代数学中几乎都可以见到，而且求解的方法，过去与现在也基本上是相同的。但是，过去在初等代数中，只告诉了我们求解的方法，并没有说明为什么可以那样求解，以及那样求解为什么一定能成功。我们现在重举这些例子的目的，就在于指明那样求解，是以对称多项式基本定理为依据的，是一定能够获得成功的。由此可见，对称多项式基本定理，确实是一个很重要的、很有用的定理。在初等代数范围的解题过程中，就已经初步显示出它的重要作用了。最能显示它的重要性的，是在下面讨论问题的过程中——二项式定理的等价公式的建立、应用与推广上。

二、二项式定理的等价公式

这部分首先回顾二项式定理的一个常用的等价公式及若干推广。接着从对称多项式基本定理出发，建立二项式定理的两个有广泛应用的新的等价公式，然后给出它们的各种简单应用。

1. 历史的回顾

二项式定理已有悠久的历史，长时期来，由实践的需要与使用方便的促使，人们除了为它建立了等价公式外，还将它作了各种形式的推广。现在让我们作些重点的回顾。

（1）一个常用的等价公式

众所周知，所谓二项式定理，指的是下面的几种形式的等价恒等式之任一：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}=(x+y)^{n};$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}=(x+y)^{n};\qquad\qquad (\mathrm{I})$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^{k}=(x+y)^{n};$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{k}y^{n-k}=(x+y)^{n}.$$

其中 n 为非负整数，$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$。关于这个定理的广