

971241

0343.6
1032

高等学校教材

热 应 力

严宗达 王洪礼 编著



高等教育出版社

高等学校教材

热 应 力

严宗达 王洪礼 编著



高等教育出版社

(京)7112号

内 容 提 要

本书主要介绍求解热应力问题的基本理论及其应用。全书共分十章,包括热传导、热弹性理论、平面热应力问题、空间热应力问题、非定常温度场的热应力、杆和板的热应力、旋转壳的热应力、热稳定问题、耦合热弹性问题及热应力几个专门问题。前七章每章末均附有习题。

本书可供高等院校力学专业和各有关工程专业高年级或研究生作教材使用,也可供有关工程设计人员和研究人员参考。

高等学校教材

热 应 力

严宗达 王洪礼 编著

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

三河市科教印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.625 字数 350 000

1993 年10月第1版1993 年10月第1次印刷

印数0001—641

ISBN7-04-004391-2/TB·217

定价 6.05 元

序 言

随着现代科学技术的发展,在航空、航天、冶金、化工、机械、土建、水利等各种与国民经济建设密切相关的工程领域中,都不可避免地会遇到热应力问题。近二三十年来,国外有关热应力的著作已有数十种,国内除了已有若干种译著出版外,自己编著的热应力著作和教材只有少数几种。为了满足我国各高等院校力学和有关工程专业教学的需要,以及从事高温结构设计、热加工的工程技术人员和热应力分析研究人员的需要,我们在天津大学工程专业讲授此课所用自编讲义的基础上,整理编成本书。

本书主要介绍求解热应力问题的基本理论及其应用。凡具有弹性力学和数理方程基本知识的读者皆可阅读本书。本书在编写上力求与已有基础知识衔接,尽量做到通俗易懂。所举之例,皆有一定实用价值,可供参考。前七章每章末均附有习题,便于教学和自学使用。书中还包括了我们近年的科研成果。

全书共分十章,包括热传导、热弹性理论、平面热应力问题、空间热应力问题、非定常温度场的热应力、杆和板的热应力、旋转壳的热应力、热稳定问题、耦合热弹性问题及热应力的几个专门问题。其中第一章至第四章由王洪礼编写,第五章至第十章由严宗达编写。

本书编写过程中得到天津大学许多教师和研究生的大力支持,清华大学余寿文教授在审稿过程中提出不少宝贵意见,谨在此向所有为本书出版付出辛勤劳动的同志表示衷心的感谢。

由于水平所限,书中可能尚有许多不当之处,欢迎广大读者批评指正。

编 者

1991年5月

目 录

第一章 热传导	1
§ 1-1 傅里叶定律	2
§ 1-2 热传导微分方程	7
§ 1-3 边值条件	11
§ 1-4 处理与求解热传导问题的一般方法	14
§ 1-5 热传导问题的分离变量法	17
§ 1-6 热传导问题的格林函数法	31
§ 1-7 热传导问题的积分变换法	41
§ 1-8 热传导问题的数值法	53
§ 1-9 热传导问题的近似分析法	65
习题	73
第二章 热弹性理论	76
§ 2-1 热应力	76
§ 2-2 热弹性理论的基本方程	82
§ 2-3 热弹性理论的位移法	85
§ 2-4 热弹性位移势	87
§ 2-5 热弹性理论的应力法	90
§ 2-6 杜哈梅相似定理	95
§ 2-7 柱坐标和球坐标中的方程	98
§ 2-8 热应力的数值计算法	104
§ 2-9 热应力的实验分析法	111
习题	116
第三章 平面热应力问题	118
§ 3-1 平面热应力问题的基本方程	118
§ 3-2 平面热应力问题的热弹性位移势法	121
§ 3-3 平面热应力问题的位移法	131
§ 3-4 平面热应力问题的热应力函数法	137

§ 3-5	平面热应力问题的复变函数法	149
§ 3-6	不产生热应力的平面温度场	156
§ 3-7	复连域中的位错法和五种函数法	161
§ 3-8	圆筒、圆环、圆板和圆柱的热应力	168
§ 3-9	弹性模量、线热膨胀系数均随温度变化的圆筒的 热应力	175
§ 3-10	楔形坝体中的热应力	180
§ 3-11	点热源在圆板和半无限板中产生的热应力	186
§ 3-12	一般热源在圆筒中产生的热应力	192
§ 3-13	表面有热传递的矩形板、圆板和环板的热应力	197
§ 3-14	表面有热传递内部有热源的圆板的热应力	204
§ 3-15	散热片与表面有热传递的无限长带状板的热应力	210
§ 3-16	有一矩形夹杂物的无限板中的热应力	215
§ 3-17	内热源在带有圆孔的多边形区域中产生的热应力	219
	习题	223
第四章	空间热应力问题	226
§ 4-1	沿轴向也有变化的轴对称温度场产生的热应力	226
§ 4-2	表面温度为 π 的函数的圆筒的热应力	232
§ 4-3	有流体通过的管中的热应力	239
§ 4-4	表面上有点热源的半无限空间体的热应力	243
§ 4-5	温度仅沿半径变化的球体的热应力	247
§ 4-6	有一球形夹杂物的半无限空间体的热应力	252
§ 4-7	不产生热应力的空间温度场	258
	习题	259
第五章	非定常温度场的热应力	261
§ 5-1	准静力问题和动力问题	261
§ 5-2	均匀瞬时线热源或面热源在无限空间内产生的热 应力(准静力问题)	263
§ 5-3	均匀瞬时线热源或面热源在半无限空间内产生的 热应力(准静力问题)	268
§ 5-4	在半无限空间的界面上突然加热并使界面温度保 持恒定时的热应力(动力问题)	275

§ 5-5	冷却球体表面突然加热时的热应力(准静力问题)	278
习题		284
第六章	杆和板的热应力	286
§ 6-1	直杆和平面曲杆的热应力	286
§ 6-2	温度仅沿杆高变化时的热应力 补偿法	289
§ 6-3	板的热弹性基本方程	292
§ 6-4	板的热弹性问题的边界条件	297
§ 6-5	四边简支矩形板的热应力	300
§ 6-6	四边固定矩形板的热应力	303
§ 6-7	轴对称温度场中圆板及圆环板的热应力	303
§ 6-8	温度仅沿板厚变化时周边自由板的热应力补偿法	306
习题		310
第七章	旋转壳的热应力	313
§ 7-1	旋转壳的热弹性基本方程	313
§ 7-2	边界条件	326
§ 7-3	计算例题	328
§ 7-4	圆柱壳轴对称热弹性问题的位移法	331
习题		335
第八章	热稳定问题	336
§ 8-1	端部无轴向约束的受热梁柱	336
§ 8-2	端部有轴向约束的受热梁柱	341
§ 8-3	板热稳定问题的基本方程	344
§ 8-4	中面内周边无约束的板受中面内荷载及温度改变 作用时的热屈曲	345
§ 8-5	中面内周边有约束的板的热屈曲	352
第九章	耦合热弹性问题	356
§ 9-1	耦合热弹性问题的基本方程	356
§ 9-2	耦合项和惯性项的影响	367
§ 9-3	耦合平面热应力问题的调和函数解法	384
§ 9-4	非线性耦合热弹性问题	394
第十章	热应力的几个专门问题	404

§ 10-1 热弹塑性问题	404
§ 10-2 热冲击与热疲劳	416
§ 10-3 各向异性体的热弹性问题	421
参考文献	426

第一章 热 传 导

物质的热胀冷缩现象是人们早已熟知的。工程中的许多结构和部件常常工作于温度变化的情况，如果由于温度变化而产生的胀缩受到结构或部件的外部或内部约束的限制而不能自由进行，这些结构或部件内将会产生热应力。因此，要研究物体的热应力就必须首先知道物体中的温度场。而物体中的温度场的确定则依赖于热传导问题（热传导微分方程、热边界条件和热源等）的解决，所以在本章中先介绍有关热传导的知识。从第二章开始再介绍有关热弹性问题的有关内容。

热传导是传热的一种特定方式，主要研究固体内部以及固体表面与周围环境热交换时的温度变化规律。这种热交换是由温度梯度引起的，热量是从高温区向低温区传输。

热传导的机理是通过分子运动进行能量交换，使一物体同另一物体或物体的一部分同另一部分之间发生能量交换。

求解热传导问题可采用多种方法，一般分为两大类，一类是精确解法，另一类是近似解法。用各种分析方法（如分离变量法、格林函数法及积分变换法等）求得精确解有助于人们去理解影响热传导的因素，并能突出问题的一些主要特征，因而有其优越性；但另一方面，数值法、模拟法和图解法等近似解法适合于求解更实际的复杂问题。对于一个具体问题、究竟选用哪一种方法，要根据问题的性质进行具体分析，为此，要熟悉各种解法。本章将先介绍反映物体内的热流与温度梯度关系的傅里叶（Fourier）定律和支配物体内部温度分布的热传导微分方程及各种边界条件，然后再通过例子较详细地介绍各种解析解法和近似解法。

§ 1-1 傅里叶定律

温度是定量描述物体冷热程度的物理量，但实际上往往不能用一个温度值来表示整个物体的冷热程度，为此引入了温度场的概念。它是一个数量场，是用某一时刻的，一定空间内的所有各点的温度值来描述的，如直角坐标中

$$T = T(x, y, z, t)$$

一般认为物体内部温度场是连续的。

温度是对空间的点定义的，但从热力学的观点出发，温度却是对一个由大量物质组成的体系定义的（例如气体的绝对温度就是气体分子平均平动动能的量度）。所以对温度场中的“点”应这样理解，从物体的整体看，这个点足够小，小到它所占据的体积相对物体的体积来说，可忽略不计；而从物体内部分子运动的角度来看，这个点又足够大，大到它所包含的大量分子（从统计平均观点出发）足以克服温度的差异，这个由大量分子组成的点是一个平衡的热力学体系。总之，从整体看，各处温度不同，热是不平衡的；而从局部看，由足够多的分子组成的一点，可用一个温度值来表示，热是平衡的。热传导就是研究这种局部处于平衡，而整体处于不平衡的温度场的性质。

若温度场各点的温度不随时间而变化，则称该温度场为“稳定温度场”或“定常温度场”，即

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

否则为“不稳定温度场”或“非定常温度场”。

在实际计算中，常用的温度单位有四种：摄氏温度(°C)，华氏温度(°F)，开尔文温度(K)，兰金(Rankine)温度(°R)。它们之间的关系如图1-1所示。

物体内温度相同的点所组成的面称为等温面，图1-2为一物体的截面。在此截面上，物体的等温面被切割为等温线。由于物

体内任一点只能有一个温度值，所以，它不可能同时属于两个等温面，因此，等温面不可能相交。同时，等温面也不会在物体内终止，等温面或延伸到物体的边界，或自身形成封闭曲面。

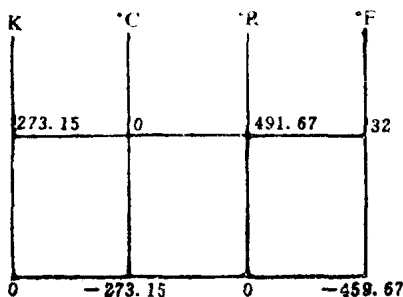


图 1-1

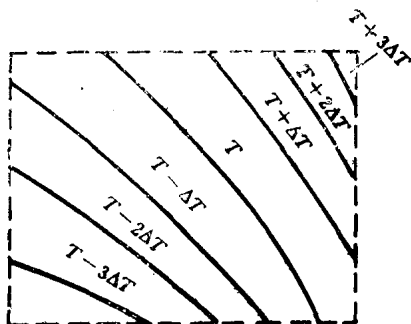


图 1-2

由场论知识可知，温度场既然是数量场，必有温度梯度存在，用 $\text{grad } T$ 表示。它是一个矢量，其方向是温度增长最快的方向。它的大小表示该点温度最大变化率，在直角坐标中可表示为

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1-1)$$

其中 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 为 x 、 y 、 z 坐标轴上的单位矢量。

由于从物体任一点 P 出发，除了沿等温面之外，沿其它任何方向温度都是变化的，因此在这些方向上都有热量传递。若将单位时间单位面积上传递的热量定义为热流密度 \mathbf{q} ，则在不同方向上有不同的热流密度，因此它也可以表示为一个矢量，记作 \mathbf{q} 。

傅里叶等人(1822年)根据大量实验结果(在热稳定条件下，对均匀的各向同性材料进行的实验)，得到了热传导的基本定律，即傅里叶定律：

$$\mathbf{q} = -k \text{grad } T \quad (1-2)$$

它表明热流密度与温度梯度成正比，而方向相反。式中的比例常

数 k 称作导热系数，也叫导热率，是材料的固有属性，是物理性能参数。它是对物体内每一点定义的，以表征材料各处导热能力的大小。对于均匀的各向同性材料， k 是一个常数

$$k = \left| \frac{q_l}{\frac{\partial T}{\partial l}} \right| \quad (1-3)$$

k 的物理意义为：在垂直于过 P 点的 S 平面方向上，当每单位长度温差为1个单位时，单位时间内通过每单位面积的热量。 l 是平面 S 的法线。导热系数是由材料所处状态和内部结构决定的，所以除低温气体可以用计算方法得到外，其它材料都是通过实验方法获得，典型材料的导热系数的数值见表1-1。一般来说，固体材料的导热系数比液体大，液体又比气体大。在固体材料中，金属大于非金属，纯金属又大于合金，但这不是绝对的。到目前为止，导热系数最大的固体材料是非金属的金钢石，比纯金属还大好几倍。

过一点沿任意方向 l 的热流密度 q_l ，即为热流密度矢量 q 在 l 上的投影，即

$$q_l = -k(\text{grad}T \cdot l) = k \frac{\partial T}{\partial l}$$

式中 l 是 l 方向的单位矢量。沿三个坐标轴方向的热流密度即为 q 在三个坐标轴上的投影

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式(1-2)表示的傅里叶定律只适用于各向同性材料，而工程中常用的木材、天然沉积岩石等，均是各向异性材料。即使是均匀的各向同性材料，在实际应用中常有各种不同形式的组合，所以，从宏观来看，也往往呈现各向异性的特征，例如胶

合板，变压器的铁芯，电机的定子等，因此还要研究各向异性材料的傅里叶定律。此时热流密度不再与温度梯度共线，热流密度矢量也不再垂直于过 P 点的等温面，导热系数 k 不再是一个与方向无关的量，而是一个沿各个方向不同的量。各向异性材料中的傅里叶定律可用下列矩阵表示：

表1-1 金属与非金属的物理性能

材 料	温度 ℃	$C_p \times 10^{-3}$ W·s/ (kg·℃)	k W/ (m·℃)	ρ kg/m ³	$\alpha \times 10^8$ m ² /s
金属					
铝	0	0.871	202.4	2719	85.9
铜	0	0.381	387.6	8978	114.1
金	20	0.126	292.4	19372	120.8
纯铁	0	0.435	62.3	7900	18.1
铸铁($c \approx 4\%$)	20	0.417	51.9	7304	17.0
铅	21	0.126	34.6	11343	25.5
水银	0	0.138	8.36	13660	4.44
镍	0	0.431	59.52	8930	15.5
银	0	0.234	418.7	10539	170.4
低碳钢	0	0.460	45.0	7884	12.4
钨	0	0.134	159.2	19372	61.7
锌	0	0.381	112.5	7176	41.3
非金属					
石棉	0	1.047	0.151	579	0.258
耐火砖	204	0.837	1.004	2317	0.516
粉状软木	37	2.010	0.042	128	0.155
耐热玻璃		0.837	1.177	2413	0.594
花岗岩	0	0.796	2.768	2703	1.291
冰	0	2.051	2.215	917	1.187
栎木, 垂直于木纹的方向	29	1.716	0.192	708	0.160
松木, 垂直于木纹的方向	29	1.758	0.159	595	0.152
干石英砂		0.796	0.260	1657	0.206
软橡胶		1.884	0.173	1110	0.077

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

利用线性变换和二阶张量的知识可以证明一定存在着这样一个主坐标系 (ξ, η, ζ) 使

$$\begin{bmatrix} q_\xi \\ q_\eta \\ q_\zeta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_\xi & 0 & 0 \\ 0 & k_\eta & 0 \\ 0 & 0 & k_\zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ \frac{\partial T}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

其中, k_ξ 、 k_η 、 k_ζ 称为主导热系数, 主轴 (ξ, η, ζ) 互相正交, 它们的取向与材料的各向异性有密切联系, 如在分层材料的各向异性物体中, 主轴的取向即为平行于层面和垂直于层面的方向上。以二维问题为例, 图1-3表示一各向异性材料, 如石墨、木材, 分层金属(变压器铁芯)、层压塑料等, 图中斜纹表示材料的各向异性特征, ξ 与 η 即为导热系数的主轴。与主轴夹角不同的各个方向

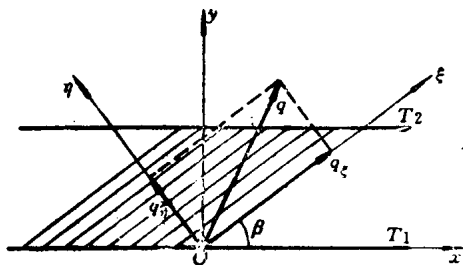


图 1-3

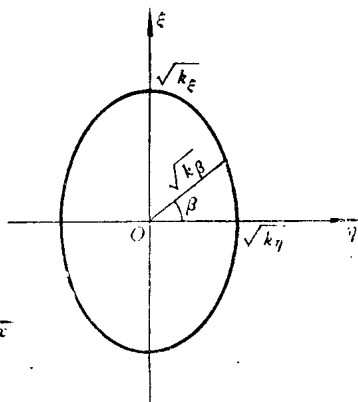


图 1-4

上的导热系数的变化规律表现为椭圆特征（见图1-4），椭圆的主半轴为主导热系数的平方根。此结论可用一简单实验证明。取形状相同的玻璃片与云母片各一块，每片的一个面上都涂一层石蜡，然后在背面同位置处用蜡烛加热，不久就可发现，玻璃片上石蜡融化边界呈圆形，而云母片上石蜡边界呈椭圆形。

§ 1-2 热传导微分方程

根据热力学第一定律，即热现象中的能量守恒定律可知，物体在单位时间内获得的热量等于物体在单位时间内内能的增加与对外界所做的功的总和。即

$$Q = \Delta E + A$$

由于研究的是固体材料，变形微小，因此可忽略因体积变化而对外界所做的功 A ，所以静止的含有热源的均匀的各向同性物体在单位时间内获得的热量全部用于内能的增加，

$$Q = \Delta E$$

在热传导中可表示为

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

式中， Q_1 为单位时间内物体通过界面获得的热量；

Q_2 为单位时间内物体内部热源产生的热量；

Q_3 为单位时间内物体温度升高所需要的热量。

设有物体 V 表面为 S ，在物体内取一任意子域 v_1 ，其表面为 s_1 （图1-5），则对此子域有

$$Q_1 = - \int_{s_1} q n ds_1 = \int_{s_1} k \text{grad} T \cdot n ds_1$$

利用格林（Green）公式，将上式右端化为体积分，则有

$$Q_1 = \int_{v_1} \text{div}(k \text{grad} T) dv_1$$

此外，设物体内有热源强度（单位时间单位体积产生的热量，为 W 的体热源，则对此子域有

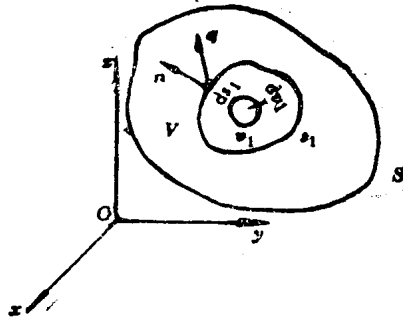


图 1-5

$$Q_2 = \int_{v_1} W dv_1$$

同时有

$$Q_3 = \int_{v_1} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dv_1$$

式中 ρ 为密度, c 为比热。由 $Q_1 + Q_2 = Q_3$, 得

$$\int_{v_1} \left[\text{div}(k \text{grad} T) + W - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv_1 = 0$$

由于上式对任意子域 v_1 均应成立, 故被积函数必处处为零, 即

$$\text{div}(k \text{grad} T) + W = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-7)$$

对均匀各向同性体, k 为常数, 则有

$$\text{div}(k \text{grad} T) = k \text{div}(\text{grad} T) = k \nabla^2 T$$

式中 ∇^2 为拉普拉斯算子, 在直角坐标中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(1-7)可简化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = \frac{W}{c\rho} \quad (1-8)$$

式中 a 为“导温系数”或“热扩散系数”, 由下式定义

$$a' = \frac{k}{c\rho} \quad (1-9)$$

由于 k 、 c 、 ρ 均是物理性能参数，所以 a 也是一个表征物体材料属性的物理性能参数。虽然物性参数是材料本身所固有的，与过程无关，但为了说明其物理意义，仍必须与过程联系起来。导温系数 a 就要与不稳定导热过程联系起来。由式(1-9)可知，其分子 k 是材料的导热系数，表示单位温度梯度下，单位时间单位面积所传递的热量，而分母 $c\rho$ 是热容，表示单位体积物质温度升高一度所吸收的热量， a 为它们的比值。 a 大则表示热量传导的因素大于温度变化的因素，即热量中大部分用于热传导，小部分用以改变自身的温度，所以称 a 为热扩散系数是合适的。而研究物体内部的温度变化规律时，如研究半无限大物体在表面温度发生突然变化时，就会发现，当其它因素都不变，仅 a 加大时，表面温度的影响将更快地传播到内部，当表面温度发生周期变化时，随 a 的加大或减小，半无限大物体内部温度波的传播速度也将加大或减小，由此可见，将 a 称为导温系数也是恰当的。但从量纲上，决不能将 a 理解为热量扩散速度或温度传播速度，它的量纲是 $[\text{长度}]^2[\text{时间}]^{-1}$ ，常用材料的导温系数可见表1-1。

热传导微分方程(1-8)在不同的正交坐标系中，具体形式不同。

直角坐标系中

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{W}{c\rho} \quad (1-10)$$

柱坐标系中

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{W}{c\rho} \quad (1-11)$$

球坐标系中

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2 \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{W}{c\rho} \quad (1-12)$$

式(1-12)中 φ 为经度角， θ 为纬度余角。

如是稳态导热(定常温度场)，则式(1-8)简化为