中考急诊室

SHIWUZHENZHISHIWUZHENZHI

主编　王占元

中考数学

失误诊治

中考容易犯哪些错误？

产生错误的原因是什么？

怎样避免这些错误？

北京教育出版社

中考急诊室

中考数学失误诊治

主编 王占元

北京教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

中考失误诊治.数学/王占元主编.－北京：北京教育出版社，2002.8
（中考急诊室）
ISBN 7-5303-2667-8

Ⅰ.中… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课－初中－升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第047921号

中考急诊室
中考数学失误诊治
ZHONGKAO SHUXUE SHIWU ZHENZHI
主编　王占元
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路6号）
邮政编码：100011
网址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
北京市朝阳燕华印刷厂印刷
*
890×1240　32开本　10.25印张　335 000字
2002年10月第1版　2002年10月第1次印刷
印数 1－20 000
ISBN 7－5303－2667－8
G·2632　定价：15.00元

《中考急诊室—中考失误诊治》编委会名单

王占元　孙荻芬　马胜利　杨　帆　佟裕功　王苏风
刘志九　贺俊英　毛长虎　王作华　吴凤英　李福森
谢丽媛　王金力　冉工林　孙惠霞　朱传世　杨　华
张　箐　吴长锋　林文俊　袁　聪　姚守梅　谢　虹
刘淑贤　张淑芬　李玉英　张连涛　栾　谦　张海祥
汪士林

语文科作者：孙荻芬　王金力　冉工林　孙惠霞
朱传世　杨　华　张　箐　吴长锋
林文俊　袁　聪　姚守梅

数学科作者：王占元

英语科作者：佟裕功　栾　谦　张海祥　汪士林

物理科作者：杨　帆　王苏风　刘志九　贺俊英
毛长虎　王作华　吴凤英　李福森
谢丽媛

化学科作者：马胜利　谢　虹　刘淑贤　张淑芬
李玉英　张连涛

前　言

来自中考阅卷组的报告令人深思:历届初中毕业生在中考答卷上常常犯同一类型的错误,错误是如此惊人的相似。

学生们在中考时都容易犯哪些错误?产生这些错误的原因是什么?怎样才能避免这些错误?这不仅是广大学生关心的问题,也是广大教师关心的问题。

我们说,成功的经验固然可贵,但是,失败的教训也是宝贵的财富。每个人都有自己的弱项与盲区,如果我们能够从他人的失误中汲取教训,使自己的弱项强化,盲区减少,就可以避免重蹈覆辙,乘胜前进。为此,我们专门为应届中考学生编写了《中考急诊室》丛书。

丛书各册作者为北京市多年中考命题、阅卷的专家。丛书通过大量的失误案例,展示了以往中考中形形色色的失误情况,并对之详加分析,指点迷津,找出根治的办法。

丛书不但展示了各种各样的失误案例,而且分析了失误发生的根源,并在此基础上开具了诊治的良方,提出了完整的解决方案。

阅读丛书的过程中,希望同学们不要就题论题,而是要认识问题的本质,细细体会错误的诊断、正确解答及启示,举一反三,体会作者的良苦用心。

就要中考的中学生朋友们,考前到中考急诊室来吧!找到自己学习中的弱项与盲区,使自己在中考征战中更加坚强、更加无懈可击。

前车之鉴,后人之师。站在前人的肩膀上,你会看得更远。

北京教育出版社

目录

中考是人生旅途中的一大重要关口,每一位考生都想在中考时做到正常发挥,甚至超水平发挥,从而在理想的学校继续深造.

但事实并不一定能够尽如人意,由于种种原因,以至造成这样或那样的失误,从而成为终生憾事.

找出失误原因,开据治疗良方,汲取他人教训,考出优异成绩,这正是本书的用意,愿它成为初中毕业生的良师益友.

第一部分　失误案例

案例 1

已知:如图 1-1,一次函数 $y = kx - b$ 的图象中,k、b 应满足的条件是 (　　)

A. $k>0$ 且 $b>0$　　B. $k>0$ 且 $b<0$

C. $k<0$ 且 $b>0$　　D. $k<0$ 且 $b<0$

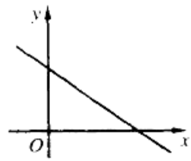


图 1-1

明明一见此题,心中窃喜.此题我熟得不能再熟了,题中的 k 表示一次函数的斜率,即倾斜程度.当 $k>0$ 时,函数的图象从左下方往右上方倾斜(俗称上升);当 $k<0$ 时,函数的图象从左上方往右下方倾斜(俗称下降),显然,此题中的 $k<0$.

题中的 b 表示一次函数的截距,即直线与 y 轴交点的纵坐标.当交点在 y 轴正半轴时,$b>0$;当交点在 y 轴负半轴时,$b<0$;当交点过原点时,$b=0$.显然题中的 $b>0$.

综上所述,应选 C.

此题我用了不到一分钟,得了一个满分,正是开篇见喜,乐不可支.

案例 2

已知:关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4 = 0$ 的两个根的平方和比两个根的积大 21,求 m 的值.

明明一见此题,思路很流畅:这是含有字母系数的一元二次方程,常用一元二次方程根与系数的关系进行探求.即

$x_1 + x_2 = -2(m-2)$,

$x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4.$

欲求 m 的值，需构造一个方程，则

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 21.$

再转化为含有 $x_1 + x_2$ 与 x_1x_2 的等式：

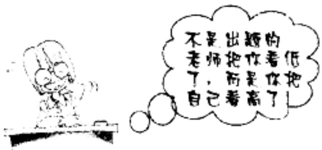
$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 21.$

通过代入，转化为关于 m 的方程，即

$[-2(m-2)]^2 - 3(m^2+4) = 21.$

$m^2 - 16m - 17 = 0.$

解得 $m_1 = 17, m_2 = -1.$



此题虽然绕了一个弯，我其实早就注意到了，即两根的平方和是先平方，再相加，而不是两根和的平方，那样是先相加，再平方，这个陷阱我不会往里跳。

这么容易的题居然高达6分，不知出题的老师是不是把我们看低了？

案例 3

甲、乙二人分别从相距36千米的 A、B 两地同时相向而行，甲从 A 地出发行至1千米时，发现有物件遗忘在 A 地，便立即返回，取了物件又立即从 A 地向 B 地行进，这样甲、乙二人恰在 AB 中点处相遇．又知甲比乙每小时多走0.5千米，求甲、乙二人的速度各是多少？

明明审题认真，把题目所给条件一一加以分解：

1. 题型：是行程问题中的相遇问题．

2. 方程：同时出发又相遇，他们所用时间相同，因此常通过"甲所用时间 = 乙所用时间"布列方程．

3. $t = \frac{s}{v}$，设甲速为 x 千米/时，则乙速为 $(x-0.5)$ 千米/时；乙走的路程为 $36 \times \frac{1}{2} = 18$（千米），甲走的路程为多少呢？

一去一回再一去，共多走3千米，即甲走的路程为 $36 \times \frac{1}{2} + 3 = 21$（千米）．

4. 列出等式：

$$\frac{36 \times \frac{1}{2} + 3}{x} = \frac{36 \times \frac{1}{2}}{x - 0.5}.$$

5. 解方程：

$$\frac{21}{x} = \frac{18}{x - \frac{1}{2}}.$$

$21x-\frac{21}{2}=18x$.

$3x=\frac{21}{2}$,

$\therefore\ x=\frac{7}{2}$(千米/时),

$x-0.5=3$(千米/时)

6. 作答:甲每小时走$\frac{7}{2}$千米,乙每小时走3千米.

明明作毕,心中暗喜,你出题的老师绕几个弯,也绕不过我肠子里的弯.

案例4

已知:如图1-2,$\triangle ABC$中,$AB=3$,$AC=2$,$BC=\sqrt{5}$,$CD\perp AB$于D.

求 $AD:DB$的值.

明明一看此题,心里别提多高兴了,这种图形我见得多了,它是初中数学中最重要的一个图形,叫做双垂直图形,有许许多多的重要性质.想毕,提笔便写:

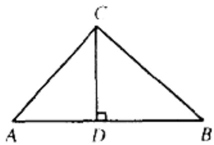


图1-2

在$\triangle ACD$和$\triangle CBD$中,

$\because \angle A=\angle A$,

$\angle ADC=\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$,

$\therefore AC^2=AD\cdot AB$.

同理 $BC^2=BD\cdot AB$,

$\therefore \frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD\cdot AB}{BD\cdot AB}=\frac{AD}{BD}$.

$\because AC=2, BC=\sqrt{5}$,

$\therefore AD:DB=4:5$.

明明轻而易举地把这道看来很难的题解出来了,心里美滋滋的.

案例 5

已知：如图 1－3，AB 是$\odot O$ 的弦，E 是 AB 中点，直线 OE 交$\odot O$ 于 C、D.

(1)试写出 $AC^2 = \times\times\cdot\times\times$.

(2)若 C 点不动，点 D 在优弧$\overset{\frown}{AB}$上运动，AB 与 CD 交于 E 点(如图 1－4). 问第(1)问的结论是否成立？

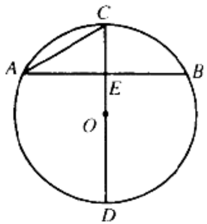


图 1－3

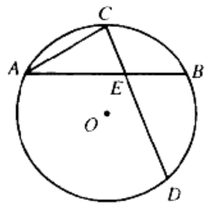


图 1－4

明明一看此题的条件，很快就抓住了解题的要害：CD 是$\odot O$ 的直径，E 是 AB 的中点. 于是便联想到了垂径定理的推论，即平分弦的直径垂直弦，且平分弦所对的两条弧. 当连结 AD 后，便构造出一个双垂直图形，得到 $AC^2 = CE\cdot CD$.

证明如下：

(1)在$\odot O$ 中，

$\because CD$ 是直径，E 是弦 AB 的中点，

$\therefore CD\perp AB$(平分弦的直径垂直于弦).

连结 AD(图 1－5).

$\therefore \angle CAD = 90°$.

在$\triangle ACE$ 和$\triangle DCA$ 中，

$\because \angle AEC = \angle CAD = 90°$，

$\angle ACE = \angle ACD$，

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle DCA$，

$\therefore \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{CE}{AC}$，

$\therefore AC^2 = CE\cdot CD$.

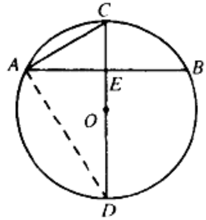


图 1－5

明明认真检查了一遍书写过程，认为严谨无误，于是开始考虑第(2)问.

弦 AB 未动，C 点未动，当点 D 运动时，CD 随之运动，点 E 也随着运动，那么点 E 便不是 AB 的中点

了，弦 CD 和弦 AB 便不垂直了.

如果还连结 AD，△ACE 与△DCA 还能相似吗？思来想去，还是缺乏思路，眼看时间一分一秒地过去，明明只好放弃第(2)问.

案例 6

已知：如图 1－6，在直角坐标系 XOY 中，函数 $y=ax^2+bx+c$ 与函数 $y=(a+1)x^2+dx+e$ 的图象如图所示.

那么，图象过点 P 的函数是哪一个函数？

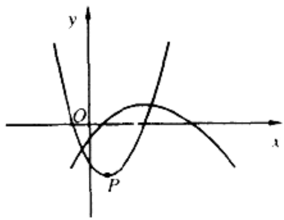


图 1－6

尽管明明还是善于动脑的考生，但是，这道题却让他犯了难：函数中的 a、b、c、d、e 都没给出具体的数，又要判断出过点 P 的函数是哪一个，是不是题目所给的条件不够呢？在中考中要出现错题，还是很少见的，也许是我思路不对？考虑不出来，时间又耗不起，干脆瞎写一个吧！说不定还真能瞎着了呢！有 50% 的几率.

于是，他写了一个答案：$y=ax^2+bx+c$.

案例 7

图 1－7 是由火柴棒拼出的一列图形，其中第 n 个图形是由 n 个正方形组成.

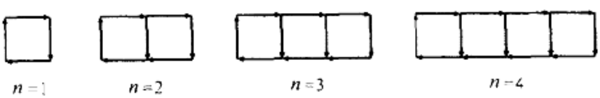


图 1－7

通过观察可以发现：

(1)第 4 个图形中火柴棒的根数是______；

(2)第 n 个图形中火柴棒的根数是______.

明明一看第(1)问就乐了，这道题小学一年级的学生也会做，数一数不就知

道答案了嘛！答案是13.

一看第(2)问便傻了眼，n是几？图形在哪里？想了足足有5分钟，还是下不了手，只好作罢！

案例8

如图1-8，直角梯形$ABCD$中，$AD // BC$，$\angle B = 90°$，$AD + BC < DC$，若腰DC上有点P，使$AP \perp BP$，则这样的点（　　）

A. 不存在

B. 只有一个

C. 有两个

D. 有无数个

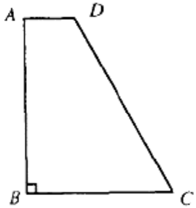


图1-8

明明平时最怵这类探究性试题，因为它的结论并不知道，需要自己去进行探究，考查学生的能力要求很高.他左想右想，还是找不到门路，只好罢休.

第二部分 诊断治疗

初中数学共有七本书，光知识点就有近二百个，涉及的题目成千上万，如果对中考出现的失误不加以合理分类，只是头痛医头，脚痛医脚，那是治标不治本的办法.

本部分拟就解题过程中的几个程序可能出现的失误进行剖析，并开据良方，从而汲取前人之鉴，避免不应有的失误.

这几个程序大体分为审题、探求、解答、检查等几部分，每部分又详尽地列举失误的原因，希望考生从中悟出道理.

一 审题不细，前功尽弃

审题是解题的第一个环节，一旦有误，便在错误的前提下去做无用功，费力不小，前功尽弃.

1. 粗心大意，南辕北辙

案例 1

$\sqrt{9}$的算术平方根为______.

【错解】 $\because\sqrt{9}=3$,

$\therefore\sqrt{9}$的算术平方根为3.

【诊断】 产生错误的原因是审题不细心，出现理解题意上的偏差，从而陷入命题人设计的圈套.

题目中出现了两个算术平方根，一个是用符号表示的，即$\sqrt{9}$，另一个是用文字表示的，不可误认为是同一层意思.

此题是求$\sqrt{9}$的算术平方根，也就是求3的算术平方根，而不是求9的算术平方根.

【正解】 $\because\sqrt{9}=3$,

$\therefore 3$的算术平方根为$\sqrt{3}$,

即$\sqrt{9}$的算术平方根为$\sqrt{3}$.

【启示】 此题给我们的教训是深刻的，在审题中应注意以下几个问题：

(1)审题时要分清层次

第一步先把$\sqrt{9}$的含义弄清，如有可能，把它的值先求出来；

第二步再求这个值的算术平方根.

(2)要有整体观念

为了避免失误，可以把$\sqrt{9}$看成一个整体，求$\sqrt{9}$的算术平方根，就是$\sqrt{\sqrt{9}}$的意思.

(3)不要被完全平方数所迷惑

题目中给出的9是一个完全平方数，这正是命题人使出的障眼法. 如果此题换成求$\sqrt{7}$的算术平方根，便会引起同学们的警觉.

(4)不要被平方根，算术平方根等概念干扰，因为平时经常在求一个数的平方根，或算术平方根上作文章，容易分散同学们的注意力. 因此，审题时要集中精力.

案例 2

已知 x_1, x_2 是方程 $2x^2+3x=1$ 的两个根，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值是 ( )

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

【错解】 由一元二次方程根与系数的关系可知：

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}$,

$x_1x_2=\frac{1}{2}$.

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-3.$$

故应选 B.

【诊断】 一元二次方程的标准形式是 $ax^2+bx+c=0$，而 $2x^2+3x=1$ 并不是它的标准形式，因此不能直接套用公式.

解法中的 $x_1x_2=\frac{1}{2}$是错误的，当方程化为 $2x^2+3x-1=0$ 后，便知 $x_1x_2=-\frac{1}{2}$. 这一不应有的错误导致选择支错误，从而失去了得分的机会.

【正解】 将 $2x^2+3x=1$ 化为 $2x^2+3x-1=0$.

由一元二次方程根与系数的关系可知：

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3.$$

故应选 A.

【启示】 在平时学习时,一定要注意公式成立的条件,比如只有当一元二次方程化为标准形式 $ax^2+bx+c=0$ 后,才得出两根之和 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$,否则便会在符号上出现错误,从而导致整题失误.

案例 3

一元二次方程 $5x^2-3=0$ 的两根的和等于 ( )

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. 0　　D. 不存在

【错解 1】 $\because a=5, b=-3$,

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{5}=\frac{3}{5}$,

故选择 A.

【错解 2】 $\because a=5$,b 不存在,

$\therefore$ 方程两根的和不存在,

故选择 D.

【诊断】 此题的错误解法毛病出在两处:

一是对 $5x^2-3=0$ 的标准形式 $ax^2+bx+c=0$ 不理解,当题目中缺少一次项时,不要误认为 c 为一次项的系数;

二是缺少一次项,说明一次项的系数为 0,而不是不存在.

【正解】 在 $5x^2-3=0$ 中,

$a=5, b=0, c=-3$.

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{5}=0$.

故应选择 C.

【启示】 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,要抓住 a、b、c 的实质,a 是二次项的系数,b 是一次项的系数,c 是常数项.当 $b=0$ 时,方程变为 $ax^2+c=0$;当 $c=0$ 时,方程变为 $ax^2+bx=0$,这样在解题时才不至于出现错误.

为了减少错误,也可以把 $5x^2-3=0$ 先化为 $5x^2+0x-3=0$,再指出 $a=5$,$b=0$,$c=-3$,然后求解.

案例 4

关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+2(m-1)x+1=0$ 有实数根,求 m 的取值范围.

【错解】 $\because$ 关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+2(m-1)x+1=0$ 有实数根,

$\therefore \begin{cases} \Delta \geqslant 0, \\ m^2-1 \neq 0. \end{cases}$

$\Delta=[2(m-1)]^2-4(m^2-1)\times 1$

$=4m^2-8m+4-4m^2+4$

$=-8m+8\geqslant 0$,

$\therefore m\leqslant 1$.

$\because m^2-1\neq 0$,

$\therefore m^2\neq 1$,

$\therefore m\neq \pm 1$.

因此　$m<1$ 且 $m\neq -1$.

【诊断】　此题出现的问题是由于审题不细造成的．题目中只给出了关于 x 的方程$(m^2-1)x^2+2(m-1)x+1=0$有实数根，而并没有给出关于 x 的一元二次方程$(m^2-1)x^2+2(m-1)x+1=0$有实数根，因此，它们的含义是不一样的．

(1)当题目中给出了关于 x 的"方程"有实数根，那么它可能是一元二次方程，也可能是一元一次方程．

(2)当题目中给出了关于 x 的"一元二次方程"有实数根，那么它的二次项系数便不能为零．

【正解】　当 $m^2-1\neq 0$ 时，关于 x 的方程$(m^2-1)x^2+2(m-1)x+1=0$是一元二次方程，且有实数根，

$\therefore \Delta=[2(m-1)]^2-4(m^2-1)\times 1$

$=4m^2-8m+4-4m^2+4$

$=-8m+8\geqslant 0$.

$\therefore m\leqslant 1$. $\because m^2-1\neq 0$, $\therefore m\neq \pm 1$. $\therefore m<1$ 且 $m\neq -1$.

当 $m^2-1=0$ 时，即 $m=\pm 1$.

当 $m=-1$ 时，方程变为一元一次方程 $-4x+1=0$，方程也有实数根；

综上所述，m 的取值范围是 $m<1$.

【启示】　审题时要咬文嚼字，不要一带而过．此题给出了关于 x 的方程"有实数根"，并没有指明"有两个实数根"，它们的含义是不相同的，前者包括有两个实数根或有一个实数根，而后者只有两个实数根，要加以区别对待．

案例 5

见第 1 页案例 1.

【错解】　$\because$一次函数的图象由左上方向右下方倾斜，

$\therefore k<0$.

$\because$一次函数的图象与 y 轴交点的纵坐标(即截距)大于 0，

$\therefore b>0$.

故应选 C.

【诊断】　此题解法的错误还是出在审题不细上．题目中给出的一次函数是 $y=kx-b$，而不是 $y=kx+b$．只有当 $y=kx+b$ 时，一次函数图象的斜率和截距