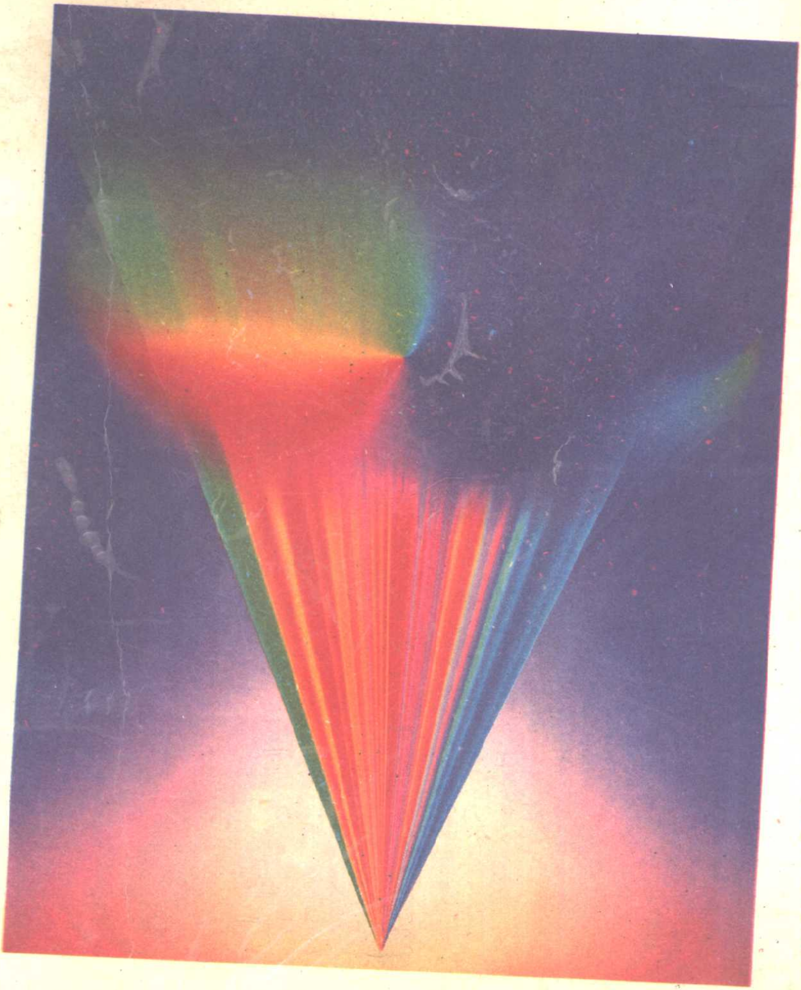
计算机辅助几何设计

方逵　张启松　李建平　编著

JISUANJIFUZHUJIHESHEJIJISUANJIFUZHUJIHESHEJI



JISUANJIFUZHUJIHESHEJIJISUANJIFUZHUJIHESHEJI

河北教育出版社

计算机辅助几何设计

方逵　张启松　李建平　编著

河北教育出版社

（冀）新登字006号

计算机辅助几何设计

方逵　张启松　李建平　编著

河北教育出版社出版发行（石家庄市城乡街44号）
唐山市印刷厂印刷

850×1168毫米 1/32　10.5印张　255,000字　1994年7月第1版
1994年7月第1次印刷　印数：1—8,000　定价：9.70元
ISBN 7-5434-1846-0/T·1

前　　言

到了60年代中期，随着计算机应用的日益广泛，设计人员开始用计算机来辅助某些产品的设计，这一新的技术称之为计算机辅助设计(Computer Aided Design，简称CAD)。目前，CAD技术已深入到现代工业的许多领域(如机械、电子、建筑、纺织、飞机、汽车和造船等)。我国自70年代开展这一技术的理论研究和应用，已取得可喜的成果。

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometic Design，简称CAGD)是CAD的一个分支，它是研究产品几何外型设计而产生和发展起来的一套数学方法，它研究的主要内容是曲线和曲面在计算机中的表示、逼近和计算。通俗地说，CAGD就是研究适合于计算机描述的曲线和曲面的数学方法。CAGD有着广泛的应用领域，它不仅用于几何外型设计，而且还用于动画和艺术图案的创作及地形图复原等。

CAGD是一门综合性的学科，它涉及到微分几何，函数逼近论，计算方法，计算机图形学以及程序设计等方面的内容。它目前最活跃的研究课题是曲线曲面的构造和连接，散乱数据插值，三维立体造型，计算复杂性等。用计算机辅助产品外形设计，就是用CAGD提供的方法在计算机上建立几何外形曲面的数学模型，通过人机交互方式不断修改曲面数学模型的参数，以控制曲面的形状使之达到设计的要求，最后将几何外形的有关数据和参数存储在相应的数据库内，供尔后制造部门调用。

在这本书里，我们重点介绍CAGD中目前较常用的方法，并在AST－286微机上用Turbo Pascal 5.0编写了典型方法的程序，供读者参考。

本书可以作为大专院校计算机、应用数学，机械和建筑专业高

年级学生或研究生学习CAGD内容的教材或教学参考书，也可供从事CAD工作的工程技术人员学习参考。

在本书编写过程中，得到了许多领导、学者、同行和朋友的帮助和支持，在此衷表感谢。由于作者水平所限及经验不足，本书难免有谬误之处，请广大读者批评指正，以使本书更加完善。

作　者

1993年2月

目　录

第一章 几何基础

§1 曲线论

1.1 矢函数和曲线的参数表示

给定点集 Ω，若对于 Ω 中的每一个点 p，有一个确定的矢量 $\boldsymbol{r}$ 与之对应，则称在 Ω 上定义了一个矢函数，记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(P),P\in\Omega.$$

例如，设 Ω 是实数轴上一个区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则得一元矢函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

设 Ω 是一个平面域，$(u,v)\in\Omega$，则得二元矢函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in\Omega.$$

设矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的分量是 t 的函数 $x(t),y(t),z(t)$，则

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},$$
$$\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

若把 $\boldsymbol{r}(t)$ 看成空间一点 p 的径矢或称位置矢 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$，则 t 在 $[\alpha,\beta]$ 中变动时，点 p 的轨迹一般是一条曲线 Γ（图 1.1），其方程

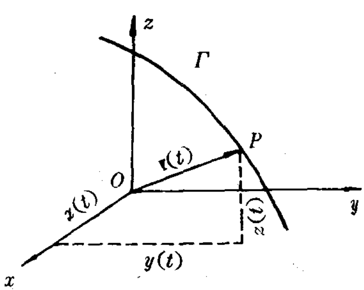


图 1.1

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{1.1}$$

称为曲线 Γ 的参数方程。

设 Γ 为空间任意直线，P_0 为 Γ 上任意一定点，其径矢是 $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$，$\boldsymbol{a}$ 为 Γ 的方向矢量，若 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$为 Γ 上任意一点 P 的径矢，则直线 Γ 的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a},\ -\infty<t<+\infty,$$

其中 t 为直线的参数。

在 xoy 平面上，圆

$$x^2+y^2=a^2$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,a\sin\theta\},0\leqslant\theta<2\pi.$$

抛物线

$$y^2=2px(p>0),-\infty<x+\infty.$$

的参数方程可以写成

$$\boldsymbol{r}=\{\frac{t^2}{2p},t\},-\infty<t<+\infty.$$

任何曲线的参数方程都不是唯一的，例如，对于曲线(1.1)，如果令

$$t=\varphi(u),u_1\leqslant u\leqslant u_2,$$

其中 φ 在闭区间$[u_1,u_2]$上是单调增函数，且

$$\varphi(u_1)=\alpha,\varphi(u_2)=\beta,$$

则曲线(1.1)的参数方程又可写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[\varphi(u)],u_1\leqslant u\leqslant u_2.$$

例 1 双曲螺线

$$\Gamma:\boldsymbol{r}=\{a\mathrm{ch}t,a\mathrm{sh}t,at\}(a>0),$$

如果设 $s=s(t)$，s 为 的弧长参数，则有 $t=\mathrm{sh}^{-1}\dfrac{s}{\sqrt{2}a}$，$\Gamma$ 的参数方程又可写成

$$\boldsymbol{r}=\{a\sqrt{1+\frac{s^2}{2a^2}},\frac{s}{\sqrt{2}},a\,\mathrm{sh}^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}\,a}\}.$$

例 2　图 1.2 中圆的参数方程：

以 θ 为参数

$$\boldsymbol{r}=\{r(1+\cos\theta),r\sin\theta\};$$

以 t 为参数

$$\boldsymbol{r}=\{\frac{t^2}{2r},\pm\frac{t}{2r}\sqrt{4r^2-t^2}\}。$$

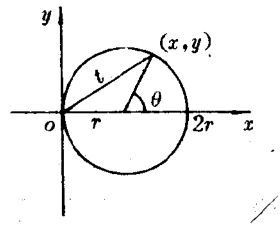


图 1.2

1.2　矢函数的极限和连续曲线

正如数学分析中对实函数那样，我们也对矢函数引进极限、连续和导矢概念。

给定矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$，它在 t_0 附近有定义，$\boldsymbol{r}_0$ 为常矢、如果对任意给定的正数 ε，都存在正数 δ，使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，恒有

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon,$$

则称 t 趋于 t_0 时，矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 以 $\boldsymbol{r}_0$ 为极限，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0. \tag{1.2}$$

由定义不难证明

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t),$$

如此等等。其中实函数 $\lambda(t)$ 当 $t\to t_0$ 时极限存在，设

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}.$$

不难看出，(1.2)成立的充要条件是

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0,$$

即

$$\lim_{t\to t_0}\{x(t),y(t),z(t)\}=\{\lim_{t\to t_0}x(t),\lim_{t\to t_0}y(t),\lim_{t\to t_0}z(t)\}. \tag{1.3}$$

以下引进矢函数连续性概念，如果 $r(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义，$\alpha\leqslant t_0\leqslant\beta$，且

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0),$$

则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处连续，由(1.3)可见，$\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处连续的充要条件是它的分量 $x(t),y(t),z(t)$ 都在 t_0 处连续。

若矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上每一点连续，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，对应于连续矢函数的曲线称为连续曲线。

1.3 矢函数的微分和曲线的切线

设矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $t_0,t_0+\Delta t\in[\alpha,\beta]$，$\Delta t\neq 0$，若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处可导，称其极限为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处的导矢，记作

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}\text{或}\ \boldsymbol{r}'(t_0)$$

即

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}=\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}. \qquad (1.4)$$

导矢有着重要的几何意义，设 Γ 为对应于矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的连续曲线，P_0 为 Γ 上一定点，又设 P 为 Γ 上 P_0 附近一点。如果点 P 沿曲线 Γ 趋于点 P_0 时，曲线的弦 P_0P 有极限位置，则这个极限位置称为曲线 Γ 在点 P_0 的切线，现设 P_0 和 P 对应的参数分别为 t_0 和 $t_0+\Delta t$，则

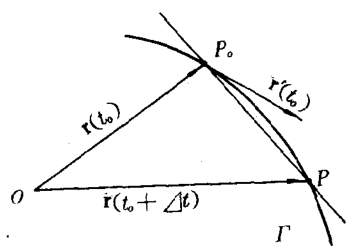


图 1.3

$$\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$$

为弦 P_0P 上的一个矢量，当点 P 沿 Γ 趋于 P_0 时，即 $\Delta t\to 0$，由于 $\boldsymbol{r}(t)$是连续矢量，故$\overrightarrow{P_0P}$也趋于零矢量。

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

也是弦 P_0P 上的一个矢量，当 Δt 趋于零时，如果它的极限不是零矢量，该极限就可以代表 Γ 上点 P_0 处的切线方向。由此可见，若 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\vec{0}$，则曲线 Γ 在点 P_0 处的切线存在，而 $\boldsymbol{r}'(t_0)$就是切线上的一个非零矢量，而且 $\boldsymbol{r}(t_0)$的正向和 Γ 的参数 t 增加方向一致，当选定了曲线的参数 t 之后，自然也就确定了曲线的正向，具有正向的曲线称为有向曲线。

矢函数的微分

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'(t)dt. \tag{1.5}$$

可以验证

$$\frac{d}{dt}\{x(t),y(t),z(t)\}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}, \tag{1.6}$$

写成微分形式

$$d\boldsymbol{r}=\{dx,dy,dz\}.$$

还可以验证下列公式

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda'\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{r}'$$

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'+\boldsymbol{r}_2',$$

$$(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2',$$

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2';$$

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)'=(\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2',\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3'),$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}^2}{dt}=2\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'.$$

对于复合函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),t=\varphi(\mu),$$

则
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du}=\boldsymbol{r}'(t)\varphi'(u).$$

含两个或更多变量的矢函数的各阶偏导矢概念，也可以从实函数的各阶偏导数概念推广而得。

1.4 矢函数的泰勒公式

设矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在以 $t_0, t_0+\Delta t$ 为端点的区间中有直到 n 阶的连续导矢 $\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$，则有 n 阶泰勒(Taylor)公式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n+\varepsilon(\Delta t)^n. \tag{1.7}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon=0$.

1.5 曲线的基本三棱形

设曲线

$$\Gamma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

其中 $\boldsymbol{r}(t)$ 有连续的导矢 $\boldsymbol{r}'(t)$. 若 P_0 为 Γ 上对应于 t_0 的点，当 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\vec{0}$ 时，$\boldsymbol{r}'(t_0)$ 为曲线 Γ 在点 P_0 切线上的一个矢量，$\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\vec{0}$ 这个条件与曲线 Γ 的参数选择无关，今后我们总假定 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\vec{0}$。

曲线 Γ 在点 P_0 的切线方程为

$$\vec{\rho}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(t_0), \tag{1.8}$$

其中 $\vec{\rho}$ 为切线上点的径矢，λ 为切线的参数。

经过点 P_0 而垂直于切线的每一条直线都称为曲线在点 P_0 的法线，过点 P_0 而垂直于切线的平面称为曲线在点 P_0 的法(平)面，它的方程为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)[\vec{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)]=0.$$

其中 $\vec{\rho}$ 为法面上点的径矢。

经过 Γ 在点 P_0 的切线的每一个平面都称为曲线在点 P_0 的切(平)面。

在曲线 Γ(非直线)上一点 P_0 附近取一点，Γ 在点 P_0 的切线

和点 P 一般地确定一个平面 Π，当点 P 沿 Γ 趋于 P_0 时，平面 Π 有极限位置，称这个极限位置为 Γ 在点 P_0 的密切(平)面，它是 Γ 在点 P_0 的切面之一。

可以证明，若 $\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\vec{0}$，则该矢量是 Γ 在点 P_0 的密切面法线上的矢量，因此 Γ 在点 P_0 的密切面方程为

$$(\vec{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0),\boldsymbol{r}'(t_0),\boldsymbol{r}''(t_0))=0, \qquad (1.9)$$

其中 $\vec{\rho}$ 为密切面上点的径矢。

密切面在点 P_0 的法线是 Γ 在点 P_0 的法线之一，称它为 Γ 曲线在点 P_0 的副法线，它与 Γ 在点 P_0 的切线互相垂直，法面和密切面互相垂直，它们的交线是 Γ 在点 P_0 的法线之一，称它为 Γ 在点 P_0 的主法线。切线和副法决定的平面是 Γ 在点 P_0 的切面之一，称它为 Γ 在点 P_0 的从切面。这样，Γ 在点 P_0 就有三条互相垂直的直线，它们两两决定三个互相垂直的平面，如图 1.4。它们所构成的三棱形称为曲线 Γ 在点 P_0 的基本三棱形。

矢量 $\boldsymbol{r}'$ 在切线上，$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 在副法线上，$(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'$ 在主法线上，我们称曲线上 $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)=\vec{0}$ 的点为曲线的逗留点。

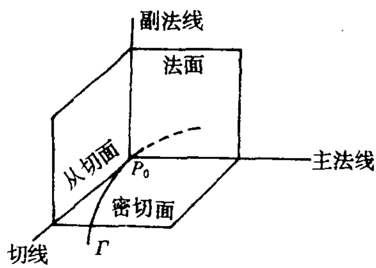


图 1.4

1.6 弧长和弧长参数

已知曲线

$\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$

假设 $\boldsymbol{r}(t)$ 有连续的导矢 $\boldsymbol{r}'(t)$，由 (1.6)

$$\boldsymbol{r}'(t)=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}。$$

因此 Γ 的弧微分

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=|\boldsymbol{r}'(t)|dt,$$

Γ 的弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\int_{\alpha}^{\beta}|\boldsymbol{r}'(t)|dt。$$

令

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(t)|dt,\quad \alpha\leqslant t_0,t\leqslant\beta, \tag{1.10}$$

其中 t_0 是$[\alpha,\beta]$上任意固定参数，且假定 $t>t_0$ 时 $s(t)>0$；$t<t_0$ 时 $s(t)<0$.

由于 $s'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|>0$，可知 $s(t)$是单调连续增函数，因此 $s(t)$的反函数 $t(s)$存在且连续，所以有

Γ: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}[t(s)]\triangleq\bar{\boldsymbol{r}}(s)$，

这样 Γ 就写成了以其弧长为参数的方程。

(1.10)两边对 t 微分，得

$$ds=|\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

故

$$ds^2=(\boldsymbol{r}')^2dt^2=d\boldsymbol{r}^2. \tag{1.11}$$

1.7 基本矢

引进弧长参数后，为了区别一般参数和弧长参数的导矢起见，我们约定，$\boldsymbol{r}(s)$对弧长 s 求导用记号"."，例如$\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$；$\boldsymbol{r}(t)$对一般参数 t 求导用记号"′"，例如 $\boldsymbol{r}'(t)=\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$.

给定曲线

$$\Gamma:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),s\text{ 为弧长参数。}$$

由(1.11)$ds^2=d\boldsymbol{r}^2$，故有

$$1=\frac{d\boldsymbol{r}^2}{ds^2}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{\mathrm{ds}}\right|^2=|\dot{\boldsymbol{r}}(\mathrm{s})|^2,$$

所以

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|=1. \tag{1.12}$$

可以证明：对以弧长为参数的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，其逗留点的条件$\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\vec{0}$简化为$\ddot{\boldsymbol{r}}=\vec{0}$. 主法线上的非零矢量$(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\times\dot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}$.

记 $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$，由(1.12)知，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 Γ 切线上的单位矢量，称它为曲线 Γ 的切矢。

在曲线 Γ 的非逗留点处($\ddot{\boldsymbol{r}}\neq\vec{0}$)，令

$$\beta=\ddot{\boldsymbol{r}}/|\ddot{\boldsymbol{r}}|,$$

则 β 为 Γ 主法线上的单位矢量，称它为曲线 Γ 的主法矢。

设 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 Γ 副法线上的单位矢量，称它为曲线 Γ 的副法矢。

1.8 伏朗内——塞雷公式

在曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的每一个非逗留点处，有三个互相垂直的单位矢量，即切矢 α，主法矢 β 和副法矢 γ，且按此顺序构成右旋系。

由于 α,β,γ 线性无关，空间中每一个矢量都可以写成它们的线性组合。可以证明 $\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma}$ 可以表示成下列形式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\alpha}}= \quad \kappa\boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}=-\kappa\boldsymbol{\alpha}+ \quad \tau\boldsymbol{r}; \\ \dot{\boldsymbol{r}}= \quad -\tau\boldsymbol{\beta}.\end{cases} \tag{1.13}$$

其中

$$\kappa=|\ddot{\boldsymbol{r}}|=|\dot{\alpha}|,\tau=\dot{\beta}\gamma=-\beta\dot{\gamma}. \tag{1.14}$$

都是弧长 s 的函数，分别称为曲线的曲率和挠率。

公式(1.13)称为伏朗内—塞雷(Frenet—serret)公式。由该公式知，直线($\dot{\alpha}=\vec{0}$)的曲率恒等于零，平面曲线($\dot{\gamma}=\vec{0}$)的挠率恒等于零。