SHUXUE

数学

探究性学习导读

TANJIUXIN

XUEXI DAODU

余应龙著

上海教育出版社
SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

数学探究性学习导读

SHUXUE TANJIUXING XUEXI DAODU

上海教育出版社

数学探究性学习导读

余应龙　著

上 海 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

数学探究性学习导读 / 余应龙著. —上海：上海教育出版社，2002.9
ISBN 7-5320-8533-3

Ⅰ.数... Ⅱ.余... Ⅲ.数学课—高中—自学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第069164号

数学探究性学习导读

余应龙 著

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号 邮编：200031）

各地新华书店经销

商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 9.5 字数 228,000

2002年9月第1版 2002年9月第1次印刷

印数 1—5,150 本

ISBN 7-5320-8533-3/O·4 定价：14.50元

前　言

笔者编写《数学探究性学习导读》这本书是基于以下的思考：

1. “解决问题(Problem Solving)”的理念.

曾与出版界的朋友聊起中学生读物的现状，他们无不感慨大量的习题册和试题充斥书店的现象，共同认为提高中学生读物的“营养价值”已是当务之急.

试题并不等于问题，希尔伯特在20世纪初提出的23个著名的数学问题大大地推动了20世纪的数学发展，开创了许多新的数学领域，造就了不少优秀的数学家，这就是问题的价值所在. 众所周知，《科学的美国人》杂志是世界上最有影响的杂志之一，马丁·加德纳每月在该杂志上发表有关数学问题的专栏文章，在长达30多年的时间中，吸引了无数的青少年投身于数学之门. 由此可见提出数学问题之魅力的一斑，从某种意义上说，提出问题的重要性并不亚于解决问题.

如果说中学生最损失不起的是时间的话，那么帮助他们从大量习题的反复操练中解脱出来，也可谓是一件功德无量之善事. 数学教育工作者需要为中学生提供适合于他们实际的、带有挑战性的问题.

2. 培育“研究能力”是教学中重中之重的理念.

教育部在“面向21世纪教育振兴行动计划”中指出：在当前及今后一个时期，缺少具有国际领先水平的创新人才，已成为制约我国竞争力的主要因素之一.

面对缺少具有国际领先水平的创新人才这一严峻事实，是这么多年来所付出的代价换来的结论．我国缺少大学生吗？缺少硕士生和博士生吗？从人才的总量来看，我国已名列前茅，症结何在？笔者认为，在 21 世纪的激烈的国际竞争中，目光已不能再囿于提高几个百分比的升学率，而应该把创新精神和实践能力书写在教育的旗帜上．一个学过大学课程的人能说他是真正意义上的大学生吗？只有当他完成了毕业论文以后才有可能予以承认，因为他体验了一次耗尽心血的研究经历．我们数学教育工作者是否可以把这一门槛略微前移一下，为我们的中学生提供一些在自己研究过程中的选题，创设一个探究性学习的机会和空间．

3．“一切为学生的终生发展奠基”的理念．

中学生渴望进入一所理想的大学深造是无可非议的，但教育仅满足于此显然是不够的．教育应该力求达到“一切为学生的终生发展奠基”的境界，尤其是当今世界已进入到信息时代和知识经济时代，终生学习的意识和可持续发展的能力已越来越为人们所重视．

笔者在调查许多模范人物、学者和成功的企业家时，获知他们有这样的共识：中学数学中的许多具体的知识在他们的工作岗位上未必直接用到，然而数学的逻辑思维，思考能力却陪伴终生，受益匪浅．这给我们以这样的启示：学生是否应该克服短视行为，是否应该认识到学习数学决不能只追求一些习题的结果，而忽视了数学的学习过程以及对数学的思想方法的领悟和解决问题的能力的培养．把一些时间用在与中学数学课程相容的，带有挑战性的问题上，经历一次艰辛的发现、再发现的学习和探究的过程，恐怕比把同样多的时间花在习题的反复操练上对人的一生更有意义．

在几十年的数学教学和数学奥林匹克竞赛辅导的实践中，

笔者积累了许多有关选题. 本书提供了其中与中学数学关系密切的内容,这是笔者的一次大胆尝试. 全书共二十个选题. 每个选题包括【观察】、【问题】、【问题探究】和【回顾与思考】等四个部分,旨在为读者提供一些带有挑战性的问题及其探索过程,以锻炼读者的意志,提高读者的探究能力,并从中享受成功的喜悦. 由于这些选题的难易程度不尽相同,读者可以选用一个选题的全部或其中的一部分作为探究性学习的内容. 同时笔者也期待读者在此基础上进行更深入的研究,思考更一般的问题,并对本书中不足或错误之处加以指正.

在许多中学都在实施探究性学习的今天,本书如能作为中学生开展探究性学习的借鉴,对中学生的智力发展有所帮助,这就是笔者的心愿.

在编写过程中,康士凯和姜宝坤两位老师对本书提出了不少建设性的意见,在此表示衷心的感谢.

目　录

一　将一个自然数表示为若干个连续自然数的和

【观　察】

1. 我们知道,任何奇数都可以表示为两个连续自然数*的和. 例如, $3 = 1+2$, $5 = 2+3$, $7 = 3+4$, 等等. 有些奇数还可以表示为三个连续自然数的和. 例如, $9 = 2+3+4$, $15 = 4+5+6$, 等等. 但它们都不能表示成四个连续自然数的和,因为四个连续自然数的和是偶数.

偶数显然不能表示成两个连续自然数的和,但是有些偶数能表示为三个连续自然数的和. 例如, $6 = 1+2+3$, $18 = 5+6+7$, 等等,也有的偶数能表示成四个连续自然数的和. 例如, $14 = 2+3+4+5$. 当然,有的自然数不能表示成两个或两个以上的连续自然数的和,如 2、4 等.

2. 进一步观察有若干个连续自然数相加所得的和的例子:

$5+6+\underline{7}+8+9 = 7\times 5$　(即看成 5 个 7 相加);

$4+5+\underline{6}+\underline{7}+8+9 = 13\times 3$　(即看成 3 个 13 相加).

上述两个等式的左边是若干个连续自然数的和. 观察等式的右边,探究怎么样的自然数可以表示为若干个连续自然数的和?

---

* 本书中所涉及到的自然数指的是正整数.

【问　题】

1. 怎样的自然数能表示成两个或两个以上的连续自然数的和？怎样的自然数不能这样表示？

2. 如果一个自然数能表示成两个或两个以上的连续自然数的和，那么怎样把这个和具体表示出来呢？有多少种不同的表示方法？

【问题探究】

1. 假设自然数 n 能表示成从 m 开始的 k $(k\geqslant 2)$ 个连续自然数的和，即

$$n=m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+k-1),$$

则

$$\mathbf{2n=k(2m+k-1)},\tag{1-1}$$

其中 $k<2m+k-1$.

由于 $k\geqslant 2$，又 $2m+k-1\geqslant 3$，所以 k 与 $2m+k-1$ 都是 $2n$ 的大于 1 的约数. 因为 $2m-1$ 是奇数，所以 k 与 $2m+k-1$ 这两个约数必定一奇一偶. 由此可知，$2n$ 必有大于 1 的奇约数. 又因为 2 是偶数，所以 n 也必有大于 1 的奇约数.

这样，我们可以得到以下结论：

如果自然数 n 能表示成两个或两个以上的连续自然数的和，那么 n 必有大于 1 的奇约数.

换句话说，如果自然数 n 没有大于 1 的奇约数，那么 n 一定不能表示成两个或两个以上的连续自然数的和. 例如，2、4、8、16 等 2 的正整数次幂都不能表示成两个或两个以上的连续自然数的和.

反之，如果自然数 n 有大于 1 的奇约数，那么 n 是否一定能表示成两个或两个以上的连续自然数的和呢？下面我们来探求这一点，即探求对于任何一个有大于 1 的奇约数的自然数 n，是否能够

求出相应的自然数 k $(k \geqslant 2)$ 和 m,使从 m 开始的 k $(k \geqslant 2)$ 个连续自然数的和等于 n.

设 p 是 n 的一个大于 1 的奇约数,且 $2n = pq$,则 q 必是偶数.由(1-1)式可知,k 是 p 和 q 中较小的一个,且 $|p-q| = 2m-1$. 于是取 $k = \min(p, q)$, $m = \frac{|p-q|+1}{2}$. 由于 p 与 q 一奇一偶,所以 $\frac{|p-q|+1}{2}$ 是自然数.可以证明从 m 开始的 k $(k \geqslant 2)$ 个连续自然数的和的确是 n.

(1) 如果 $p < q$,那么 $k = p > 1$, $m = \frac{q-p+1}{2}$. 这时

$$m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+k-1)$$
$$=\frac{k(2m+k-1)}{2}=\frac{p(q-p+1+p-1)}{2}=\frac{pq}{2}=n.$$

(2) 如果 $p > q$,那么 $k = q > 1$, $m = \frac{p-q+1}{2}$. 这时

$$m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+k-1)$$
$$=\frac{k(2m+k-1)}{2}=\frac{q(p-q+1+q-1)}{2}=\frac{pq}{2}=n.$$

于是,可以得到以下结论:

如果一个自然数有大于 1 的奇约数,那么按上述方法一定能将这个自然数表示成两个或两个以上的连续自然数的和.

这样我们完全解决了第 1 个问题.

2. 实际上,上面的求 k 与 m 的方法已经解决了第 2 个问题的前半部分.

由于 $2n = pq$, p 是 $2n$ 的大于 1 的奇约数,也是 n 的大于 1 的奇约数,所以 $2n$ 的偶约数 $q = \frac{2n}{p}$, $k = \min(p, q) \geqslant 2$, $m =$

$\frac{|p-q|+1}{2}$ 也都由 p 唯一确定. 对于 n 的不同的大于 1 的奇约数 p,相应的 q、k、m 显然也不同,即 p 与数组 k、m 一一对应. 所以 n 有几个大于 1 的奇约数,就有几组 k、m,从而 n 就有几种方法表示为两个或两个以上的连续自然数的和. 这也解决了第 2 个问题的后半部分.

至此,我们就完全解决了本文开始时提出的两个问题.

下面来看一个具体的例子,如何把一个有大于 1 的奇约数的自然数表示为两个或两个以上的连续自然数的和? 且有多少种不同的表示方法?

例 用所有可能的方法把 126 表示成两个或两个以上的连续自然数的和.

解 $126 = 2\times 3^2\times 7$, 有 $(2+1)(1+1)-1=5$ 个大于 1 的奇约数,它们是 3、7、9、21、63.

(1) 当 $p=3$ 时, $q=\frac{252}{3}=84$, 取 $k=3$, $m=\frac{84-3+1}{2}=41$. 于是

$$126 = 41+42+43.$$

(2) 当 $p=7$ 时, $q=\frac{252}{7}=36$,取 $k=7$, $m=\frac{28-7+1}{2}=15$. 于是

$$126 = 15+16+17+18+19+20+21.$$

(3) 当 $p=9$ 时, $q=\frac{252}{9}=28$,取 $k=9$, $m=\frac{28-9+1}{2}=10$. 于是

$$126 = 10+11+12+13+14+15+16+17+18.$$

(4) 当 $p=21$ 时, $q=\frac{252}{21}=12$,取 $k=12$, $m=\frac{21-12+1}{2}$

$= 5$. 于是

$$126 = 5 + 6 + 7 + \cdots + 16.$$

(5) 当 $p = 63$ 时, $q = \frac{252}{63} = 4$,取 $k = 4$, $m = \frac{63 - 4 + 1}{2}$ $= 30$. 于是

$$126 = 30 + 31 + 32 + 33.$$

在这个例子中,126 有 5 个大于 1 的奇数,恰好有 5 种方法把 126 表示成两个或两个以上的连续自然数的和.

【回顾与思考】

本选题主要探索怎样的自然数能表示成若干个连续自然数的和? 以及怎样把这个和具体表示出来?

我们先假设自然数 n 能表示成从 m 开始的 k 个连续自然数的和,推出(1-1)式,得到 k 与 $2m + k - 1$ 都是 $2n$ 的大于 1 的约数,且这两个约数必定是一奇一偶. 也就是说,$2n$ 必有一个偶约数,一个大于 1 的奇约数.

这时,从"$2n$ 必有一个偶约数"并不能推出与 n 有关的结论,而从"$2n$ 必有一个大于 1 的奇约数"却可以立即推出"n 必有大于 1 的奇约数",我们就自然紧紧抓住这个新的结论探究下去,直到完美地解决第 1 个问题为止. 这说明在具体探究时,要善于抓住主要方向,找出起决定作用的结论.

二 用图形推导前 n 个自然数的平方和与立方和的公式

【观 察】

在求前 n 个自然数的平方和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 时，我们通常利用公式：

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1,$$

分别令 $k=1$，得 $\quad 2^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1$；

$k=2$，得 $\quad 3^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1$；

$k=3$，得 $\quad 4^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1$；

……………………

$k=n$，得 $\quad (n+1)^3=n^3+3\times n^2+3\times n+1.$

然后将以上 n 个等式相加，整理得

$$(n+1)^3=1^3+3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3\times(1+2+3+\cdots+n)+n.$$

再推导出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

在求前 n 个自然数的立方和 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 时，利用公式：

$$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1,$$

用类似的方法可以推导出 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

从理论上说，用这样的方法可以推导出前 n 个自然数的任意次方的和.

此外，也可以先尝试前几个数，找出规律，猜出结论，再用数学归纳法加以证明.

这些方法都是传统的，是否有其他的方法呢？请看以下图形：

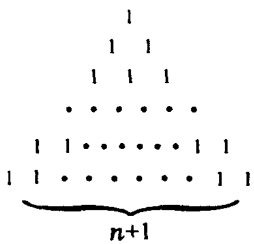

图 2-1

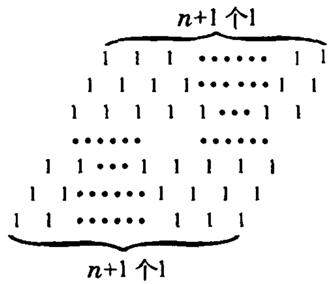

图 2-2

如图 2-1，从上到下第 1 行写 1 个 1，第 2 行写 2 个 1，第 3 行写 3 个 1，…，第 n 行写 n 个 1，所以图 2-1 中各数之和是

$$1+2+3+\cdots+n.$$

然后把图 2-1 旋转 180°后得到另一个三角形，再把这两个三角形拼成一个平行四边形的样子(图 2-2). 图 2-2 中共有 n 行，每行都有 $n+1$ 个 1，即每行中各数的和是 $n+1$，于是图 2-2 中各数的和是 $n(n+1)$.

所以 $$2(1+2+3+\cdots+n)=n(n+1),$$

即 $$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

类似地，能否用图形推导更多的与一些自然数的和的有关结论呢？

【问　题】

能否用与【观察】中类似的方法推导：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

与
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

【问题探究】

1. 由于 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=1+(2+2)+(3+3+3)+\cdots+(n+n+\cdots+n)$，所以我们可以把这些数也排成三角形的样子：从上到下第 1 行写 1 个 1，第 2 行写 2 个 2，第 3 行写 3 个 3，…，第 n 行写 n 个 n，如图 2-3 所示.

$$\begin{array}{c} 1\\ 2\quad 2\\ 3\quad 3\quad 3\\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\ n-1\quad n-1\ \cdots\cdots\ n-1\quad n-1\\ \underbrace{n\quad n\ \cdots\cdots\ n\quad n}_{n\text{个}n} \end{array}$$

图 2-3

$$\begin{array}{c} n\\ n-1\quad n\\ n-2\quad n-1\quad n \qquad n\text{个}n\\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\ 2\quad 3\ \cdots\cdots\ n-1\quad n\\ 1\quad 2\quad 3\ \cdots\cdots\ n-1\quad n \end{array}$$

图 2-4

然后把图 2-3 分别按逆时针方向与顺时针方向旋转 120°后得到两个新三角形(图 2-4 与图 2-5)，再把这两个新三角形(图 2-4 与图 2-5)都叠到原三角形(图 2-3)上，且将同一位置上的三个数相加，就得到图 2-6 所表示的三角形.

$$\begin{array}{c} n\\ n\quad n-1\\ n\text{个}n \qquad n\quad n-1\quad n-2\\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\ n\quad n-1\ \cdots\cdots\ 3\quad 2\\ n\quad n-1\ \cdots\cdots\ 3\quad 2\quad 1 \end{array}$$

图 2-5

$$\begin{array}{c} 2n+1\\ 2n+1\quad 2n+1\\ 2n+1\quad 2n+1\quad 2n+1\\ \cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\ 2n+1\quad 2n+1\ \cdots\cdots\ 2n+1\quad 2n+1\\ \underbrace{2n+1\quad 2n+1\ \cdots\cdots\ 2n+1\quad 2n+1}_{n\text{个}2n+1} \end{array}$$

图 2-6

图 2-3 中各数之和是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$. 图 2-6 中的每一个数都是 $2n+1$, 所以图 2-6 中各数之和是 $\frac{n(n+1)}{2}\times(2n+1)$. 这样,我们就得到

$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

即
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. 下面用图形来推导公式: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

我们把 1, 2, 3, …, n; 2, 4, 6, …, $2n$; 3, 6, 9, …, $3n$; …; n, $2n$, $3n$, …, $n\times n$ 依次排成 n 行:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\
3 & 6 & 9 & \cdots & 3n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n & 2n & 3n & \cdots & n\times n
\end{array}$$

由于各列数的和分别是 $\sum_{k=1}^{n}k$, $2\sum_{k=1}^{n}k$, $3\sum_{k=1}^{n}k$, …, $n\sum_{k=1}^{n}k$, 因而所有的数的和是 $(1+2+3+\cdots+n)\sum_{k=1}^{n}k=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$.

再把上述图形按顺时针方向旋转 45°,得到图 2-7.

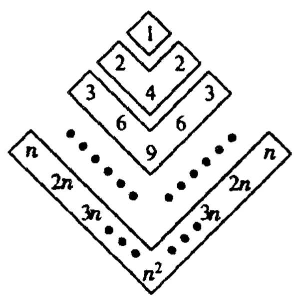

图 2-7

从图 2-7 可以看出,第一个数是 1,各个"V 字形"内的数的和都是完全立方数: