

138

761311.2
L31a

工程结构时变可靠度 理论及其应用

李桂青 李秋胜 编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书全面、系统阐述结构时变、时不变可靠度的基础知识、基本理论、计算方法及其在抗风、抗震结构计算和设计中的应用,共分六篇。第一篇为数学基础,简明扼要地介绍了状态方程、概率理论和随机微分方程;第二篇为考虑结构性能时变性的动力特性分析方法,包括多层建筑、高层建筑、高耸结构、非周期时变体系和开裂结构的自由振动计算方法;第三篇为风荷载与风振反应的实测与模拟,重点介绍了香港某超高层建筑的实测结果和风荷载的三维数值模拟方法;第四篇为随机时变可靠度的一般理论,主要阐述结构抗力的时变模型、结构时变概率极限状态设计方法,以及考虑结构缓变性和陡变性的时变动力可靠度计算方法;第五、六篇分别介绍抗风、抗震时变动力可靠性分析方法,指出了风振系数规范值的误差,给出了三峡大坝厂房坝段时变可靠度的评估方法和结果,以及武汉电视塔抗风可靠度、北京框架轻板抗震试验住宅时变可靠度的分析方法和结果,特别是阐述了至今很少有人研究过的桥梁等工程结构不发生空气动力失稳的可靠度分析方法。

本书可供广大工程设计人员、科学研究工作者和大专院校工科专业特别是土建专业和力学专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程结构时变可靠度理论及其应用/李桂青、李秋胜编著,--北京:科学出版社, 2001

ISBN 7-03-009326-7

I.工… I.①李…②李… III.工程结构—结构可靠性 N.TU311.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 22657 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2001 年 8 月第一次印刷 印张:18¼

印数:1—2 500 字数:416 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新伟〉)

前 言

近 10 年来,我国各类工程结构特别是建筑结构荷载、抗震规范均相继改为以可靠度为目标的设计方法,因而系统地介绍可靠度理论,对于正确理解和执行设计规范是必要的。

国内外在可靠性理论及其应用方面,已有不少专著。但这些专著主要以静力可靠度为主,而专门论述结构动力可靠性理论及其在抗风、抗震结构中应用的专著尚不多见。拙著《结构动力可靠性理论及其应用》(地震出版社,1993 年)算是首次尝试吧!自该书问世以来,受到工程界不少同仁的关注,引起了很多中青年科技工作者的兴趣。但该书因涉及数学基础较深,部分读者阅读有一定困难。另外,在撰写该书时,我们对结构时变可靠度理论的研究工作刚刚起步,因而该书未涉及到时变性问题。鉴于这些原因,著者决定再撰写《工程结构时变可靠度理论及其应用》一书,算是《结构动力可靠性理论及其应用》的姊妹篇吧!

本书分六篇共十四章。第一篇主要介绍本书所要求的数学基础,主要是状态方程、概率理论和随机微分方程。这一部分论述简明,对一些重要的公式作了详细推导,比较便于自学。

第二篇为结构时变动力特性的分析方法。因为可靠度分析包括作用(荷载)与效应两大部分。而结构效应分析,首先涉及结构本身的性能,特别是其动力特性。如所知,结构性能具有时变性,即随着时间的推移,结构性能受环境及长期荷载的影响将发生缓慢变化,一般表现为结构刚度、强度的衰减。这种时变性,本书称为缓变性。本篇将介绍考虑结构性能时变性的分析方法,其特点是:不仅考虑了结构的时变性,而且还计及空间作用。

第三篇为风荷载与风振反应的实测与模拟。本书第二作者曾对香港某超高层建筑上的风作用及风振反应进行过一些实测,取得了极为宝贵的资料,本篇对其作了简要介绍。建筑结构风荷载的三维数值模拟,是风工程的一个重要研究方向。本书第二作者在这方面进行了多年的研究,初步建立了一套功能强、效率高的模拟方法,第八章对其作了简要介绍,并附有计算实例。

第四篇为随机时变结构可靠度的一般理论,包括静力可靠度和动力可靠度两个部分。这是本书的重点篇,主要介绍结构抗力的时变模型、结构时变概率极限状态的设计方法,以及考虑结构缓变性和陡变性(结构性能在一次加载过程中的变化)的时变动力可靠性计算方法等。

第五篇为抗风结构时变可靠度分析方法,主要内容包括:结构顺风向、横风向的时变动力反应的一般公式,风振反应的精确解,风振系数 β 的规范值与本书给出的精确值的比较,以及便于使用的风振系数的表格、武汉电视塔时变动力可靠度分析、玻璃幕墙抗风时变可靠度分析方法、桥梁等工程结构不发生空气动力失稳的可靠度分析方法等。

第六篇为抗震结构时变动力可靠度分析方法,内容包括抗震结构时变可靠度的一般理论、基本公式及其应用;最后一章为三峡大坝厂房坝段时变动力可靠度评估,详细介绍

了评估方法、可靠性界限的确定、随机反应分析方法,以及时变可靠度的计算结果等。

本书作者曾是王光远院士的研究生,毕业后又一直受到恩师的关怀,书中的一些概念、方法的形成均与恩师的教诲有关。本书第一作者在 20 世纪 50 年代末就在恩师指导下,开始研究随机振动,基本上与国际同步。如所周知,随机振动作为一门学科是 1958 年才诞生的^[136],而我们从 1960 年就开始发表抗风、抗震结构随机振动论文^[63~66],这首先应该归功于恩师的贡献。值此拙著出版之际,谨向恩师表示最衷心的感谢!

本书第一作者曾招收过 70 名博士、硕士研究生,其中不少学生曾为本书作出过贡献,亦借此机会表示感谢!

书中的主要内容是国家自然科学基金资助项目、高等学校博士学科点专项科研基金资助项目、香港特区政府科研基金资助项目的研究总结,著者对这些基金组织的关心、支持表示深深的谢意!

第一篇 数学基础

第一章 状态方程

1.1 引言

现代振动理论特别是振动控制理论、动力可靠性理论,普遍采用状态变量法,它可以将离散自由度体系的运动方程(组)写成一阶微分方程(组),而且适用于多输入、多输出、时变、非线性和随机等各种系统。本书也将在很多章节采用状态变量法。为便于阅读本书,特于本章对状态变量方程及其解法作一些浅出而又较为深入的介绍。

1.2 振动体系状态方程的建立

1.2.1 单自由度体系

先以单自由度体系的振动问题为例说明状态、状态变量的概念以及状态方程的建立方法。如所周知,具有时不变质量、刚度和阻尼的单自由度体系的振动方程一般可写成

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \quad (1.1)$$

式中 M 、 K 、 C 分别为体系的质量、刚度与阻尼系数, $F(t)$ 为外荷载。通常都是在 M 、 K 、 C 及 $F(t)$ 为已知的情况下,求解这个方程。

式(1.1)是一个二阶微分方程,在任一瞬时三个未知量,即 u 、 $\dot{u}$ 及 $\ddot{u}$,这方程给出了它们之间的一个约束,因此只要已知其中的二个量,则另一个量就可惟一地确定。可见,二阶微分方程实际上只有二个基本变量,这两个基本变量在任一时刻的值称为体系在该时刻的状态;而这两个基本变量称为体系的状态变量。

一般说来,系统在任一时刻 t_0 的状态是一组信息量,它与荷载 $F(t)$ 一起可以惟一地确定体系在 $t > t_0$ 时的运动规律;对于一个用 n 阶微分方程描述的体系则状态变量有 n 个,共构成 n 维向量;以这 n 维向量的 n 个分量为坐标轴构成的 n 维空间,称为状态空间。任何一个状态,可以看成是状态空间的一个点。

对于式(1.1),通常 u 及 $\dot{u}$ 为状态变量,并以 x_1 及 x_2 表示,即

$$u = x_1, \quad \dot{u} = x_2 \quad (1.2)$$

由式(1.1)得

$$\ddot{u} = -M^{-1}C\dot{u} - M^{-1}Ku + M^{-1}F(t) \quad (1.3)$$

由式(1.2)及(1.3)可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}Cx_2 - M^{-1}Kx_1 + M^{-1}F(t) \end{aligned}$$

将以上两个一阶微分方程写成矩阵形式,则有

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{F\} \quad (1.4)$$

式中

$$\begin{aligned}\{X\} &= \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} & \{F\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} \\ [A] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} & [B] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\{X\}$ 称为体系的状态向量。式(1.4)称为体系的状态向量微分方程或状态向量矩阵微分方程,简称状态方程。

体系的位移 u 即反应,通常称为输出,由式(1.2)用矩阵表示为

$$u = [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [G]\{X\} \quad (1.5)$$

式中 $[G] = [1 \quad 0]$ 。

式(1.5)称为输出方程。

单自由度体系自由振动的状态方程则为

$$\{X\} = [A]\{X\} \quad (1.6)$$

1.2.2 多自由度体系

对具有 n 个自由度的体系,振动方程可用矩阵表示为

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad (1.7)$$

式中 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ 为体系的质量矩阵、刚度矩阵与阻尼矩阵,均为 n 阶方阵。

令

$$\begin{aligned}\{x_1\} &= \{u\} \\ \{x_2\} &= \{\dot{u}\} \\ \{x\} &= [\{x_1\} \{x_2\}]^T\end{aligned}$$

则式(1.7)可写成

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{F(t)\} \quad (1.8)$$

式中

$$\begin{aligned}[A] &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \\ [B] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [M]^{-1} \end{bmatrix} \\ \{F\} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F(t)\} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

I_n 为 n 阶方阵。

式(1.8)称为 n 个自由度体系振动问题的状态方程,简称为体系的状态方程;而 n 维向量 $\{X\}$ 则为体系的状态向量。

结构反应,即体系的输出可表示为

$$\{U\} = [G]\{X\} \quad (1.9)$$

式中

$$G = [I_n \quad 0]$$

令式(1.8)中的 $\{F(t)\}=0$,则得多自由度体系的自由振动的状态方程。

1.2.3 化高阶微分方程为状态方程

设某振动体系的控制微分方程为高阶方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = F(t) \quad (1.10)$$

取 y 及 y 的各阶导数为状态变量

$$x_i = y^{(i-1)} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

具有这种性质的变量称为相变量。用相变量可将式(1.10)表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + F(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

这就是将高阶微分方程式(1.10)化成的状态方程,用矩阵表示为

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + \{B\} \quad (1.12)$$

式中

$$\begin{aligned} \{X\} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \{B\} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F(t) \end{bmatrix} \\ [A] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

向量 $\{B\}$ 仅最后一个元素为 $F(t)$,而 n 阶方阵 $[A]$ 的其主对角线上方的元素 $a_{i,i+1}$ 为1,而其最下面一行的元素分别为 $-a_n, -a_{n-1}, -a_{n-2}, \cdots, a_1$,即为式(1.10)中的系数的负数,而 $[A]$ 中其余元素均为零。这种形式的状态方程在振动控制中是经常遇到的。

1.3 时不变振动体系状态方程的解

1.3.1 自由振动状态方程的解

我们从上一节已经知道具有时不变参数的单自由度及多自由度体系的振动方程是齐次状态矩阵微分方程。在讨论矩阵微分方程的解法之前,先回顾一下纯量微分方程的幂级数解法。

如所周知,微分方程

$$\dot{x} = ax \quad (1.13)$$

的解可设为

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \quad (1.14)$$

将式(1.14)代入式(1.13),得

$$\sum_{i=1}^{\infty} i b_i t^{i-1} = a \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$$

比较上式两边 t^i 的系数,可得

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0 \\ b_k &= \frac{1}{k!} a^k b_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

令 $t=0$, 由式(1.14)可得

$$b_0 = x(0) \quad (1.16)$$

将式(1.15)、(1.16)代入式(1.14)得

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k t^k \right) x(0)$$

所以

$$x(t) = e^{at} x(0) \quad (1.17)$$

对于时不变多自由度体系自由振动的矩阵微分方程

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} \quad (1.18)$$

亦可用上述类似方法求得其解为

$$\{X\} = e^{[A]t} \{X(0)\} \quad (1.19)$$

上式的意义是系统由初始状态 $\{X(0)\}$ 转移到了新的状态 $\{X(t)\}$, $e^{[A]t}$ 称为矩阵指数函数, 它是状态转移矩阵, 通常用 $\Phi(t)$ 表示。

矩阵指数函数具有以下性质:

$$(1) e^{[A]t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A]^k t^k}{k!}, \text{ 对任意有限 } t \text{ 值是绝对收敛的。}$$

$$(2) \frac{d}{dt} e^{[A]t} = [A] e^{[A]t}.$$

$$(3) e^{[A](t_1+t_2)} = e^{[A]t_1} e^{[A]t_2}.$$

$$(4) (e^{[A]t})^{-1} = e^{-[A]t}.$$

$$(5) \text{ 满足 } e^{[A]t} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) [A]^i \text{ 的 } n \text{ 个纯量函数 } a_0(t), a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n-1}(t) \text{ 是存在的。}$$

$$(6) \text{ 若 } [A][B] = [B][A], \text{ 则 } e^{([A]+[B])t} = e^{[A]t} e^{[B]t}.$$

$$\text{若 } [A][B] \neq [B][A], \text{ 则 } e^{([A]+[B])t} \neq e^{[A]t} e^{[B]t}.$$

1.3.2 强迫振动状态方程的解

在上节已知, 具有时不变参数的多自由度体系在荷载 $\{F(t)\}$ 作用下的振动状态方程为式(1.8)。在讨论这类方程的解法之前, 先回顾一下纯量微分方程

$$\dot{x} = ax + bF(t) \quad (1.20)$$

的解法。先将上式写成

$$\dot{x} - ax = bF(t)$$

两边同乘 e^{-at} , 得

$$e^{-at}(\dot{x} - ax) = e^{-at}bF(t)$$

对上式在 $0 \sim t$ 之间积分, 得

$$e^{-at}x = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bF(\tau)d\tau$$

所以

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bF(\tau)d\tau \quad (1.21)$$

对于矩阵微分方程式(1.8), 也可用类似方法求得其解为

$$\{X(t)\} = e^{[A]t}\{X(0)\} + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}[B]\{F(\tau)\}d\tau \quad (1.22)$$

一般将上式写成

$$\{X(t)\} = \Phi(t)\{X(0)\} + \int_0^t \Phi(t-\tau)[B]\{F(\tau)\}d\tau \quad (1.23)$$

上式右边第一项是初始状态的转移, 代表初始条件促使体系产生的反应, 亦即初始条件使体系产生的自由振动; 第二项则为荷载 $\{F(t)\}$ 产生的强迫振动。

1.4 时变振动体系状态方程的解

1.4.1 齐次时变状态方程的解

设状态方程为

$$\{\dot{X}\} = [A(t)]\{X\} \quad (1.24)$$

则可证明其解为

$$\{X(t)\} = \Phi(t, t_0)\{X(t_0)\} \quad (1.25)$$

式中 $\Phi(t, t_0)$ 是 n 阶非奇异方阵, 称为状态转移矩阵, 它满足

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = [A(t)]\Phi(t, t_0) \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (1.26)$$

式中 I 为 n 阶单位方阵。

证明如下: 令

$$\{Y(t)\} = \Phi(t, t_0)\{X(0)\} \quad (1.27)$$

当 $t=t_0$ 时

$$\{Y(t_0)\} = \Phi(t_0, t_0)\{X(0)\} = I\{X(0)\} = \{X(0)\} \quad (1.28)$$

即 $\{Y(t)\}$ 满足系统的初始条件。

对式(1.27)求导

$$\begin{aligned} \{\dot{Y}(t)\} &= \frac{d}{dt}(\Phi(t, t_0)\{X(t_0)\}) = \dot{\Phi}(t, t_0)\{X(0)\} \\ &= ([A(t)]\Phi(t, t_0))\{X(0)\} = [A(t)](\Phi(t, t_0)\{X(0)\}) = [A(t)]\{Y(t)\} \end{aligned}$$

所以 $\{Y(t)\} = \{X(t)\}$

即式(1.24)的解为式(1.25)。

式(1.25)的意义是系统反应由状态 $X(t_0)$ 转移到状态 $X(t)$, 故称 $\Phi(t, t_0)$ 为时变系统的状态转移矩阵。

状态转移矩阵具有以下性质:

$$(1) \quad \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad (1.29)$$

证: 由式(1.25)可以写出

$$\{X(t_1)\} = \Phi(t_1, t_0)\{X(t_0)\} \quad (1.30)$$

$$\{X(t_2)\} = \Phi(t_2, t_0)\{X(t_0)\} \quad (1.31)$$

$$\{X(t_2)\} = \Phi(t_2, t_1)\{X(t_1)\} \quad (1.32)$$

将式(1.30)代入式(1.32)得

$$\{X(t_2)\} = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)\{X(t_0)\} \quad (1.33)$$

比较式(1.33)与式(1.31), 即得式(1.29)。

$$(2) \quad \Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1) \quad (1.34)$$

证: 由式(1.29)可得

$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_2, t_1)\Phi(t_2, t_0)$$

令 $t_2 = t_0$, 则

$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_0)$$

由式(1.26), $\Phi(t_0, t_0) = I$, 则式(1.34)得证。

$$(3) \quad \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0) = I \quad (1.35)$$

证: 由式(1.25)可以写出

$$\begin{aligned} \{X(t_0)\} &= \Phi(t_0, t)\{X(t)\} \\ &= \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0)\{X(t_0)\} \end{aligned}$$

从上式即可得式(1.35)。事实上, 由第二条性质可直接推得第三条性质, 反之亦然。

1.4.2 非齐次时变状态方程的解

设状态方程为

$$\{\dot{X}\} = [A(t)]\{X\} + [B(t)]\{F(t)\} \quad (1.36)$$

令方程的解为

$$\{X(t)\} = \Phi(t, t_0)\{\xi(t)\} \quad (1.37)$$

则

$$\{\dot{X}(t)\} = \dot{\Phi}(t, t_0)\{\xi(t)\} + \Phi(t, t_0)\{\dot{\xi}(t)\}$$

将式(1.26)代入上式, 得

$$\{\dot{X}(t)\} = [A(t)]\Phi(t, t_0)\{\xi(t)\} + \Phi(t, t_0)\{\dot{\xi}(t)\}$$

由式(1.37)

$$\{\dot{X}(t)\} = [A(t)]\{X(t)\} + \Phi(t, t_0)\{\dot{\xi}(t)\} \quad (1.38)$$

比较式(1.38)与式(1.36), 可得

$$\Phi(t, t_0)\{\dot{\xi}(t)\} = [B(t)]\{F(t)\}$$

从而得

$$\{\dot{\xi}(t)\} = \Phi^{-1}(t, t_0)[B(t)]\{F(t)\}$$

故

$$\{\xi(t)\} = \{\xi(t_0)\} + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)[B(\tau)]\{F(\tau)\}d\tau \quad (1.39)$$

令式(1.37)中的 $t=t_0$, 则得

$$\{\xi(t_0)\} = \{X(t_0)\} \quad (1.40)$$

将式(1.39)、(1.40)代入式(1.37), 得式(1.36)的通解为

$$\{X(t)\} = \Phi(t, t_0)\{X(t_0)\} + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)[B(\tau)]\{F(\tau)\}d\tau$$

再由式(1.34)有

$$\{X(t)\} = \Phi(t, t_0)\{X(t_0)\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \tau)[B(\tau)]\{F(\tau)\}d\tau$$

所以

$$\{X(t)\} = \Phi(t, t_0)\{X(t_0)\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[B(\tau)]\{F(\tau)\}d\tau \quad (1.41)$$

上式右边第一项是初始状态的转移, 即初始条件引起的自由振动, 而第二项则为荷载 $\{F(t)\}$ 产生的结构振动反应。

第二章 随机变量与随机过程

2.1 随机变量

2.1.1 基本概念

当一种现象发生的条件和结果之间存在着一种必然的因果关系时,称为确定性现象;反之,则为不确定性现象。

不确定性现象又可分为随机性、模糊性和模糊随机性现象,例如:(1)投掷骰子出现点1;(2)A3 ϕ 16 钢筋的强度;(3)老年人;(4)地震烈度。

随机性现象是指在相同条件下对其观测时会产生不同的结果,即表现出因果关系的破裂;但在相同条件下的大量重复性观测中,会揭示各种结果出现的规律性,即统计规律性,例如上述例子中的(1)和(2)。

模糊性现象是指无明确内涵和外延的现象,它表现出所谓“非此即彼”的互补关系的破裂,例如上述例子中的(3)。

模糊随机性现象是既有模糊性又有随机性的现象,例如上述例子中的(4)。因为一个未来的地震发生的时间、空间、强度以及对地面、建筑物的破坏作用,受许多复杂的不确定性因素的影响,因而地震烈度具有强烈的随机性;另一方面,地震烈度的大小主要是由地震工程专家根据建筑物与地面的破坏程度来确定的,而“破坏程度”显然是一个模糊概念,因而地震烈度又具有强烈的模糊性。

除上述三类不确定性现象外,还有一种是由于信息不充分而不能完全确定的现象,称为未确知性。

我们在本章中只讨论随机性现象。首先给出几个重要术语的定义:

试验——随机现象的观测,它有三个要素:(1)在相同条件下可以重复进行;(2)一次试验的可能结果不止一个;(3)一次试验的结果是无法预先确知的,但有可能事先确定试验的所有可能的结果。

样本空间——试验的所有可能结果的集合,样本空间通常以 Ω 表示,其元素称为样本点。

事件——样本空间的一个元素或一个子集,即一次试验的一个可能的结果或一些可能结果的集合。出现一个可能结果的事件称为基本事件,例如投掷一个骰子,每次投掷的结果是1、2、3、4、5、6中的一个数,则出现其中任何一个数的事件为基本事件,而出现奇数或偶数的事件称为复合事件或可观察事件,它是基本事件的子集。当事件包含样本空间的所有元素时称为必然事件,而不包含样本空间的任何元素时称为不可能事件。介于必然事件与不可能事件之间的事件,即在一定条件下可能发生也可能不发生的事件称为随机事件或偶然事件,一般简称为事件。

概率——某一事件出现的可能性的测度。为了比较各个事件在试验中出现的可能性

的大小,用 $P(E)$ 表示事件 E 出现的可能性的,称 $P(E)$ 为事件 E 的概率。

有关概率的三个公理是:

- (1) 对于任一事件 E , 有 $P(E) \in [0, 1]$;
- (2) $P(\Omega) = 1$;
- (3) 对于两两不相容的事件 $E_j (j=1, 2, \dots, n)$ 有

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{j=1}^n P(E_j) \quad (2.1)$$

若两事件 A, B 是相容的, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (2.2)$$

有些事件的概率是可以直接计算的, 典型的例子是古典型试验, 它具有下列二个性质: (1) 试验的可能结果仅有限多个; (2) 所有基本事件都是等可能的。

例如, 投掷骰子就是一个古典型试验。它的样本空间由 6 个基本事件 (点 1 至 6 的数) 组成, 出现奇数 (1, 3, 5) 的事件由三个基本事件组成, 其概率为 0.5。推广至一般情况, 设某古典试验的样本空间为 n , 且出现其中任一基本事件的概率为 $\frac{1}{n}$ 时, 若事件 A 由其中 m 个基本事件组成, 则定义 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (2.3)$$

显然, $P(A) \in [0, 1]$ 。若 $P(A) = 1$, 则 A 为必然事件; 若 $P(A) = 0$, 则 A 为不可能事件。

对于一般工程问题, 很难将其理想化为古典型试验, 而不得不用事件出现的频率来代替其概率。

定义 在 N 次试验中, 事件 E 出现的次数为 N_E , 则事件 E 出现的频率为

$$f_N(E) = \frac{N_E}{N} \quad (2.4)$$

实践与理论已证明, 当增加试验次数时, 频率将通过随机波动而趋近于概率。

2.1.2 随机变量的概念

所谓随机变量, 是指在一定条件下的试验中, 每次都取一个不能预先确知的数值的变量。

这是随机变量的一个通俗的定义。从这个定义可以看出, 随机变量与随机事件是有紧密联系的, 是随机事件概念的发展。它的产生推动了概率理论的研究及应用, 使其研究的对象由随机事件扩大为随机变量。

随机变量可分为两种基本类型: 离散型和连续型。若随机变量的取值范围为有限个或可列的无限多个, 则称为离散型随机变量。若随机变量的取值范围为某一区间, 则称为连续型随机变量。实际上, 还有一种随机变量是上述两种基本类型的组合, 称为混合型随机变量。

有些问题可能需要多个随机变量来描述, 则称此多个随机变量为随机变量系或随机矢量。今后我们采用大写字母表示随机变量, 其可能取的值用相应的小写字母表示, 而黑体大写字母则表示随机矢量。

2.1.3 分布函数和密度函数

随机变量 X 的概率分布函数 $F_X(x)$ 定义为 X 的取值不超过 x 的概率:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.5)$$

当不会引起混淆时, 概率分布函数常简称分布函数, 并常略去其下标。

由上述定义可知

$$(1) F_X(-\infty) = 0;$$

$$(2) F_X(\infty) = 1;$$

(3) $F_X(x)$ 是单调不减函数, 且是右连续的。

对于离散型随机变量来说, 其分布函数是有限个或可列个跳跃的阶梯。如果 $F_X(x)$ 的导数

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) \quad (2.6)$$

存在, 则称 $f_X(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 或简称密度函数。

显然, 概率密度函数的主要性质有:

$$(1) f_X(x) \geq 0$$

$$(2) \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

离散型和混合型随机变量的密度函数是不存在的, 但可以用 Dirac- δ 函数来构造。设随机变量 X 以概率 P_j 取离散值 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$, 则其密度函数定义为

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^n P_j \delta(x - x_j) \quad (2.7)$$

对上式积分可得 X 的分布函数。

分布函数和密度函数的定义可以推广到随机矢量的情况。先讨论二维随机矢量 $X = \{X_1, X_2\}$ 的分布函数, 它定义为

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = P\{(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2)\} \quad (2.8)$$

上式表明, X_1 和 X_2 的分布函数是两个事件 $X_1 \leq x_1$ 和 $X_2 \leq x_2$ 同时实现的概率, 故称 $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ 为 X_1 和 X_2 的联合分布函数。它显然是非负、非减, 对于每个实变量 x_1, x_2 是右连续的, 且有

$$F_{X_1 X_2}(-\infty, -\infty) = F_{X_1 X_2}(-\infty, x_2) = F_{X_1 X_2}(x_1, -\infty) = 0 \quad (2.9)$$

$$F_{X_1 X_2}(\infty, \infty) = 1 \quad (2.10)$$

$$F_{X_1 X_2}(x_1, \infty) = F_{X_1}(x_1) \quad (2.11)$$

$$F_{X_1 X_2}(\infty, x_2) = F_{X_2}(x_2) \quad (2.12)$$

$F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)$ 分别为 x_1, x_2 的分布函数, 通常称为边缘分布函数。

如果 $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ 的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \quad (2.13)$$

存在,则称 $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ 为 X_1 和 X_2 的联合概率密度函数,或简称联合密度函数、联合分布密度。

利用 $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ 可表示

$$F_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.14)$$

$$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1X_2}(x_1, \infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 \quad (2.15)$$

$$F_{X_2}(x_2) = F_{X_1X_2}(\infty, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 \quad (2.16)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.17)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 \quad (2.18)$$

将上述讨论推广到任意的有限多维的情况,有

$$F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{(X_1 \leq x_1) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n)\} \quad (2.19)$$

$$f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \quad (2.20)$$

n 维随机矢量的联合分布函数与联合分布密度常写成更简洁的形式: $F_X(X)$, $f_X(X)$ 。

2.1.4 条件分布

先讨论条件概率。设 A, B 为二个事件,且 $P(B) \neq 0$, 则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2.21)$$

称为在 B 给定的情况下 A 的条件概率。对于二维随机矢量 $X = \{X_1, X_2\}$ 来说,在 X_2 给定的情况下 X_1 的条件分布函数定义为

$$F_{X_1X_2}(x_1|x_2) = P\{X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2\} \quad (2.22)$$

与式(2.21)类似, $F_{X_1X_2}(x_1|x_2)$ 可表示为

$$F_{X_1X_2}(x_1|x_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1X_2}(u, x_2) du}{f_{X_2}(x_2)} \quad (2.23)$$

在 X_2 给定的情况下 X_1 的条件分布密度定义为

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{dF_{X_1X_2}(x_1|x_2)}{dx_1} = \frac{f_{X_1X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \quad (2.24)$$

由上式可得

$$f_{X_1X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1X_2}(x_1, x_2) f_{X_2}(x_2) \quad (2.25)$$

若

$$f_{X_1X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1}(x_1) \quad (2.26)$$

则称 X_1 关于 X_2 是独立的;而 X_2 关于 X_1 是独立的条件为

$$f_{X_1X_2}(x_2|x_1) = f_{X_2}(x_2) \quad (2.27)$$

对于两个独立的随机变量,有