脆性断裂力学

〔苏〕Г. П. 切列帕诺夫 著

科学出版社

脆性断裂力学

〔苏〕Г. П. 切列帕诺夫 著
黄克智 等 译

科学出版社
1990

内 容 简 介

本书是一部断裂力学的名著. 作者 Г. П. 切列帕诺夫是苏联著名的力学家,弹塑性断裂力学的 J 积分理论的创始人之一. 本书 1974 年在苏联出版后获得很高的评价, 1979 年被译成英文. 本书取材广泛、内容丰富、分析透彻, 囊括了脆性断裂力学发展至今的几乎所有研究成果, 包括作者许多第一次发表的最新成果. 本书侧重研究断裂的物理机制, 注重断裂的宏观与微观分析的结合、物理化学规律与严格的数学分析的结合,同时介绍了断裂力学在一些最新领域中的实际应用.

本书可供力学系大学生和研究生、力学工作者、工程技术人员参考和阅读.

Г. П. Черепанов
МЕХАНИКА ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ
«Наука», 1974

脆 性 断 裂 力 学

〔苏〕Г. П. 切列帕诺夫 著
黄克智 等 译

责任编辑 杨 岭
科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1990 年 12 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
1990 年 12 月第一次印刷 印张: 44 1/2
印数: 0001—1.200 字数: 1 035 000
ISBN 7-03-001211-9/O · 269
定 价: 43.40 元

中 文 版 前 言

苏联学者 Г. П. 切列帕诺夫所著"脆性断裂力学"一书是一部断裂力学的优秀著作.该书俄文版1974年在苏联出版后数日之内即销售一空[1]. 该书的大部分内容是著者本人的研究成果,内容广泛、深入而又丰富. 在我们将它译成中文的过程中,在国内见到1979年出版的该书英文版. 原著者在英文版中补充了许多新材料,增加了新的章节. 本书参考俄、英两种版本译成[2].

本书第一章由黄克智译、徐秉业校,第二章由潘金生译、孙学伟校,第三章由徐秉业译、余寿文校,第四章由余寿文译、徐秉业校,第五章由黄克智译、余寿文校,第六章由孙学伟译、黄克智校,第七章由潘金生译、孙学伟校,第八章由徐秉业译、潘金生校,第九章由潘金生与徐秉业合译互校,第十章由余寿文译、黄克智校,附录 A, B, C 由华达浩译、孙学伟校. 全书译文最后经黄克智校阅.限于译校者水平,难免有错误或不妥之处,欢迎读者批评指正.

译者　黄克智等

1984年12月28日

1) 见国际断裂杂志 (Int. Journ. of Fracture, Vol. 12, No. 5, 1976, 785—787) 对该书的评论.
2) 英文版请见 Roland de Wit 和 William C. Cooley 翻译的.
"Mechanics of Brittle Fracture" (McGraw-Hill, New York, 1979).——编辑注.

英 文 版 序 言

本书俄文第一版写于1968至1970年，于1974年出版．自那时以后，情况有了许多发展．因此，我曾仔细地重新阅读俄文版本，为的是在英文版中消除任何可能有的过时的内容或印刷上的错误．可幸的是，它们为数甚少．

蒙 McGraw-Hill 图书公司同意，我在这一新版中增补了许多问题，这些问题在七十年代中引起了理论工作者的注意．它们是：复合材料的断裂力学，不稳定裂纹动力学，应力腐蚀开裂，在爆炸或卸载应力波影响下脆性物体的动力断裂理论，裂纹与滑移线理论，以及不变Γ积分．不变Γ积分之所以重要，不仅是因为它们为建立统一的断裂结构理论所必需，而且因为如新近所获悉，它们可以用于解决古典物理学中关于相互作用的大多数问题．此外，利用它们可以建立一个桥梁来沟通脆性断裂力学和数学物理的一些领域(例如重力理论，电动力学，流体动力学与位错理论)． 在这些学科中断裂力学有着它应有的地位(例如，见第五章的5.9与5.10节)．

我的著作有时受到批评，认为对其他作者的观点和著作太不注意．不幸得很，在这一版中我仍然未能克服这一缺点，因为它主要代表我自己的工作． 近年来我研究过断裂力学的许多有趣问题(优化设计，光学断裂，地震与岩石爆裂的地震波等)，这些问题都只好省略[1]，否则这本书的篇幅将显著加大．但是在本书中所阐明的原理将有助于加深理解这些领域中的内容．

Г. П. 切列帕诺夫
莫斯科，苏联
1977年8月14日

1) 在 Г. П. Черепанов 与 Л. В. Ершов 的“Механика Разрушения”(«Машиностроение», Москва, 1977) 一书中对其中一些问题作了概述．

英文版编者序

在编辑此译本时我们对正文加了脚注，并对文献目录中英文版本的参考文献作了补充的注释．我们也改正了一些小的印刷错误而未特别注明．

本书是根据 Г. П. 切列帕诺夫所著 “Механика хрупкого разрушения” 《Наука》(Москва) 1974 年版翻译而成．

1977 年 7 月切列帕诺夫教授特地为英译本提供了补充的新材料，这些材料是第一次在这里发表的．这些新材料作为原书的补充，编排在各新的章节中，它们是: 3.12，4.11，5.9 与 5.10，7.10 与 7.11，8.9 至 8.12 各节，第九章全部与第十章全部．

因此，这本书可以真正地看作是脆性断裂力学现代知识的总结，特别侧重于苏联在这方面的工作．我们确信读者将和我们一样赞赏该书的广泛性和透彻性．

在编辑此译本时，我们尽可能地做到忠实于原文，以保持原作的风格．为此我们引入了断裂力学中某些俄文术语的英译名．例如，在全书中对三种断裂形式的重要术语是:

法向拉伸，即 I 型或张开型，

横向剪切，即 II 型或滑开型，

纵向剪切，即 III 型或撕开型．

这些术语的详细定义见 41 页．因此本书将向读者介绍一些断裂力学中的苏联习惯用语．

Roland de Wit

William C. Cooley

华盛顿城

1977 年 10 月

序　　言

结构的突然断裂通常都是脆性断裂，是由裂纹逐渐或迅速扩展所致．脆性断裂力学就是研究在脆性或准脆性材料[1]中的裂纹扩展问题．

几年前出现的"断裂力学"一词具有双重含义．按狭义的理解，是指裂纹扩展的研究；二十多年来无论在苏联，或在国外，都进行了大量的研究．按广义的理解，断裂力学包括材料力学学科中研究变形过程最后阶段的那一部分．因此，结构强度问题是断裂力学的一个重要组成部分．

虽然自古以来人们就一直在建造各式各样的，有时还是非常复杂的结构物，但关于材料强度与断裂的知识，过去是凭经验并在很大程度上是偶然地取得的，并作为某种技艺代代相传．最早对强度与断裂问题采取科学态度的有象 da Vinci 和 Galileo 这样的大师．da Vinci 最早进行测定承载能力的试验（铁丝试验）．他发现了现在称之为尺度效应的现象．但是，da Vinci 的成就没有为后代所知晓，因而对断裂力学的发展没有起什么作用．可以认为 Galileo 是断裂力学的奠基人，他曾确立这样的事实：拉杆的断裂载荷与其横截面积成正比，而与其长度无关．这一结论，经过修正推广到非均匀应力状态，迄今为止一直是实际工程强度计算的基础．

断裂力学的进一步发展是与 C. Coulomb, A. St. Venant, O. Mohr 和 A. A. Griffith 的名字分不开的．Coulomb, St. Venant 和 Mohr 创始了极限平衡理论，而 Griffith 创始了脆性断裂理论．这两个理论，后来经过许多研究者的改进而更趋完善，成为现代断裂力学的基础．

近年来，无论在强度与断裂问题的理论见解方面，还是在理论结果的工程应用方面，都取得了很大的进展．

本书讲述脆性断裂力学的基本思想与方法，以及它们的某些推广．第一章是引论性质的，第二章与第三章讲述脆性断裂理论的物理与数学原理．主要注意力放在下列最基本的问题上，即关于裂纹前缘边界条件的提法与关于固体断裂问题在物理上为正确的数学问题的提法（第四至八章）．在附录A中，介绍了裂纹体应力强度因子计算的最重要结果，以供参考．本书的对象不仅是科学工作者与大学生，也包括工程师；因此在附录B与C中列举了有关基本结构材料的一些试验数据．

上述问题的部分讲述可参看 Л. И. Седов 的著名教程《连续介质力学》第二卷与 В. В. Панасюк 著《带裂纹脆性物体的极限平衡》等书．两个国际性的断裂力学杂志中经常发表很有趣的材料．不久前在美国出版了带有百科全书性质的七卷著作《断裂》，包括断裂力学各个方面的许多问题．但是，由于此书篇幅很大，缺乏统一的观点，再加上对于裂纹扩展的某些最原则性的问题阐述不够，因而对读者掌握断裂力学的方法并无帮助．

1）如果材料一直到断裂前都保持线弹性，则称材料为脆性的．如果在裂纹周线附近材料偏离线弹性区域的特征线性尺寸远小于裂纹长度（或物体的其他特征尺寸），则称材料为准脆性的．在上述情况下，我们相应地称脆性或准脆性断裂，脆性或准脆性裂纹．

本书所包含的基本上是著者所得到的结果．断裂问题的文献非常多，致使著者对于许多非常有趣而重要的著述因力不从心而不能给予充分的注意．因此在本书的文献目录中只收集了最必要的一些文献．

著者对在本书准备过程中给予帮助的下列诸君表示衷心的谢意：В. Д. Кулиев, Х. Халманов, А. Б. Каплун, В. М. Мирсалимов, В. М. Смольский, Г. Г. Кузьмин.

著　者

1971 年 9 月 30 日

目　　录

第一章 引　论

§ 1.1　流变模型的分类

在自然界与人类实践中遇见形形色色的材料，它们的断裂过程具有不同的性质．首先是金属及其合金，它们在工程结构中具有重要的意义．其次还有聚合物，生物组织与骨骼，岩石与土壤，松散物质，玻璃与陶瓷，多孔材料，复合材料，冰等等．外界条件，载荷型式，结构形状，温度等也是多种多样的．在一定条件下研究个别材料或某类材料的断裂已成为不同学科和不同科学领域的研究课题．

力学的特点是力求在严格表述的并足够一般的数学模型的范围内来描述断裂现象的基本特性．因为目前建立某种一般的断裂理论还为时过早，所以更好的办法是发展特殊的理论，它们或多或少能很好描述某类材料在一定条件下的行为．因此就有必要对固体行为的基本类型及许多相应的理论进行足够全面而广泛的分类．

首先对流变模型[1]进行分类．

我们来考虑一体积元 $dxdydz$，沿其表面受有应力 σ_{ij} 的作用；把体积元当作某种“黑盒”，以应力 σ_{ij} 为其输入，而应变 ε_{ij} 为其输出．我们将假定：如果描述这系统的参数中包括温度 T 的话，则系统是封闭的．按这一唯象的假设，应变 ε_{ij} 应完全取决于 σ_{ij}，T 值以及它们的历程．同时，输出量的无限小增量可以通过相应的增量 $d\sigma_{mn}$，dt 与 dT 表示成以下的形式：

$$d\varepsilon_{ij} = A_{ijmn}d\sigma_{mn} + B_{ij}dt + C_{ij}dT \tag{1.1}$$

其中 t 是时间，A_{ijmn}，B_{ij}，C_{ij} 是物体所在域中的参数 $\varepsilon_{ij}(x, y, z, t)$，$\sigma_{ij}(x, y, z, t)$，$T(x, y, z, t)$ 的某些泛函．

下面引进“短程”假设．按这一假设，对于任一体积元，决定方程 (1.1) 的参数与任何其他的(甚至无论多么邻近的)体积元的状态无关．此外，还假定在方程(1.1)中不出现体积力(例如，惯性力与引力)．这一假设是基于以下的物理事实：基本粒子的相互作用力随着它们之间距离的增大而非常迅速地减小，因而在数量级为Δ(Δ是体积元的特征线性尺寸)的距离处，相互作用力可以忽略．满足这一假设的系统称为短程系统．力学中现有的流变模型几乎全属于短程系统[2]．

如果结合力为长程力(例如在某些物理系统中的库伦力)，那么在此情况下由于Δ具有任意性，通常可以选择Δ足够大使短程假设得以成立．因此，只有当基于某种物理学的考虑使尺寸Δ不能取得足够大时，才有必要在基本方程(1.1)中计及物体各部分体积的相互影响；例如当物体的特征尺寸同结合力的“衰减”半径(在均质材料中)或同颗粒尺寸(在非均质材料中)属于同一数量级时就出现这种情况．

1) 从热力学角度分类的原理及对连续介质基本模型的描述可参阅 Л. И. Седов 的教程[4]．

2) 我们指出，“短程”假设在实质上同下列假设是等效的：具有给定参数系统的体积元可以认为是封闭系统．

在短程系统情况下，基本方程(1.1)中变量 t, x, y, z 的泛函 A_{ijmn}, B_{ij}, C_{ij} 退缩为只是变量 t 的泛函，而 ε_{ij}, σ_{ij}, T 及它们对 x, y, z 的任意有限阶导数乃是泛函所依赖的参数.

短程系统的流变模型可以分成梯度型与非梯度型两种．非梯度型的基本方程中不出现 ε_{ij}, σ_{ij}, T 对 x, y, z 的导数．在力学中所研究的模型大多数属于非梯度型，但在弹性力学中也曾提出过许多梯度型的模型．我们指出，在微观非均质弹性体的物理理论中，当导数值足够大时，有必要考虑梯度项[2].

如果泛函 A_{ijmn}, B_{ij}, C_{ij} 相对于时间的变化并非不变量[1)]，则此种系统称为"老化"系统；此种系统的流变性质是随着时间的进程而变化的．对于短程系统，我们将只讨论相对于时间变化为不变量的非梯度型模型.

此种系统的进一步的分类自然是按照它们对于外界扰动的反应特性来进行的．在我们的系统(体积元)中，反应就是变形 ε_{ij}，而外界扰动则是在体积元表面上的载荷 σ_{ij} 与温度 T．在这里，关于体积元的有限变形 ε_{ij} 一般在何种意义下来理解，这并不是一个带原则性的问题．我们假定，从某一时刻 $t=0$ 开始，外界扰动 σ_{ij} 与 T 的历程完全是已知的；在起始时刻 $t=0$ 时，ε_{ij}, σ_{ij} 与 T 的分布也是已知的．体积元由同一些物质质点组成 (x, y, z 是 Lagrange 坐标)．要求确定系统的反应 ε_{ij} 随时间的变化.

系统对外界扰动的反应可以是瞬时的与具有后效的（相应的系统称为具有瞬时反应的系统与具有后效的系统)．对于具有瞬时反应的系统 $B_{ij}=0$，而泛函 A_{ijmn} 与 C_{ij} 不依赖于时间(也不依赖于定解参数对 t 的任何阶导数)．此种系统对外界扰动在瞬息之间作出反应，然后 σ_{ij} 与 T 不变化的话，一般说来反应保持不变．对于任意的系统，很自然地可以设想把全反应(应变的全增量)表示成为瞬时反应与后效之和．所谓后效是指在总反应中随时间进程而出现的那一部分.

假定外界扰动随着时间的流逝而消失．此时系统的反应也有可能消失．其反应随着外界扰动的消失而消失(可能要经过无限长的时间)的系统，称为具有可逆反应的系统.因此，任一系统在某一有限时刻对已消失的外界扰动的全反应可以表示为可逆反应与不可逆反应两部分之和，不可逆反应的部分即便经过无限长的时间仍然存在．每一部分又由瞬时反应与后效所组成．残余变形表示系统对已消失的外界扰动的"记忆"特性.

基本的流变模型按其反应型式可以分类如下：

热弹性体属于具有瞬时可逆反应的系统．全反应是瞬时的与可逆的，这说明 ε_{ij} 是 σ_{ij} 与 T 的某些单值函数．因此，在此情况下基本方程(1.1)中的系数 A_{ijmn}, C_{ij} ($B_{ij}=0$) 是 σ_{ij} 与 T 的某些普通函数，而且它们还满足全微分存在的条件．利用热力学的方法，也可以得到同一结论．当系统具有物理的或几何的对称性(例如各向同性)时，且在小变形、线性关系和等温过程的条件下，基本方程(1.1)还可进一步简化.

弹塑性体属于具有瞬时反应的系统 ($B_{ij}=0$)．引进存在加载曲面的假设，并采用 D. C. Drucker 的准热力学假设，就可简单地得到相关流动律，它是现代弹塑性力学的基础．Drucker 假设也可以用以下的两个假设来代替：(1) 全部的不可逆功都转变成热，(2) 熵的增加率为最大；也可以采用某些其他假设．根据相关律，试验的目的除了确定热

1) 即假定起始时刻 $t=0$ 是固定不变的.

弹性常数以外，就是确定加载曲面及其在不可逆变形过程中的变化．利用补充的物理原理，可以由为数较少的试验求出泛函 A_{ijmn} 与 C_{ij} 的具体形式．如果在任意的变形过程中加载曲面都不变化，则称物体为理想弹塑性体，此时加载曲面又称为屈服曲面或屈服条件．最为人们所熟悉的是适用于金属及其合金，以及土壤的几种流动理论的模型．

在简单加载情况下，即在物体的每一点状态参数正比于加载参数而增长，此时方程(1.1)（当 $B_{ij}=0$）可以积分．当体积元沿（σ_{ij}，T）空间任一固定的路径加载时，方程(1.1)同样也可以积分．这就是塑性全量理论研究弹塑性介质的方法．

极限状态理论(理想刚塑性体，松散体，不能承受拉应力的物体等等)可以看成是相应的理想弹塑性介质理论当其方程中省去弹性变形项的极限情况．

粘性体属于具有后效(瞬时反应为零)且具有完全不可逆反应的系统；此时式(1.1)中 $A_{ijmn}=C_{ij}=0$，在此情况下很自然地认为 B_{ij} 是 σ_{ij}，ε_{ij} 与 T 的普通函数．在 B_{ij} 为 σ_{ij} 的线性函数这一最简单的情况下，就得到经典的粘性流体模型．

如果同时还考虑按弹塑性介质理论确定的瞬时变形，并假定 B_{ij} 为 σ_{ij}，$\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{p}$ 与 T 的某些函数（ε_{ij}^{p} 是不可逆瞬时变形），则由式(1.1)可得到最通用的金属蠕变理论的模型．蠕变速度势存在的假设是这一理论的基础．

具有后效且具有完全可逆反应的**蠕续体**可用来描述许多聚合物材料的行为．利用广义的 Volterra 理论可以对此种系统给出普遍的描述：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}=f_0(\sigma_{ij},T)&+\int_0^t K_{ijmn}[T,t-t',\sigma_{mn}(t')]\,dt' \\
&+\int_0^t\int_0^{t'} K_{ijklmn}[T,t-t',t-t'',\sigma_{kl}(t'),\sigma_{mn}(t'')]\,dt'dt''+\cdots
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

式中

$$
\begin{gathered}
K_{ijmn}[T,\ t-t',\ \sigma_{mn}(t')]=0 \quad \text{当}\ t'>t_0 \\
K_{ijklmn}[T,t-t',\ t-t'',\sigma_{kl}(t'),\sigma_{mn}(t'')]=0 \quad \text{当}\ t'>t_0',\ t''>t_0'' \\
K_{ijmn}(T,\ t,\ \sigma_{mn})\to 0 \qquad \text{当}\ t\to\infty \\
K_{ijklmn}(T,\ t,\ t',\ \sigma_{kl},\ \sigma_{mn})\to 0 \quad \text{当}\ t\to\infty,\ t'\to\infty \\
\cdots
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

这里 K_{ijmn}，K_{ijklmn}，$\cdots$是自变量 T，σ_{mn}、σ_{kl}，$\cdots$的连续单值函数，且一般说来为 t 的广义函数．

如果弃去条件(1.3)，则将出现残余变形，而方程(1.2)就可用于描述不可逆反应(蠕变)．

最通行的方案是式(1.2)所描述的线性粘弹性体或 Boltzmann 蠕续体．

粘塑性体属于非线性粘性介质的变种．假定在空间（σ_{ij}，T）中存在这样的一个曲面，在此曲面之一侧对外界扰动没有反应，而在其另一侧介质的反应如粘性体．此种型式最简单的模型可以用来描述稠油、高温下的金属等的行为．

只要在系统中没有任何隐参数(例如描述化学反应、相变、电磁效应等的参数)，那么系统的行为就可以用上述流变模型的基本型式(弹塑性体，粘性体与蠕续体)或它们的某种组合来描述．在具体的研究工作中，更重要的不是知晓一般理论，而是善于选择最简单的模型，它能解释和描述在试验中所观察到的流变现象．

在解决断裂与强度问题时，最首要的是正确选择流变模型，如果对物体的变形性质事先缺乏研究，解决断裂力学问题是不可能的.

§1.2 强度理论

在强度计算中通常假定：一旦在物体中某一点参数 σ_{ij}，ε_{ij}，T 与 t 的某一组合达到临界值时，就出现物体的断裂. 这里没有涉及断裂本身的过程. 显然，按照这种处理方法，解决强度问题只要选择某种流变模型与断裂准则（后者在材料力学中通常称为强度理论）.

这种处理方法是在所述参数范围内，采用唯象研究直接推理的结果. 在物理上它的合理性可以这样来解释：材料缺陷的扩展导致承载能力的丧失，这往往发生在接近临界的很窄的区域，因而断裂过程本身的细节成为次要的. 此时由试验确定的断裂准则反映了从晶胞尺度到分子尺度并导致宏观缺陷的这一断裂微观物理过程. 此外，宏观缺陷（其唯象的理解是位移的某种间断）的行为与间断的性质有关. 例如，形成位错与滑移线，即便在穿过物体以后，照例也不会导致物体的断裂.

通常取最大主应力，最大主相对伸长，最大主剪应力或八面体剪应力，歪形比能，全变形比能等作为准则量[1]. 各个准则适用于在某一定条件下不同类别的材料. 正确运用这些准则，这在很大程度上取决于研究者的实际经验. 在强度方面大部分的试验研究都是为了积累这样的经验.

在不同的时期人们曾给这些准则以不同的评价，有时把某一准则绝对化. 例如 G. Lamé 与 W. T. M. Rankine 采用最大主应力作为强度准则，而 J. B. Poncelet 与 St. Venant 则采用最大变形准则.

下面举出应用最大相对伸长准则的两个最明显的例子.

1. 拉杆在恒应力 σ 作用下，一般说来，出现不可逆的蠕变变形（对于高温下的金属及聚合物，蠕变变形是最为重要的）. 此时，在断裂前的大部分时间 τ 中，杆件以恒定的变形速度 $\dot{\varepsilon}_c$“蠕变”（定常蠕变）. 因此我们有

$$\tau\dot{\varepsilon}_c = \varepsilon_0 \tag{1.4}$$

式中 ε_0 是最大相对伸长. 如果认为 ε_0 是材料常数并假定定常蠕变速度随载荷 σ 变化的经验关系是

$$\dot{\varepsilon}_c = C_1 e^{\lambda\sigma} \quad 或 \quad \dot{\varepsilon}_c = C_2\sigma^n \tag{1.5}$$

（C_1，C_2，λ，n 为材料常数），则由式(1.4)可以求得破坏时间（寿命）随所施应力变化的关系.

对于许多材料，可以实际观测到所得到的寿命关系式，这些材料包括许多类别的聚合物和金属，甚至那些在破坏前几乎没有不可逆变形而发生脆性断裂的材料.（对于后者说来，前述的推导已失去意义）.

2. 设在金属杆上作用随时间作周期性变化的应力 $\sigma = \sigma(t)$（交变载荷）. 以 $\sigma_{\max}$ 表示在每一周期中的最大拉伸应力值，而 $-\sigma_{\max}$ 为最小应力值.

---

1) 常用的还有具有结合力的干摩擦条件（库伦）与广义的 Mohr 强度理论.

因为金属的结构实质上是非均质的，所以即便在比较小的应力作用下，在局部应力集中处会出现对应于一定结构变化的局部塑性区．这将导致每经过一个周期不可逆塑性变形增加 $\Delta\varepsilon_p$，它的数值通常是很小的．假定 $\Delta\varepsilon_p$ 的值与先行的周数无关，那么可求得在断裂前 n 周内，杆的不可逆变形 ε_0:

$$n\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_0 \tag{1.6}$$

如果现在假设 ε_0 为材料常数，并假定同上述的不可逆蠕变变形的累加相类似，有以下公式

$$\Delta\varepsilon_p = C_3 e^{\lambda\sigma_{max}} \tag{1.7}$$

（C_3，λ 为材料常数），则由式(1.6) 可以求得破坏前的周数随每周内最大应力变化的关系（Wohler 曲线）．当 σ_{max} 值大于疲劳极限时，对于金属可以实际观察到上述关系．当载荷更小时，由于微观安定效应，塑性变形累加的假设看来不能成立．

由于金属中不可逆变形属于剪切性质，如果我们取应力偏量的第二不变量（八面体应力）作为准则量，则不难将上述例子推广于任意的三维情况．

§1.3 韧性破坏

在上述处理方法的范围内研究破坏准则（强度理论），在强度计算中至今仍具有重要的意义．但是由于种种原因，只在这个范围内进行研究是不够的．

首先，在外界条件与系统参数很宽的变化范围内，许多材料在破坏前可以承受很大的塑性变形．对这种材料更正确的做法是假设物体到达这样一个状态时产生破坏，即物体的最危险截面逐渐转入塑性状态，此时在此截面的某一邻域满足塑性条件，亦即参数 σ_{ij} 与 T 的某一组合达到临界值．这种类型的破坏我们称为韧性破坏．

必须指出，在单参数问题（拉伸、纯弯曲或纯扭转等）中选择破坏准则或者塑性条件没有什么重要意义，因为在任一情况下，破坏的时刻将取决于参数的某一临界值，此值可用试验确定．例如，在杆件拉伸时，只要知道由 σ-ε 图确定的 σ_b 值就够了（图 1.1a）．

在韧性破坏情况下，物体所能承受的极限载荷问题是在相应的理想弹塑性介质模型的范围内来求解的．此时破坏准则已无必要，临界载荷由某边值问题解的存在条件来求得．

在理想弹塑性介质变形的单参数问题中，p-v（广义载荷-广义位移）图的形状如图 1.1b．在等截面杆的拉伸情况下，图中无曲线段．

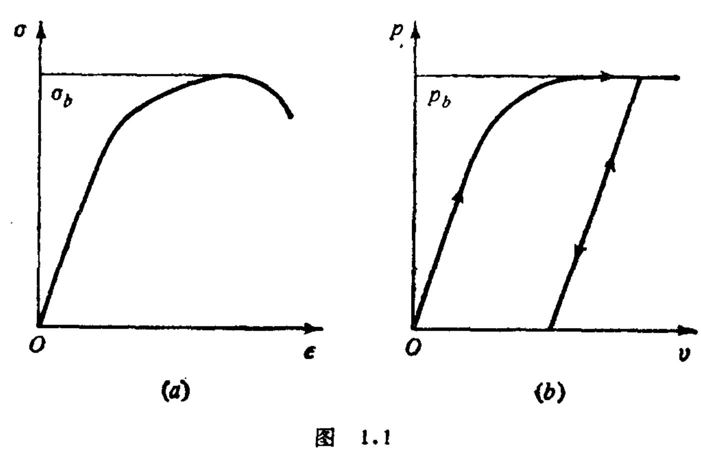

图 1.1

如果在理想弹塑性模型的方程中略去弹性变形项，那么就得到相应的极限状态理论的方程．应用极限状态理论可以使破坏载荷的上界与下界的求解大为简化，而在许多情况下可得到相等的上界与下界，亦即在韧性破坏情况下，求出极限载荷的精确值而无需求