高等学校教材

Discrete Mathematics

离散数学

陈莉　刘晓霞　编著

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

离 散 数 学

陈 莉 刘晓霞 编著

高等教育出版社

内容提要

本书较全面地介绍了计算机科学与技术及相关专业所必需的数学知识。全书共分为数理逻辑、集合论、近世代数和图论4篇。第一篇包括命题逻辑、谓词逻辑和非经典逻辑；第二篇包括集合、关系、函数、模糊集和粗糙集；第三篇包括代数系统的概念、半群、群、环、域、格和布尔代数；第四篇包括图的基本概念、欧拉图、哈密顿图、树、二分图、平面图和 Petri 网。各篇相对独立而又有机联系，证明力求严格完整。书中的例题、习题具有一定的典型性，内容深入浅出，便于自学。各章配有复习提要及理论联系实际的上机练习题，便于读者总结和提高。本书同时配有多媒体课件。

本书可作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可作为考研及相关专业技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/陈莉　刘晓霞编著. —北京：高等教育出版社，2002.8

ISBN 7-04-011096-2

Ⅰ.离…　Ⅱ.①陈…②刘…　Ⅲ.离散数学-高等学校-教材　Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 030776 号

离散数学

陈莉　刘晓霞　编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	人民教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002年8月第1版
印　　张	25.5	印　　次	2002年8月第1次印刷
字　　数	470 000	定　　价	28.00元(含光盘)

前　言

离散数学是计算机科学与技术及相关专业的一门核心、骨干课程，是计算机科学与技术的基础理论之一。

离散数学课程设置的主要目的是培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，并为后继课程，如数据结构、编译原理、数据库、形式语言与自动机、人工智能和操作系统等提供必要的数学基础。

本教材及其多媒体课件是编著者在十多年教学实践的基础上，在学校面向21世纪教学改革基金及省教育厅专项基金的资助下，参考了国内外多种教材，结合自己的教学、科研成果编写而成的。本书在力求体系完整、通俗易懂的前提下，简明扼要地介绍相关内容，并结合教学改革实践，补充了每一章的实习题，以加强学生理论联系实际、提出问题、解决问题的能力。作为专业基础理论课，力求通过该门课的教学，使学生把握学科的粗框架。

本教材的特点是：

(1) 本书内容共分4篇，源于数学的不同分支。每篇开始都有数百字的简介，并对与计算机科学及技术的联系加以阐述，有助于培养学生的科学素养，也有助于学生把握本部分内容的应用领域。

(2) 内容通俗易懂。编著者根据多年的教学实践，着重强调抽象、难懂、容易模糊的概念，并配以大量的例题，有助于基本概念的理解和掌握。

(3) 计算机科学与技术的发展日新月异，摩尔定律充分说明了学科发展的规律。为了给学生留有接受新知识的“窗口”和“接口”，与以往大多数同类教材相比，本教材在数理逻辑一篇增加了“非经典逻辑”，在集合论一篇增加了“粗糙集简介”，在图论一篇增加了“Petri 网简介”等内容。

(4) 在每章末尾均有“本章小结”，其中包括两部分内容，即主要知识点和解题技巧。解题技巧部分分析了每一章的习题类型，并总结了针对各种问题(相关知识点)的尽可能多的解题方法和技巧，这也是其他同类教材所没有的。这些内容有助于培养学生科学的学习方法，严谨的、科学的思维与归纳、推理的能力；也有助于学生自学能力的培养和提高，进而产生对学科发展的一种“自适应”性。

(5) 针对部分篇章的内容，编著者总结了相应的知识结构(表)，收于附录中，便于使用者对比和总结有关概念，这也是其他同类教材所没有的。

(6) 在加强理论教学的同时，力求对学生进行技能的培养与提高，在每一

篇均增加了与所学内容相关的上机实习题。实践证明,这是辅助学生掌握相关内容的好方法,也是本教材的独特之处。

(7) 书中收录了许多学者的研究成果，如二元关系传递闭包可有限表示的条件，判断有限代数系统是否满足结合律和左、右分配律的较好的方法等。

(8) 为便于读者参阅英文原版教材，书中附录给出了离散数学名词中英文对照表。

本书共分4篇，即数理逻辑、集合论、近世代数与图论。陈莉主编了全书，刘晓霞担任副主编。其中第一、二、四、五、六章由刘晓霞编写；第三、七、八、九、十、十一、十二、十三、十四、十五章及附录一各章由陈莉编写；各篇中的插图及部分文字、公式的录入均为刘小宁所做。

本书不仅可作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可作为考研及计算机工作者的参考书。

本教材还配有多媒体教学软件，并可直接进行联机大屏幕显示，有助于提高教学过程的信息含量。

由于编著者的水平有限，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

感谢支持本教材成书的各级领导及同事们。

编 者

2001年8月

目　录

第1篇　数理逻辑

第2篇 集 合 论

第3篇 近世代数

第4篇 图 论

第1篇 数理逻辑

研究人的思维形式和规律的科学，称为逻辑学。根据所研究的对象和方法的不同，逻辑学可分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。

数理逻辑是用数学方法研究推理规律的科学。所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法。因此，数理逻辑又称符号逻辑。

用数学方法研究推理规律的思想，首先是由莱布尼兹(G.W.Leibniz,1646～1716,德国)提出的。因此，莱布尼兹被认为是数理逻辑的创始人。后来，布尔(George Boole,1815～1864,英国)和德·摩根(De Morgan,1806～1876,英国)等人得到了最初一些结果。从 19 世纪 70 年代到 20 世纪初，弗雷格(G.Frege,1848～1925,德国)、皮亚诺(G.Peano,1883～1932,意大利)和罗素(B.Russell,1870～1970,英国)建立了命题演算和谓词演算，突破了古典形式逻辑的局限性，形成了一个完整的逻辑体系。希尔伯特(D.Hilbert,1862～1943,德国)和哥德尔(Kurt Gödel,1906～1978)等人的贡献，使数理逻辑已经发展成为一门内容丰富的学科。今天，数理逻辑的主要内容，大致可分成 5 个方面：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。数理逻辑与计算机科学关系密切，在计算机科学的许多领域，如逻辑设计、人工智能、语言理论、程序正确性证明等方面都有重要的应用。本篇介绍计算机科学中所必需的数理逻辑基础知识——命题逻辑、谓词逻辑以及非经典逻辑的有关内容。

本篇常用符号

$\wedge$	合取联结词	$\uparrow$	与非联结词
$\vee$	析取联结词	$\downarrow$	或非联结词
$\neg$	否定联结词	$\Leftrightarrow$	等价
$\rightarrow$	条件联结词	m_i	极小项
$\stackrel{c}{\rightarrow}$	逆条件联结词	M_i	极大项
$\leftrightarrow$	双条件联结词	$\Rightarrow$	蕴涵
∇	异或联结词	$\forall$	全称量词
		$\exists$	存在量词

第一章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句演算。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。究竟什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导一些结论？下面详细讨论这些问题。

1.1 命题及联结词

1. 命题的概念

所谓命题，就是指具有真假意义的陈述句，且真或假二者必居其一，也只居其一。也就是说，凡是能分辨其真假的陈述句都是命题。无所谓是非的句子，如感叹句、疑问句、祈使句等都不能作为命题。不可能分辨其真假的陈述句也不能作为命题。下面举出一些例子，说明这一概念。

(1) 西北大学是一所全国重点大学。

(2) 教师是人类灵魂的工程师。

(3) 明年我将去欧洲。

(4) $1+1=10$

(5) 下个月十五号是晴天。

(6) 请安静！

(7) 今天天气多好啊！

(8) 现在是几点钟？

(9) 我在说假话。

(10) 7 小于 2。

(11) 中国获得了 2008 年奥运会的主办权并且中国加入了 WTO。

(12) $x-y>2$。

在上面这些例子中，(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(10)和(11)都是命题。其中(1)、(2)、(11)是真命题，(10)是假命题。也就是说这些陈述句可以立刻辨明其真假意义。(4)是有条件的，在二进制中这是一个真语句，而在十进制中则是一个假语句。一般来说，根据上下文可以分辨出这样一个语句是真或者是假，因此它也是一个命题。至于(5)要到下个月十五号才能得知它的真假。但是，也说它是个命题。(3)和(5)是类似的，尽管现在还不能确定它是真或是

假，但它是有真假可言的，因此也说它是命题(将在第三章讨论)。由此可见，所谓的“能分辨其真假值”的意义与“已知其真假值”的意义是不同的。(6)、(7)和(8)都不是命题，因为这些是无所谓是非的祈使句、感叹句和疑问句。(9)是悖论，虽然这也是一个陈述句，但是无法判断其真假。因为，如果假定这句话是真的，这时根据其意义又可推出这句话是假的。若假定这句话为假，则根据该语句本身的含义说明它又是真的。也就是说，这是一个不能分辨其是真或是假的语句。该语句存在语义上的自相矛盾，无法确定其真假。由上述可见，这是一个不能判断真假的语句，所以不是一个命题。(11)是一个复合命题，它是由命题“中国获得了2008年奥运会的主办权”和命题“中国加入了WTO”用联结词“并且”联结起来而得到的一个新命题，由于命题“中国获得了2008年奥运会的主办权”为真且“中国加入了WTO”亦为真，所以两者用联结词“并且”联结起来得到的复合命题为真。(12)中的x、y的值不确定，某些x、y使$x-y>2$为真，某些x、y使$x-y>2$为假，即$x-y>2$的真假随x、y的变化而变化。因此$x-y>2$的真假无法确定，所以$x-y>2$不是命题。

2. 命题的真值及命题的表示

命题是能够分辨其真假的陈述句，且真或假二者必居其一，也只居其一。因此，命题逻辑是二值逻辑。命题的“真”或“假”称为命题的“真值”，分别用T(True)和F(False)来表示。且使用除T和F之外的大写英文字母A，B，…，Z或带下标的大写字母A_1，A_2，…，等表示命题，称为命题标识符。

例如，用P表示命题“今天是星期一”，可写成：

P：今天是星期一。

Q表示命题“中国加入了WTO”，可写成：

Q：中国加入了WTO。

若今天是星期一，则P的真值为T；否则，P的真值为F。而Q的真值为T。

3. 联结词

在日常语言中，一些简单的陈述句，可以通过某些联结词联结起来，组成较为复杂的语句。例如可以说“如果下星期日是晴天，那么我就去参观兵马俑”。这里就是用“如果…,那么…”把两个陈述句“下星期日是晴天”和“我去参观兵马俑”联结起来组成的一个新陈述句。因而也就是说，用“如果…，那么…”把两个命题联结起来得到一个新命题。在日常语言中还有许多联结词，如“不”、“并且”、“或者”、“当且仅当”等都是联结词。使用它们可以将

一个命题加以否定或将两个命题联结起来得到新命题。但是，在日常语言中，这些联结词的使用，一般没有严格的定义，有时就显得不很准确，常常带有二义性。在数理逻辑中，也引入联结词，这些联结词就是从日常所使用的联结词抽象出来的，它有严格的意义。因此，与日常所使用的联结词含义并不完全相同。

下面介绍常用的 5 种联结词：

(1)“合取”联结词，记作“$\wedge$”，也称为“与”。

设 P 和 Q 是命题，利用“合取”联结词可将 P 和 Q 联结起来，组成命题“$P\wedge Q$”，读作“P 与 Q 的合取”或“P 与 Q”。$P\wedge Q$ 的真值如表 1.1.1 所示。这种形式的表，称为真值表。

表 1.1.1 合取之真值表

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

真值表中第一行的含义是：当 P 和 Q 的真值都是真时，$P\wedge Q$ 的真值也是真。其余各行，依此类推。由表中可以看出，当且仅当 P 和 Q 的真值都是 T 时，$P\wedge Q$ 的真值才是 T；否则 $P\wedge Q$ 的真值是 F。

在其他书上也有使用“并且”表示合取，用 1 表示真值 T，0 表示真值 F。

注意，这里的合取和日常生活中所使用的“与”不完全相同。

首先，在日常语言中使用“与”时，通常是两个命题之间具有某种关系。但在数理逻辑中，并不一定要求两个命题之间有某种联系。例如，在日常生活中如果一个人把“2+3=5”和“太阳从东方升起”联成一句话“2+3=5 与太阳从东方升起”，人们一定不知道他说的是什么意思。但在数理逻辑中，这样联结起来的语句是完全正确的，而且它的真值可由表 1.1.1 确定。所以如此，是因为数理逻辑所研究的是推理的形式关系，并不涉及推理中的前提和结论的具体内容。

其次，在日常语言中，常可用“与”将两个名词联结起来，例如说：“张强与王成是同学。”但是，这里的“与”和数理逻辑中所使用的“与”是不同的。因为，这里的“与”不具有将两个命题联结起来的功能。因而它不是数理逻辑中的联结词。

合取联结词具有对称性，即 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 具有相同的真值。

例 1.1.1 P：今天是晴天。

Q：我们去参观大雁塔。

$P \wedge Q$：今天是晴天而且我们去参观大雁塔。 ……………… △

(2) “析取”联结词，记作“∨”，也可称为“或”。

利用此联结词可将命题 P 和 Q 联结起来，组成命题“$P \vee Q$”，读作“P 和 Q 的析取”或者“P 或 Q”。它的真值如表 1.1.2 所示。

表 1.1.2 析取之真值表

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

由析取的真值表可知，当且仅当 P 和 Q 的真值都为 F 时，$P \vee Q$ 的真值才是 F；否则 $P \vee Q$ 的真值是 T。

由析取的定义可以看出，联结词∨的意义与日常所使用的“或”意思并不完全相同。在日常生活中，“或”实际上有“排斥或”与“可兼或”之分，通常在使用时，并不进行区分，而是根据具体情况加以区别。另外，在日常生活中有时使用“或”是表示其他意义，如：汽车提前十五或二十分钟到达。这里的“或”，表示一种大约的时间。在数理逻辑中，要特别注意，析取表示的是“可兼或”。

与“∧”联结词相似，在自然语言中，通常是具有某种关系的两条语句之间使用析取“或”，但在数理逻辑中，并不要求这一点。即和“合取”联结词一样，在使用“析取”时，并不一定要求两个命题之间有某种关系。

例 1.1.2 P：李明在教室。

Q：米卢是个好教练。

$P \vee Q$：李明在教室或米卢是个好教练。 …………………… △

例 1.1.3 P：米卢在北京

Q：米卢在西安。 ………………………………………………… △

那么米卢在北京或米卢在西安，是否可表示为“$P \vee Q$”？显然，是不能这样表示的。在这种意义上使用的“或”，是不可兼或，称为“异或”。用符号“$\bar{\vee}$”表示。即米卢在北京或米卢在西安，应该表示为 $P \bar{\vee} Q$。

由上述可知，自然语言中的“或”是多义的，主要有以下 3 种情况：

- 可兼或：二者至少有一个发生，不排斥二者都发生的情况。这是析取联结词的含义。如 $ab = 0$，即 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $a = b = 0$。
- 排斥或：非此即彼，二者不可兼得，用符号 $\bar{\vee}$ 表示。如 6 或者是偶数或者是奇数。
- 表示近似数的意义，如去图书馆需 6 或 7 分钟。这里的或不是联结词。

因此，在遇到含有“或”的语句时，要分清它是“可兼或”、“排斥或”、还是表示近似数的“或”，否则就不能正确表达原命题的意义。

(3)“否定”联结词，记作“$\neg$”，也可称为“非”。

给定一个命题 P，可以由 P 得到一个新命题“$\neg P$”，读作“非 P”，它的真值如表 1.1.3 所示。

由$\neg P$ 的真值表可知，$\neg P$ 的真值是 T，当且仅当 P 的真值是 F。反之亦然。

表 1.1.3　否定之真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 1.1.4　P：今天是星期一。

$\neg P$：今天不是星期一。……………………………………… △

再如，P：西安是一个大城市。那么，$\neg P$：西安不是一个大城市。应注意，不能把“西安是一个小城市”认为是$\neg P$。这是由于不能把“西安不是一个大城市”与“西安是一个小城市”等同看待之缘故。因为，不是大城市的情况有中等城市、小城市和农村等几种可能。如同今天不是星期一，可以是星期二或星期三或星期四或星期五或星期六或星期日一样。

(4)“如果…，则…”，记作“$\rightarrow$”或“$\supset$”。也可称为条件联结词，还有人称为“蕴涵”。但在本书中“蕴涵”有另外的含义，在以后使用蕴涵时，不是指这里的联结词。

设 P 和 Q 是命题，用“如果…，则…”把它们联结起来，就会得到一个新命题，记作“$P\rightarrow Q$”，读作“如果 P，则 Q”，称为条件命题。其真值如表 1.1.4 所示。

表 1.1.4　“如果…，则…”之真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

由表 1.1.4 可以看出，当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F，否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 T。称 P 为前件或前提，Q 为后件或结论。

在通常使用的自然语言和其他学科中，在“如果…”与“则…”之间，常有某种因果关系。若没有任何关系，这样的语句一般是不使用的。但在数理逻辑中，并不要求前件和后件之间要有什么联系。例如：“如果 $2+3=5$，则今年是丰收年”。在日常语言中，这样的语句是不被使用的。但是，在数理逻辑

中却是允许的，而且和其他命题一样正确、合理。

由上述可知，在数理逻辑中，用“→”联结起来的两个命题，根本不去考虑这两个命题之间是否有关系。用这个联结词联结两个命题 P 和 Q，得到命题 $P\to Q$，当 P 的真值为 F 时，无论 Q 的真值是什么，$P\to Q$ 的真值都是 T。这一点与自然语言中所使用的“如果…，则…”是不同的。因为在自然语言中，当前提为假时，不管结论是真或是假，往往无法判断其真假。例如命题“如果下星期日天气晴朗，则我去参观兵马俑”中，“下星期日天气晴朗”是真，“我去参观兵马俑”也是真，这个条件命题是真，这是符合人们日常习惯的。若“下星期日天气晴朗”是真，“我去参观兵马俑是假”，条件命题是假这也是自然语言中所使用的。但是，当“下星期日天气晴朗”是假的时候，在自然语言中通常是不考虑这种情况的。但在数理逻辑中，对于这个命题，在这种情况下必须给出它的真值来。按照上述真值表 1.1.4 给出的真值，就是认为在“下星期日天气晴朗”是假的情况下，无论“我去参观兵马俑”是真或是假，都认为这个条件命题是真，称为“善意的推定”。

(5)“双条件”联结词，记作“↔”或“*iff*”。

用双条件联结词将两个命题 P，Q 联结起来，可得到一个新的双条件命题，记为“$P\leftrightarrow Q$”，读作“P 当且仅当 Q”。它的真值如表 1.1.5 所示。

由表 1.1.5 可以看出，当且仅当 P 和 Q 的真值相同时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值才是 T。否则 $P\leftrightarrow Q$ 的真值为假。双条件联结词亦称为同或。

表 1.1.5　双条件之真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双条件联结词↔是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的抽象。和上面定义的几个联结词“∧”、“∨”、“→”一样，构成双条件命题 $P\leftrightarrow Q$，也不要求 P 和 Q 两个命题之间有任何联系，$P\leftrightarrow Q$ 的真值，仅与 P 和 Q 的真值有关。例如可将“$2+3=5$”和“雪是白的”联结起来，得到“$2+3=5$ 当且仅当雪是白的”。

4. 命题的分类

从以上讨论可以看出，一类命题是不能分解为更简单的陈述句，即不含任何联结词的命题，称为原子命题；另一类是至少包含一个联结词的命题，称为复合命题或分子命题。复合命题的真值只取决于构成它的各原子命题的真值，