# 现代应用数学手册

《现代应用数学手册》编委会

# 离散数学卷

清華大學出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

33

《现代应用数学手册》编委会

# 现代应用数学手册

## 离散数学卷



清华大学出版社

(京)新登字 158 号

## 内 容 简 介

本书介绍离散数学最核心的部分：集合论，组合数学与图论，代数结构与泛代数，标准(古典)与非标准(非古典)数理逻辑．书中从理论与应用方面深入浅出地阐述各分支中的基本概念，基本理论与基本方法．注重背景，强调应用，便于读者加深理解、掌握与应用．本书可供理、工、医、农、经管等各个领域中的广大科技人员，大、中专院校教师、学生、研究生使用．

书　名：现代应用数学手册(离散数学卷)
作　者：《现代应用数学手册》编委会
出版者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
　　　　http：//www. tup. tsinghua. edu. cn
印刷者：清华大学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：21　字数：498 千字
版　次：2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-04565-8/O・260
印　数：0001～2000
定　价：33. 00 元

# 《现代应用数学手册》
# 编 辑 委 员 会

# 离散数学卷

## 责任编委　马振华

| 章次 | 编者 | 校者 |
|---|---|---|
| 1～6 | 马振华 | 李忠傧 |
| 7～13 | 胡冠章 | 王殿军 |
| 14～16 | 李忠傧 | 马振华，马连荣 |
| 17～18 | 李忠傧 | 马振华 |
| 19～20 | 李忠傧，袁健 | 马振华 |
| 21～23 | 马振华 | 李忠傧 |

# 序

随着计算机科学技术的飞速发展，人类正进入信息时代.

信息时代是应用数学大发展的时代，人类长期积累起来的知识体系，正面临着第3次数学化. 数学思想，数学方法与数学模型随着计算机的广泛应用，日益渗透到各种行业中去.

当代，除了古典的数学理论（初等数学，微积分学，微分方程，复变函数等）早已得到广泛的应用外，一些比较抽象的现代数学理论（集合论、数理逻辑、范畴论、抽象代数、泛代数、代数几何、拓扑学、泛函分析等）以及一些新兴的数学理论（随机过程、时间序列、运筹学、最优化理论、有限元方法、模糊数学、混沌与分形等）也逐渐地成为社会生产、科学实验、工程技术及经济管理中不可缺少的工具，应用数学的适用范围正在迅速地扩大.

为了满足日益增长的社会需求，清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会，组织编写了这套多卷集的手册.

本书读者是理、工、医、农、经管等各个领域中的广大工程技术人员、科研人员、大、中专院校的教师、学生、研究生及其他使用数学工具的实际工作者. 其中有些内容对于中学生也是适用的.

编者力求使本书成为一套高质量的工具书，它有下列特点：

(1) **内容"新颖"** 本书力求做到内容现代化，除用现代观点介绍古典内容外，对已出现的新理论、新方法尽量优先选入.

(2) **突出"应用"** 本书在选材上突出数学理论的应用，以通俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术等实际领域中应用广泛的数学理论和方法.

(3) **紧密"结合"计算机应用** 为了更有效地应用数学方法解

决各种实际问题，广大科技人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合，提高工作效率. 为此，本书在结合计算机应用方面，给予特别的重视.

(4) **版面设计"合理"，便于迅速查阅** 为方便读者使用，本书采用了一套较为完善的索引体系. 除正文中章、节的编号沿用国际通行的十进制编号外，对于重要的定义、定理、例题、公式、图、表等均有编号. 读者可以从(1) 目录，(2) 中文—外文索引，(3) 外文—中文索引等三种途径，迅速找到所需资料. 此外，本书对载人的外国科学家人名，尽量采用"名从主人"的原则.

(5) **数学符号力求"统一"与国际化** 鉴于目前国内各种文献、书籍中使用的数学符号不够统一与国际化，增加了读者阅读时的困难. 本书除按国家标准 GB3102—93 外，兼用国际数学界权威著作《数学大百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics, EDM)中的符号为标准. 对于不在上述文献中的其他新符号，则选用较为流行者.

本手册各卷内容独立完整，便于个人读者与团体读者按需选购. 当前应用数学急剧发展，编委会在条件成熟的时候，还将增出新卷.

本书的编撰是与清华大学应用数学系领导，特别是萧树铁教授的热心支持，编辑委员会各位编委的通力协作，校内外的许多教师、科研工作者的大力支持分不开的，编者深致谢意.

在编辑出版过程中，还得到清华大学出版社的热情支持.

本书从编撰到出版，历尽艰辛，饮水思源，编者还要感谢本书的发起人，清华大学应用数学系陆璇教授，北京出版社李利军编辑及已故的北京出版社社长王政人先生.

最后，编者还要对夫人王华敏表示谢忱，没有她的深刻理解、热情支持与持久的帮助，本书也难以问世.

主编 马振华

1997 年于清华园

# 符　号　表

| | |
|---|---|
| $\forall$ | 全称量词 |
| $\exists$ | 存在量词 |
| $\vdash(\vdash_L \mathscr{A})$ | 断定符(公式 $\mathscr{A}$ 在 $L$ 中可证) |
| $\models(\models_E \mathscr{A})$ | 满足符(公式 $\mathscr{A}$ 在 $E$ 上有效,公式 $\mathscr{A}$ 在 $E$ 上可满足) |
| $\neg(\sim, ^{-}$, NOT) | 命题的“非”运算 |
| $\wedge$(&, AND) | 命题的“合取”(“与”)运算 |
| $\vee$(OR) | 命题的“析取”(“或”,“可兼或”)运算 |
| $\rightarrow$($\Rightarrow$,IF…THEN…) | 命题的“蕴含”运算 |
| $\leftrightarrow$($\equiv$, iff) | 命题的“等价”运算 |
| $\overline{\vee}(\underline{\vee})$ | 命题的“不可兼或”运算(“异或门”) |
| $\uparrow$($\mid$, NAND) | sheffer 竖(“与非门”) |
| $\downarrow$(NOR) | pierce 箭(“或非门”) |
| $\Box$(L) | 模态词“必然” |
| $\Diamond$(M) | 模态词“可能” |
| $\varnothing$ | 空集 |
| $\in$ | 属于($\notin$,$\overline{\in}$不属于) |
| $\mu_A(\cdot)$ | 集 $A$ 的特征函数(隶属函数) |
| $\mathscr{P}(A)$ | 集 $A$ 的幂集 |
| $\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n}({}^nA, A^n)$ | 集合 $A$ 的笛卡儿积 |
| $R^2=R\circ R(R^n=R^{n-1}\circ R)$ | 关系 $R$ 的“复合” |
| $\aleph_0$ | 阿列夫零 |

$\aleph_1(\aleph)$ 阿列夫

$\supseteq$ 包含

$\supset$ 真包含

$\cup$ 集合的并运算

$\cap$ 集合的交运算

$\setminus$ 集合的差运算

$\dot{-}(\triangle, \dotplus, \oplus)$ 集合的"对称差"(Minkowski 和)

$\oplus$ 对位 Boole 和(直和)

$\upharpoonright$ 限制

$+_m$ $m$ 同余加

$[x]_R$ 集合关于关系 $R$ 的等价类

$A/R$ 集合 $A$ 上关于 $R$ 的商集

$\pi_R(A)$ 集合 $A$ 关于关系 $R$ 的划分

$R_\pi(A)$ 集合 $A$ 关于划分 $\pi$ 的关系

$(a)$ 主理想

$\langle a\rangle$ 循环群

$\boldsymbol{I}$ 理想,环

$\boldsymbol{Z}/(n)$ 模 $n$ 的同余类集

$\boldsymbol{H}_{i\cdot}$ 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的第 $i$ 个行向量

$\boldsymbol{H}_{\cdot j}$ 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的第 $j$ 个列向量

$\hom(R^{(m)}, R^{(n)})$ $R^{(m)}$ 到 $R^{(n)}$ 的模同态

$[XY]=XY-YX$ 交换子乘积

$h_{\mathscr{C}}(A,B)$ 态射(箭)

$h_{\mathscr{C}}(A,—)$ 由 $\mathscr{C}$ 中对象 $A$ 确定的(共变)函子

$\operatorname{ann}x$ $x$ 的零化子($x$ 的阶理想)

CP 演绎定理

EG 存在推广规则

ES 存在特指规则

UG 全称推广规则

US 全称特指规则

$I_A$, $R^\circ$ 恒等关系

$\overline{A}$, $A'$ 集合 $A$ 的补集

$X^X$, ${}^XX$ 所有 $X$ 到自身的映射

$\overline{\overline{M}}$, $|M|$ 集合 $M$ 的势(基数)

$R$ 关系

$\not R$ 否关系

$\overline{R}$ 补关系

$R^{-1}$ 逆关系

$R^+$, $t(R)$ 关系 $R$ 的传递闭包

$R^*$, $rt(R)$ 关系 $R$ 的自反、传递闭包

$R \circ S$ 关系 $R$ 与关系 $S$ 的复合

$\underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$, $R^n$ 关系 $R$ 的 $n$ 次幂

$r(R)$ 关系 $R$ 的自反闭包

$s(R)$ 关系 $R$ 的对称闭包

$t(R)$ 关系 $R$ 的传递闭包

$\underbrace{B_2 \times \cdots \times B_2}_{r}$, $B_2^r$ 布尔代数 $B_2$ 的 $r$ 次积

$B_{2^r}$ 含有 $2^r$ 个元素的布尔代数

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ 合式公式

$\binom{n}{k}$ 二项式系数

$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_p}$ 多项式系数

$[1,n]$ 1 到 $n$ 的整数集合

$[x]_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$

$[x]^k = x(x+1)\cdots(x+k-1)$

$[x|\alpha]_n=(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1}),[x|\alpha]_0=1$

$\alpha=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ Gauss 系数

$C(n,k)$ 组合数

$d(u,v)$ 点 $u$ 与点 $v$ 间的距离

$d(v)$ 点 $v$ 的次(度)

$d^+(v)$ 点 $v$ 的出次(度)

$d^-(v)$ 点 $v$ 的入次(度)

$E(n,m,k)$ 实际依赖于所有变量的函数的个数

$G=(V,E)$ 图

$G^*$ 平面图 $G$ 的对偶图

$K_n$ $n$ 阶完全图

$K_{n,m}$ 完全二分图

$L_N(t_1^{m_1}\times t_2^{m_2}\times\cdots\times t_k^{m_k})$ 正交试验表

$OA(n,m)$ 正交表

$p(n|h)$ $n$ 的所有分拆中最小部分为 $h$ 的分拆数

$p(n,m|h)$ 整数 $n$ 分为 $m$ 部分,最小部分为 $h$ 的分拆数

$p(G;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)/Z(G;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 群 $G$ 的循环指标

$r(k,l)$, $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$, $r(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$ Ramsey 数

$S_n$ $n$ 次对称群

$S_n^{(2)}$ $n$ 次二元对称群

$S(n,k)$ 第二类 Stirling 数

$s(n,k)$ 第一类 Stirling 数

$S_\alpha(n,k)$ 推广的第二类 Stirling 数

$s_\alpha(n,k)$ 推广的第一类 Stirling 数

$Z(G;t_1,\cdots,t_n)$ 群 $G$ 的轮换指标

$\alpha(G)$ 图 $G$ 的独立数

| | |
|---|---|
| $\alpha'(G)$ | 图 $G$ 的边独立数 |
| $\mu(x,y),\mu(d,n),\mu(n)$ | Möbius 函数 |
| $\varphi(n)$ | Euler 函数 |
| $\mathbf{C}$ | 复数集 |
| $\mathbf{N}$ | 自然数集(包括 0 在内) |
| $\mathbf{N}^+$ | 正自然数集 |
| $\mathbf{P}$ | 素数集 |
| $\mathbf{Q}$ | 有理数集 |
| $\mathbf{Q}^+$ | 正有理数集 |
| $\mathbf{Q}^-$ | 负有理数集 |
| $\mathbf{R}$ | 实数集 |
| $\mathbf{Z}$ | 整数集 |
| $\mathbf{Z}_m$ | $\{[1],[2],\cdots,[m]\}$ |
| $\mathbf{Z}_p$ | $p$ 进整数环 |
| **Set** | 集范畴 |
| **Top** | 拓扑空间范畴 |
| **Ab** | 交换群范畴 |
| **Grp** | 群范畴 |
| **Mon** | 单元半群范畴 |
| **Ring** | 有单位元的(结合)环范畴 |
| **Rng** | 环范畴 |
| **CRng** | 交换环范畴 |
| $R$-**mod** | 环 $R$ 的左模范畴 |
| **mod**-$R$ | 环 $R$ 的右模范畴 |
| **Field** | 域范畴 |
| **Poset** | 偏序集范畴 |
| $\Omega$-**Alg** | $\Omega$ 代数范畴 |

# 目　　录

符号表…………………………………………………………………… V

## 集　合　论

1　基本概念…………………………………………………………………… 1
　1.1　引言…………………………………………………………………… 1
　1.2　集合的古典定义……………………………………………………… 1
　1.3　集合及其表示法……………………………………………………… 3
　　1.3.1　显式法(枚举法) ………………………………………………… 3
　　1.3.2　隐式法 ……………………………………………………………… 3
　　1.3.3　特征函数法 ………………………………………………………… 5
　1.4　子集与集合的包含关系……………………………………………… 6

2　集合代数…………………………………………………………………… 8
　2.1　集合上的运算………………………………………………………… 8
　　2.1.1　集合上的基本运算 ……………………………………………… 8
　　2.1.2　基本运算的重要性质…………………………………………… 11
　　2.1.3　集合的对称差…………………………………………………… 12
　　2.1.4　幂集与幂运算…………………………………………………… 14
　2.2　集合的 Venn 图 ……………………………………………………… 15

3　关系 ………………………………………………………………………… 18
　3.1　关系及其表示法 …………………………………………………… 18
　　3.1.1　集合的 Descartes 积 …………………………………………… 18
　　3.1.2　$n$ 元关系 ………………………………………………………… 20
　3.2　二元关系与映射 …………………………………………………… 22
　　3.2.1　二元关系………………………………………………………… 22
　　3.2.2　关系运算………………………………………………………… 24

3.3 特殊的二元关系 …… 28
3.3.1 概念 …… 28
3.3.2 关系的限制与扩充 …… 32
3.3.3 关系的闭包与闭包运算 …… 33
3.4 等价关系与划分 …… 37
3.5 序关系与偏序集 …… 39
3.5.1 引言 …… 39
3.5.2 偏序集的性质 …… 40

**4 映射(函数)** …… 45
4.1 映射(函数)的概念 …… 45
4.2 复合映射与逆映射 …… 48
4.3 函数概念的拓展 …… 52

**5 集合的基数** …… 56
5.1 有限集与无限集 …… 56
5.2 可列集与不可列集 …… 57
5.3 集合的基数 …… 61
5.3.1 基数的比较 …… 61
5.3.2 Cantor 猜想——连续统假设(CH) …… 66

**6 集合论悖论与公理集合论** …… 68
6.1 悖论 …… 68
6.1.1 Burali-Forti 悖论(最大序数悖论) …… 68
6.1.2 Cantor 悖论(最大基数悖论) …… 68
6.1.3 Russell 悖论 …… 69
6.1.4 Richard 悖论 …… [illegible]
6.1.5 Berry 悖论 …… 70
6.1.6 Grelling 悖论 …… 71
6.1.7 理发师悖论 …… 71
6.1.8 Minimanoff 悖论 …… 72
6.2 公理集合论 …… 72
6.2.1 ZFC 系统 …… 73
6.2.2 注记 …… 74

6.2.3 GBN 系统 …… 78

## 组合学与图论

7 若干著名的组合学和图论问题 …… 79
7.1 幻方与中国古代的传说 …… 79
7.2 36 军官问题和拉丁方 …… 81
7.3 从 Königsberg 7 桥问题与中国邮递员问题 …… 82
7.4 鸽子笼原理与 Ramsey 数 …… 83
7.5 地图着色与四色猜想(定理) …… 83
7.6 绕行世界与旅行商问题 …… 84
7.7 电路与网络 …… 85
7.8 从分子结构到图的计数 …… 86
7.9 Kirkman 女生问题与三元系 …… 86
7.10 试验设计与组合设计 …… 87

8 组合公式和组合数 …… 89
8.1 二项式系数的基本恒等式 …… 89
8.2 二项式定理及有关和式 …… 90
8.3 二阶组合恒等式 …… 91
8.4 三阶组合恒等式 …… 91
8.5 广义二项式定理 …… 92
8.6 多项式系数 …… 93
8.7 Gauss 二项式系数 …… 94
8.8 排列数 …… 94
8.9 组合数 …… 95
8.10 映射数与序列数 …… 96
8.11 第一类 Stirling 数 …… 97
8.12 第二类 Stirling 数 …… 98
8.13 Bell 数 …… 100
8.14 Fibonacci 数 …… 101
8.15 Lucas 数 …… 103
8.16 Catalan 数 …… 104
8.17 Ramsey 数 …… 105
8.18 Lah 数 …… 107

8.19 Bernoulli 数和 Euler 数 …… 108

**9 组合计数方法与问题** …… 109
9.1 初等计数原理 …… 109
9.2 包含与排斥原理 …… 109
9.3 有限集的子集的计数问题 …… 112
9.4 置换的计数问题 …… 113
9.5 集合的划分数 …… 114
9.6 整数的分拆数 …… 115
9.7 Burnside 引理 …… 119
9.8 置换群的轮换指标 …… 120
9.9 Pólya 定理 …… 123
9.10 Pólya 定理的应用 …… 125
9.10.1 着色问题 …… 125
9.10.2 布置问题 …… 127
9.10.3 开关线路与布尔函数的计数问题 …… 129
9.10.4 图的计数问题 …… 131
9.11 图的计数 …… 131

**10 图的基本概念与参数** …… 135
10.1 图的定义与简单分类 …… 135
10.2 邻接与关联 …… 137
10.3 度、度序列与边数 …… 138
10.4 子图 …… 140
10.5 路与圈 …… 141
10.6 距离与中心 …… 142
10.7 图的运算 …… 143
10.8 图的同构、同态与同胚 …… 144
10.9 图的独立集、团和覆盖 …… 145
10.10 一些特殊图类 …… 147

**11 图论中若干问题** …… 159
11.1 图的连通性 …… 159
11.1.1 基本概念 …… 159

11.1.2 连通图的性质 …… 160
11.2 图的平面性 …… 161
11.2.1 平面图及有关参数 …… 161
11.2.2 平面图的条件及性质 …… 162
11.3 图的拓扑不变量 …… 164
11.3.1 定向曲面与非定向曲面 …… 164
11.3.2 图的曲面嵌入与亏格 …… 165
11.4 图的 Hamilton 问题 …… 168
11.4.1 Hamilton 图的必要条件 …… 168
11.4.2 Hamilton 图的充分条件 …… 168
11.4.3 Hamilton 图的几个等价条件 …… 169
11.4.4 图的泛圈性 …… 169
11.5 图的匹配与因子分解问题 …… 170
11.5.1 基本概念 …… 170
11.5.2 图中存在完全匹配的条件 …… 170
11.5.3 匹配与覆盖的关系 …… 171
11.6 图的着色问题 …… 172
11.6.1 点着色与边着色 …… 172
11.6.2 色数 $\chi(G)$的性质 …… 174
11.6.3 边色数 $\chi'(G)$的性质 …… 174
11.6.4 平面图的着色 …… 175
11.6.5 图的运算的色多项式 …… 176
11.7 图的代数理论 …… 178

**12 离散变换与反演公式** …… 184
12.1 离散变换的一般形式 …… 184
12.2 二项式变换 …… 185
12.2.1 二项式变换的一般形式 …… 185
12.2.2 常用的二项式变换 …… 185
12.2.3 应用 …… 186
12.3 Stirling 变换 …… 188
12.4 Möbius 变换 …… 189
12.4.1 Möbius 反演公式的一般形式 …… 189
12.4.2 整数因子格上的 Möbius 反演公式 …… 189
12.4.3 应用 …… 190