

149

2016

普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 理论力学(Ⅱ)

第六版

哈尔滨工业大学理论力学教研室 编

高等教育出版社

### 图书在版编目(CIP)数据

理论力学. II /哈尔滨工业大学理论力学教研室编.  
6版. -北京:高等教育出版社,2002.8

高等学校教材

ISBN 7-04-011071-7

I.理… II.哈… III.理论力学-高等学校-教材 IV.031

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第043272号

理论力学(II)(第六版)

哈尔滨工业大学理论力学教研室 编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 北京人卫印刷厂

开 本 787×960 1/16

印 张 10.75

字 数 190 000

版 次 1961年8月第1版

2002年8月第6版

印 次 2002年8月第1次印刷

定 价 13.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究



## 内 容 提 要

本书第一版至第五版受到广大教师和学生的欢迎,本版仍保持前五版理论严谨、逻辑清晰、由浅入深、宜于教学的风格和体系,适当提高了起点,增加了部分新内容,以适应 21 世纪的需要。本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。

本版分为两册,第 I 册内容包括静力学、运动学、动力学普遍定理、达朗贝尔原理及虚位移原理等,一般中等学时的专业只用第 I 册即可;第 II 册内容包括非惯性系中的质点动力学、碰撞、分析力学基础、机械振动基础、刚体定点运动与自由刚体运动及变质量动力学等,各专业可根据需要来选取。全书配有大量思考题和习题。

本书可作为高等院校工科各专业理论力学课程的教材,可作为夜大、函授大学、职工大学相应专业的自学和函授教材,也可供有关工程技术人员参考。

# 主要符号表

$a$	加速度	$l$	长度
$a_n$	法向加速度	$L$	拉格朗日函数
$a_t$	切向加速度	$L_O$	刚体对点 $O$ 的动量矩
$a_a$	绝对加速度	$L_C$	刚体对质心的动量矩
$a_r$	相对加速度	$m$	质量
$a_c$	牵连加速度	$M_z$	对 $z$ 轴的矩
$a_C$	科氏加速度	$M$	力偶矩, 主矩
$A$	面积, 自由振动振幅	$M_O(F)$	力 $F$ 对点 $O$ 的矩
$e$	恢复因数	$M_I$	惯性力的主矩
$f$	动摩擦因数	$n$	质点数目
$f_s$	静摩擦因数	$O$	参考坐标系的原点
$F$	力	$p$	动量
$F'_R$	主矢	$P$	重量, 功率
$F_s$	静滑动摩擦力	$q$	载荷集度, 广义坐标
$F_N$	法向约束力	$Q$	广义力
$F_{le}$	牵连惯性力	$r$	半径
$F_{IC}$	科氏惯性力	$r$	矢径
$F_I$	惯性力	$r_O$	点 $O$ 的矢径
$g$	重力加速度	$r_C$	质心的矢径
$h$	高度	$R$	半径
$i$	$x$ 轴的基矢量	$s$	弧坐标, 频率比
$I$	冲量	$t$	时间
$j$	$y$ 轴的基矢量	$T$	动能, 周期
$J_x$	刚体对 $z$ 轴的转动惯量	$v$	速度
$J_{xy}$	刚体对 $x, y$ 轴的惯性积	$v_a$	绝对速度
$J_C$	刚体对质心的转动惯量	$v_r$	相对速度
$k$	弹簧刚度系数	$v_c$	牵连速度
$k$	$z$ 轴的基矢量	$v_C$	质心速度
		$V$	势能, 体积

$W$	力的功	$\rho$	密度, 曲率半径
$x, y, z$	直角坐标	$\varphi$	角度坐标
$\alpha$	角加速度	$\varphi_f$	摩擦角
$\beta$	角度坐标	$\psi$	角度坐标
$\delta$	滚阻系数, 阻尼系数	$\omega_0$	固有角频率
$\delta$	变分符号	$\omega$	角速度
$\zeta$	阻尼比	$\omega_a$	绝对角速度
$\eta$	减缩因数	$\omega_r$	相对角速度
$\lambda$	本征值	$\omega_e$	牵连角速度
$\Delta$	对数减缩		

# 目 录

第一章 非惯性系中的质点动力学	1
§ 1-1 非惯性系中质点动力学的基本方程	1
§ 1-2 非惯性系中质点的动能定理	6
小结	9
思考题	9
习题	10
第二章 碰撞	13
§ 2-1 碰撞的分类·碰撞问题的简化	13
§ 2-2 用于碰撞过程的基本定理	14
§ 2-3 质点对固定面的碰撞·恢复因数	16
§ 2-4 碰撞问题举例	19
§ 2-5 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用·撞击中心	22
小结	24
思考题	25
习题	26
第三章 分析力学基础	30
§ 3-1 自由度和广义坐标	30
§ 3-2 以广义坐标表示的质点系平衡条件	31
§ 3-3 动力学普遍方程	37
§ 3-4 第一类拉格朗日方程	39
§ 3-5 第二类拉格朗日方程	40
§ 3-6 拉格朗日方程的初积分	45
小结	47
思考题	48
习题	49
第四章 机械振动基础	54
§ 4-1 单自由度系统的自由振动	54
§ 4-2 计算固有频率的能量法	62
§ 4-3 单自由度系统的有阻尼自由振动	64
§ 4-4 单自由度系统的无阻尼受迫振动	70
§ 4-5 单自由度系统的有阻尼受迫振动	75
§ 4-6 转子的临界转速	79

§ 4-7 隔振·····	81
§ 4-8 两个自由度系统的自由振动·····	84
§ 4-9 两个自由度系统的受迫振动·动力减振器·····	92
小结·····	97
思考题·····	98
习题·····	99
<b>第五章 刚体定点运动、自由刚体运动、刚体运动的合成·陀螺仪近似</b>	
<b>理论</b> ·····	108
§ 5-1 刚体绕定点运动的运动学描述·····	108
§ 5-2 自由刚体的运动·····	113
§ 5-3 刚体运动的合成·····	115
§ 5-4 陀螺仪近似理论·····	125
小结·····	130
思考题·····	132
习题·····	132
<b>第六章 变质量动力学</b> ·····	138
§ 6-1 变质量质点的运动微分方程·····	138
§ 6-2 变质量质点的动力学普遍定理·····	143
小结·····	146
思考题·····	147
习题·····	147
<b>参考文献</b> ·····	150
<b>习题答案</b> ·····	151
<b>索引</b> ·····	158
<b>Synopsis</b> ·····	160
<b>Contents</b> ·····	161

# 第一章 非惯性系中的质点动力学

牛顿第一定律和第二定律只适用于惯性参考系,对于非惯性参考系是不适用的。本章研究的仍然是速度远小于光速的宏观物体的机械运动,这里时间、质量及空间尺度的度量都是绝对的,因此仍属于古典力学(或称经典力学)范畴。

本章将建立非惯性系中的质点动力学基本方程及动能定理。

## § 1-1 非惯性系中质点动力学的基本方程

在非惯性参考系中质点动力学的基本方程不同于惯性系。

设有一质量为  $m$  的质点  $M$ , 相对于非惯性参考系  $O'x'y'z'$  运动, 如图 1-1 所示。点  $M$  受有力  $F$  作用, 其相对加速度为  $a_r$ 。为确定作用力与相对加速度的关系, 现选取一惯性参考系  $Oxyz$  作为定参考系。动参考系  $O'x'y'z'$  相对于这个定参考系的运动为牵连运动; 动点  $M$  相对于定参考系的运动是绝对运动。在定参考系内, 按牛顿第二定律, 有

$$ma_a = F$$

其中  $a_a$  表示质点的绝对加速度,  $F$  为作用在质点上的合力。

从运动学中点的加速度合成定理知

$$a_a = a_r + a_e + a_c$$

其中  $a_e$  为质点的牵连加速度,  $a_c$  为质点的科氏加速度。将上式代入前式, 得

$$ma_r + ma_e + ma_c = F$$

或

$$ma_r = F - ma_e - ma_c \quad (1-1)$$

令

$$F_{le} = -ma_e, F_{lc} = -ma_c$$

于是式(1-1)可写成与牛顿第二定律相类似的形式, 即

$$ma_r = F + F_{le} + F_{lc} \quad (1-2)$$

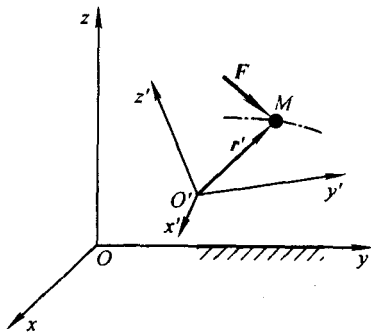


图 1-1

上式称为非惯性系中的质点动力学基本方程, 或称为质点相对运动动力学基本方程。其中  $F_{le}$  称为牵连惯性力,  $F_{lc}$  称为科氏惯性力, 可以理解为在非惯性参考系中对于牛顿第二定律的修正项。  $F_{le}$  和  $F_{lc}$  都具有力的量纲, 且与质点的



质量有关,因而称之为惯性力。

在动参考系内,式(1-2)可写成微分方程的形式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic} \quad (1-3)$$

其中  $\mathbf{r}'$  表示质点  $M$  在动参考系中的矢径,  $\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}$  是  $\mathbf{r}'$  对时间  $t$  的二阶相对导数。

式(1-3)称为非惯性系中的质点运动微分方程,或称为质点相对运动微分方程。在应用该方程解题时,应取适当的投影式,例如在直角坐标轴上的投影或自然坐标轴上的投影等。

下面研究几种特殊情况。

(1) 当动参考系相对于定参考系作平移时,因科氏加速度  $\mathbf{a}_c = 0$ ,则科氏惯性力  $\mathbf{F}_{ic} = 0$ 。于是相对运动动力学基本方程为

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ie}$$

(2) 当动参考系相对于定参考系作匀速直线平移时,因为有  $\mathbf{a}_c = 0$  和  $\mathbf{a}_e = 0$ ,则有  $\mathbf{F}_{ie} = \mathbf{F}_{ic} = 0$ ,于是相对运动动力学基本方程与相对于惯性参考系的基本方程形式一样,即

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F}$$

上式说明,对这样的参考系,牛顿定律也是适用的。因此所有相对于惯性参考系作匀速直线平移的参考系都是惯性参考系。上式中不包含与牵连运动有关的项,这说明,当动参考系作惯性运动时,质点的相对运动不受牵连运动的影响。因此可以说:发生在惯性参考系中的任何力学现象,都无助于发觉该参考系本身的运动情况,以上称为相对性原理。

(3) 当质点相对于动参考系静止时,即  $\mathbf{a}_r = 0$ ,  $\mathbf{v}_r = 0$ ,因此有  $\mathbf{F}_{ic} = 0$ 。这样,式(1-2)成为

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ie} = 0$$

上式称为质点相对静止的平衡方程,即当质点在非惯性参考系中保持相对静止时,作用在质点上的力与质点的牵连惯性力相互平衡。

(4) 当质点相对于动参考系作等速直线运动时,有  $\mathbf{a}_r = 0$ 。这样,式(1-2)成为

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic} = 0$$

上式称为质点相对平衡方程。可见在非惯性参考系中,质点相对静止和作等速直线运动时,其平衡条件是不相同的。

**例 1-1** 图 1-2 所示单摆,摆长为  $l$ ,小球质量为  $m$ ,其悬挂点  $O$  以加速度  $\mathbf{a}_0$  向上运动,求此时单摆作微振动的周期。

**解:** 在悬挂点  $O$  上固结一平移参考系  $Ox'y'$ ,小球相对于此动参考系的运动相当于悬挂

点固定的单摆振动。

分析小球受力:重力  $P = mg$ , 绳子张力  $F$ ; 此外, 还应加入牵连惯性力  $F_{ic}$  ( $F_{ic} = -ma_0$ )。因动参考系作平移, 所以科氏惯性力  $F_{lc} = 0$ 。建立相对运动动力学基本方程

$$ma_r = F + P + F_{ic}$$

将上式投影到轨迹的切向轴  $t$  上, 得

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -(P + F_{ic}) \sin \varphi = -m(g + a_0) \sin \varphi$$

当摆作微振动时,  $\varphi$  角很小, 有  $\sin \varphi \approx \varphi$ , 且  $s = l\varphi$ , 上式成为

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m(g + a_0) \varphi$$

令  $\omega_0^2 = \frac{g + a_0}{l}$ , 则上式可写成自由振动微分方程的标准形式

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

其解的形式为  $\varphi = A \sin(\omega_0 t + \theta)$ , 而振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a_0}}$$

**例 1-2** 一直杆  $OA$ , 长  $l = 0.5 \text{ m}$ , 可绕过端点  $O$  的  $z'$  轴在水平面内作匀速转动, 如图 1-3 所示。其转动角速度  $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ , 在杆  $OA$  上有一质量为  $m = 0.1 \text{ kg}$  的套筒  $B$ 。设开始运动时, 套筒在杆的中点处于相对静止。忽略摩擦, 求套筒运动到端点  $A$  所需要的时间及此时对杆的水平压力。

**解:** 研究套筒  $B$  相对于杆  $OA$  的运动, 选取和杆  $OA$  一起转动的坐标系  $Ox'y'z'$  为动参考系。

作用在套筒上的力有重力  $mg$ 、铅直约束力  $F_1$ 、水平约束力  $F_2$ ; 根据质点相对运动动力学理论, 还应加入牵连惯性力  $F_{ic}$  和科氏惯性力  $F_{lc}$ 。因动系作匀速转动, 所以牵连惯性力  $F_{ic}$  只有径向分量  $F_{ic} = m\omega^2 x'$ , 其方向沿直杆向外。而科氏惯性力  $F_{lc}$  应垂直于相对速度  $v_r$ , 其大小为  $F_{lc} = 2m\omega \dot{x}'$ , 方向如图所示。

建立相对运动微分方程

$$m \frac{d^2 r'}{dt^2} = mg + F_1 + F_2 + F_{ic} + F_{lc} \quad (\text{a})$$

将上式投影到  $x'$  轴上得

$$m\ddot{x}' = mx'\omega^2$$

令  $v_r = \dot{x}'$ , 上式消去  $m$  为

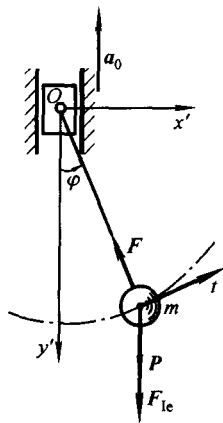


图 1-2

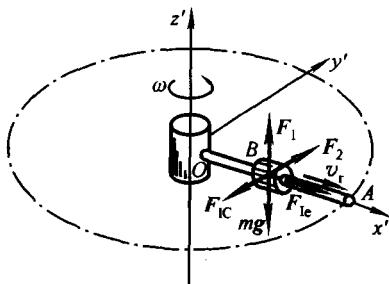


图 1-3

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dx'} \frac{dx'}{dt} = \omega^2 x'$$

注意  $\frac{dx'}{dt} = v_r$ , 上式分离变量并积分, 即

$$\int_0^{v_r} v_r dv_r = \int_{\frac{l}{2}}^{x'} \omega^2 x' dx'$$

得

$$\frac{1}{2} v_r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left( x'^2 - \frac{l^2}{4} \right)$$

或

$$v_r = \frac{dx'}{dt} = \omega \sqrt{x'^2 - \frac{l^2}{4}} \quad (b)$$

上式再分离变量并积分, 即

$$\int_{\frac{l}{2}}^l \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - \frac{l^2}{4}}} = \int_0^t \omega dt$$

求得套筒到达端点 A 的时间  $t$  为

$$t = \frac{1}{\omega} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\omega} \ln (2 + \sqrt{3})$$

将  $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$  代入上式, 解出

$$t = 0.2096 \text{ s}$$

将式(a)投影到  $y'$  轴上得

$$F_2 = F_{\text{IC}} = 2m\omega x' \quad (c)$$

当套筒到达端点 A 时  $x' = l$ , 由式(b)可得

$$v_r = \dot{x}' = \omega \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\omega}{2} \sqrt{3} l$$

代入式(c), 得

$$F_2 = \sqrt{3} \omega^2 l m = \sqrt{3} (2\pi \text{ rad/s})^2 \times 0.5 \text{ m} \times 0.1 \text{ kg} = 3.419 \text{ N}$$

又, 对于惯性参考系, 套筒运动的基本方程为

$$m a_a = mg + F_1 + F_2 \quad (d)$$

其中绝对加速度  $a_a = a_e + a_r + a_c$ 。注意到  $a_e, a_r$  均沿  $OA$  方向, 而  $a_c$  与  $F_{\text{IC}}$  方向相反, 则式(d)沿  $y'$  轴的投影式与式(c)相同, 显然应得到同样的水平约束力。由于  $mg$  与  $F_1$  等值而反向, 水平约束力  $F_2$  就是使套筒得到绝对加速度  $a_a$  的力。

**例 1-3** 在地球表面北纬角  $\varphi$  处, 以初速度  $v_0$ , 铅直上抛一质量为  $m$  的质点  $M$ 。由于地球自转的影响, 求质点  $M$  回到地表面的落点与上抛点的偏离。

**解:** 以上抛点为坐标原点, 选取固定于地球的非惯性参考系为  $Ox'y'z'$ 。其中  $z'$  轴铅直向上, 近似通过地球中心,  $x'$  轴水平向东,  $y'$  轴水平向北, 如图 1-4 所示。

不计空气阻力, 质点  $M$  受到地球引力  $F$ 。分析质点相对于转动的地球的运动时, 应再加上牵连惯性力  $F_{\text{te}}$  和科氏惯性力  $F_{\text{IC}}$ 。其中地球引力  $F$  与牵连惯性力  $F_{\text{te}}$  之和就是物体在地表面表现出的重力  $P$ , 即

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ic} = m\mathbf{g}$$

而科氏惯性力为

$$\mathbf{F}_{ic} = -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

其中  $\boldsymbol{\omega}$  为地球自转角速度矢量, 如图 1-4 所示;  $\mathbf{v}_r$  为相对速度, 可写为

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}'$$

而  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  为  $x', y', z'$  轴向单位矢量。  $\mathbf{F}_{ic}$  的矢量积可展开为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ic} &= -2m \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} \\ &= 2m\omega [(\dot{y}' \sin \varphi - \dot{z}' \cos \varphi)\mathbf{i}' - \dot{x}' \sin \varphi \mathbf{j}' + \dot{x}' \cos \varphi \mathbf{k}'] \end{aligned} \quad (a)$$

列出质点相对于地球的运动微分方程

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ic} + \mathbf{F}_{lc} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

$\mathbf{g}$  沿  $z'$  轴向下, 在地表面附近为常值。 消去质量  $m$ , 引用式(a), 上式沿  $x', y', z'$  轴的投影式为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' &= 2\omega\dot{y}' \sin \varphi - 2\omega\dot{z}' \cos \varphi \\ \ddot{y}' &= -2\omega\dot{x}' \sin \varphi \\ \ddot{z}' &= -g + 2\omega\dot{x}' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

对此微分方程组, 可以采用逐次渐近的方法求解。

由于地球自转角速度  $\omega$  很小, 最初级的近似计算中, 可取  $\omega = 0$ , 则式(b)的零次近似方程为

$$\ddot{x}' = 0, \ddot{y}' = 0, \ddot{z}' = -g \quad (c)$$

此题的运动初始条件为,  $t = 0$  时

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}' &= 0, & \dot{y}' &= 0, & \dot{z}' &= v_0 \\ x' &= 0, & y' &= 0, & z' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在此条件下, 式(c)积分一次, 得质点零次近似的速度为

$$\dot{x}' = 0, \dot{y}' = 0, \dot{z}' = -gt + v_0 \quad (e)$$

将上式代入式(b), 得一次近似的微分方程

$$\ddot{x}' = 2\omega(gt - v_0) \cos \varphi, \ddot{y}' = 0, \ddot{z}' = -g \quad (f)$$

在式(d)的初始条件下, 上式积分一次, 得一次近似的速度

$$\dot{x}' = \omega(gt^2 - 2v_0t) \cos \varphi, \dot{y}' = 0, \dot{z}' = -gt + v_0 \quad (g)$$

再积分一次, 得一次近似的上抛质点运动方程

$$x' = \left( \frac{1}{3}gt^3 - v_0t^2 \right) \omega \cos \varphi, y' = 0, z' = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (h)$$

当质点  $M$  回落到原上抛点高度时,  $z' = 0$ , 代入上式, 可得质点经历的时间为

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

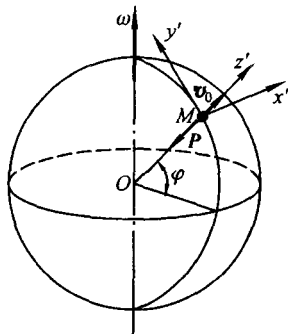


图 1-4

将此  $t$  值代入式(h)的第一式,得

$$x' = \left( \frac{1}{3}g \frac{8v_0^3}{g^3} - v_0 \frac{4v_0^2}{g^2} \right) \omega \cos \varphi = -\frac{4}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \omega \cos \varphi$$

$x'$  为负值,表明上抛质点落地时,其落点偏西。

如将式(g)代入式(b),可得二次近似的质点运动微分方程,在式(d)的初始条件下,再积分,可得二次近似的质点速度及运动方程(读者可自作)。

如果质点在高  $h$  处无初速自由落下,其相对运动微分方程仍为式(b)。注意此时  $v_0 = 0$ , 其零次近似的速度式(e)改为

$$\dot{x}' = 0, \quad \dot{y}' = 0, \quad \dot{z}' = -gt$$

以始落点为原点,其一次近似的质点运动方程式(h)改为

$$x' = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi, \quad y' = 0, \quad z' = -\frac{1}{2} g t^2 \quad (i)$$

当落下高度  $h$  时,  $z' = -h$ , 经历时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

以此  $t$  值代入式(i)的第一式,得  $x'$  方向偏移

$$x' = \frac{2\omega h \cos \varphi}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

此时  $x'$  为正值,偏移向东。这就是地球上的落体偏东现象。

此题中,质点上抛与下落都受有科氏惯性力的影响而偏离铅垂线。无初速下落时,科氏惯性力始终沿  $x'$  轴正方向,使落体向东偏移。而以初速度上抛时,上升过程中科氏惯性力沿  $x'$  轴负方向,使上升质点向西偏移并有向西方向的速度分量。当质点回落时,科氏惯性力沿  $x'$  轴正方向,逐步减小质点向西的速度分量。由一次近似式(h)可见,当质点回落到原上抛点的高度时,  $z' = 0$ ,  $t = 2v_0/g$ 。而当  $t \leq 2v_0/g$  时,由式(g)可见,质点沿  $x'$  轴的速度分量  $\dot{x}' \leq 0$ , 即,皆有向西的速度分量。因此,由上抛点起又回到原上抛点高度的过程中,质点一直向西偏移。

## § 1-2 非惯性系中质点的动能定理

在惯性参考系中我们已经推导出动能定理,但它只适用于惯性系。在非惯性系中,由于质点的运动微分方程中含有惯性力,因此要重新推导动能定理。

质点的相对运动动力学基本方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{le} + \mathbf{F}_{lc}$$

式中:  $\mathbf{F}_{le} = -m\mathbf{a}_e$ ,  $\mathbf{F}_{lc} = -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$  分别为质点的牵连惯性力和科氏惯性力;  $\mathbf{a}_e$ ,  $\mathbf{a}_c$  分别为牵连加速度和科氏加速度;  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{v}_r$  分别为非惯性参考系的角速度矢量和质点相对于此动参考系的速度;  $\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$  是  $\mathbf{v}_r$  对时间  $t$  的相对导

数。上式两端点乘相对位移  $d\mathbf{r}'$ , 则有

$$m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \cdot d\mathbf{r}' = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \mathbf{F}_{le} \cdot d\mathbf{r}' + \mathbf{F}_{lc} \cdot d\mathbf{r}'$$

注意到  $\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ , 且科氏惯性力  $\mathbf{F}_{lc}$  垂直于相对速度  $\mathbf{v}_r$ , 有  $\mathbf{F}_{lc} \cdot d\mathbf{r}' = 0$ , 则上式成为

$$m \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{v}_r = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \mathbf{F}_{le} \cdot d\mathbf{r}'$$

若以  $\delta W'_F$  和  $\delta W'_{le}$  表示力  $\mathbf{F}$  和牵连惯性力  $\mathbf{F}_{le}$  在质点的相对位移上的元功, 则有

$$d \left( \frac{1}{2} m v_r^2 \right) = \delta W'_F + \delta W'_{le} \quad (1-4)$$

式(1-4)称为质点相对运动动能定理的微分形式, 即: 质点在非惯性系中相对动能的增量, 等于作用于质点上的力与牵连惯性力在相对运动中所作的无功之和。积分上式, 得

$$\frac{1}{2} m v_r^2 - \frac{1}{2} m v_{r0}^2 = W'_F + W'_{le} \quad (1-5)$$

方程(1-5)表示: 质点在非惯性参考系中相对动能的变化, 等于作用在质点上的力与牵连惯性力在相对路程上所作的功之和。这一规律称为质点相对运动动能定理的积分形式。应该强调指出: 科氏惯性力始终垂直于相对速度  $\mathbf{v}_r$ , 所以在相对运动中不作功。

**例 1-4** 一平板与水平面成  $\theta$  角, 板上有一质量为  $m$  的小球, 如图 1-5 所示。若不计摩擦等阻力, 问平板以多大加速度向右平移时, 小球能保持相对静止? 若平板又以这个加速度的两倍向右平移时, 小球应沿板向上运动。问小球沿板走了  $l$  距离后, 小球的相对速度是多少?

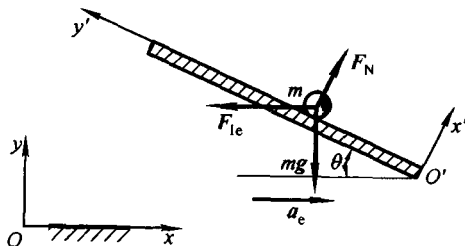


图 1-5

**解:**(1) 在平板上固结一参考系  $O'x'y'$ , 小球受的力有重力  $mg$ , 平板的约束力  $F_N$ 。小球的牵连惯性力大小为  $F_{le} = ma_e$ , 方向与平板向右作平移的加速度  $a_e$  相反, 如图所示。因动系作平移, 所以没有科氏惯性力, 小球相对静止, 方程为

$$\Sigma F_x = 0, \quad F_N - mg \cos \theta - F_{ic} \sin \theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad -mg \sin \theta + F_{ic} \cos \theta = 0$$

从中解出

$$mg \sin \theta = F_{ic} \cos \theta = ma_c \cos \theta$$

得

$$a_c = g \tan \theta$$

(2) 当加速度  $a_c = 2g \tan \theta$  时, 牵连惯性力  $F_{ic} = 2mg \tan \theta$ , 应用相对运动动能定理, 有

$$\frac{m}{2} v_r^2 - 0 = (F_{ic} \cos \theta) l - (mg \sin \theta) l$$

整理后得

$$\frac{m}{2} v_r^2 = (mg \sin \theta) l$$

解得

$$v_r = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

**例 1-5** 半径为  $R$  的环形管, 绕铅垂轴  $z$  以匀角速度  $\omega$  转动, 如图 1-6 所示。管内有一质量为  $m$  的小球, 原在最低处平衡。小球受微小扰动时可能会沿圆管上升。忽略管壁摩擦, 求小球能达到的最大偏角  $\varphi_{\max}$ 。

**解:** 以环形管为动参考系, 小球在任一角度  $\varphi$  时, 其牵连惯性力大小为  $F_{ic} = m\omega^2 R \sin \varphi$ , 方向如图。经过微小角度  $d\varphi$  时, 此惯性力做功为

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= F_{ic} R d\varphi \cos \varphi \\ &= m\omega^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

小球在最低处和最大偏角处的相对速度都等于零。列出此二位置间的相对运动的动能定理, 得

$$0 - 0 = -mgR(1 - \cos \varphi_{\max}) + \int_0^{\varphi_{\max}} m\omega^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

完成积分可得

$$mgR(\cos \varphi_{\max} - 1) + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2 \varphi_{\max} = 0$$

因  $\sin^2 \varphi_{\max} = 1 - \cos^2 \varphi_{\max}$ , 上式成为

$$mgR(\cos \varphi_{\max} - 1) + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 (1 - \cos^2 \varphi_{\max}) = 0$$

或

$$\omega^2 R \cos^2 \varphi_{\max} - 2g \cos \varphi_{\max} + 2g - \omega^2 R = 0$$

解出

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{g \pm (\omega^2 R - g)}{\omega^2 R}$$

其中一解为对应于小球在最低处的情况, 即

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{g + (\omega^2 R - g)}{\omega^2 R} = 1$$

另一解为

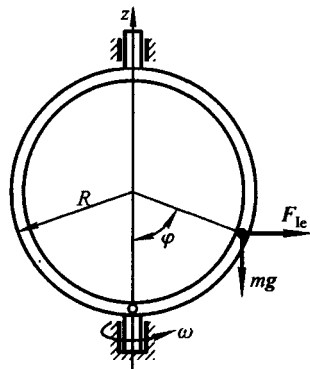


图 1-6

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{g - (\omega^2 R - g)}{\omega^2 R} = \frac{2g}{\omega^2 R} - 1$$

得 
$$\varphi_{\max} = \arccos \left( \frac{2g}{\omega^2 R} - 1 \right)$$

可以看出,上述结果只在  $\omega^2 R \geq g$  时才有意义,此时有  $\cos \varphi_{\max} \leq 1$ ;而当  $\omega^2 R < g$  时,小球不会沿圆管上升,而在最低处才是稳定的。

## 小 结

1. 非惯性系中的质点动力学基本方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{le}} + \mathbf{F}_{\text{lc}}$$

其中:

$\mathbf{F}$ ——作用于质点的力;

$\mathbf{F}_{\text{le}} = -m\mathbf{a}_e$ ——牵连惯性力;

$\mathbf{F}_{\text{lc}} = -m\mathbf{a}_c$ ——科氏惯性力;

$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}$ ——质点相对于动参考系的加速度。

应用时取投影形式。

2. 非惯性系中的质点动能定理

微分形式 
$$d\left(\frac{1}{2}mv_r^2\right) = \delta W'_F + \delta W'_{\text{le}}$$

积分形式 
$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv_{r0}^2 = W'_F + W'_{\text{le}}$$

科氏惯性力在质点的相对运动中不作功。

## 思 考 题

1-1 根据相对运动动力学基本方程,小球在变速运动的车厢中自由降落时受有牵连惯性力,飞机在高空飞行时受有科氏惯性力。试分析这两个惯性力的反作用力作用在哪?牛顿第三定律对它们成立吗?

1-2 对固结在变速运动的列车上的参考系来说,地面上静平衡的物体并不平衡,而随列车一起运动的物体却是平衡的。试从这一点出发说明惯性力的相对性、虚加性及真实性。

1-3 在质点相对运动中,下述哪些说法是正确的?

A. 若  $\mathbf{a}_r = 0, \mathbf{v}_r = 0$ , 则必有  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{le}} = 0$

B. 若  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{le}} = 0$ , 则必有  $\mathbf{a}_r = 0, \mathbf{v}_r = 0$

1-4 某人水平抛出一个球,如果考虑科氏惯性力,则在下述情况下,由抛球的人来看,球的路径会偏向不考虑科氏惯性力时路径的右侧还是左侧?

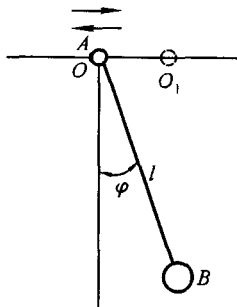
(1) 在北半球水平抛出;(2) 在南半球水平抛出;(3) 在南极和北极水平抛出。



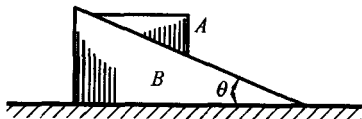
1-5 在惯性系中,质点系的动能为  $T = \frac{1}{2} m v_c^2 + T'$ 。其中  $m$  为质点系总质量,  $v_c$  为质心速度,  $T'$  为质点系相对于质心坐标系(即以质心为基点的平移坐标系)的动能。称上式为柯尼希定理。试利用柯尼希定理导出质点系相对于质心坐标系的动能定理。

## 习 题

1-1 图示单摆  $AB$  长  $l$ , 已知点  $A$  在固定点  $O$  的附近沿水平作微幅谐振动:  $OO_1 = a \sin pt$ , 其中  $a$  与  $p$  为常数。设初瞬时摆静止, 求摆的相对运动规律。



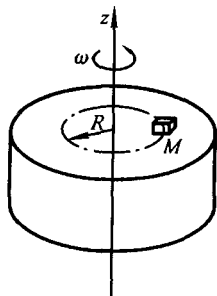
题 1-1 图



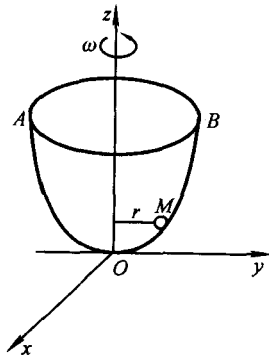
题 1-2 图

1-2 三棱柱  $A$  沿三棱柱  $B$  的光滑斜面滑动, 如图所示。三棱柱  $A$  和三棱柱  $B$  的质量分别为  $m_1$  与  $m_2$ , 三棱柱  $B$  的斜面与水平面成  $\theta$  角, 如开始时物系静止, 求运动时三棱柱  $B$  的加速度。摩擦略去不计。

1-3 图示一重物  $M$  放在粗糙的水平平台上, 平台绕铅直轴以匀角速度  $\omega$  转动, 重物与平台间摩擦因数为  $f$ , 试求重物能在平台上保持相对静止时的位置。



题 1-3 图



题 1-4 图

1-4 质点  $M$  的质量为  $m$ , 被限制在旋转容器内沿光滑的经线  $AOB$  运动, 如图所示。旋转容器绕其几何轴  $Oz$  以角速度  $\omega$  匀速转动。求质点  $M$  相对静止时的位置。